

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Решениями XXVI съезда КПСС предусмотрено довести выработку электроэнергии в 1985 г. до 1550—1600 млрд. кВт·ч. Учитывая, что в ближайший период примерно 85% электроэнергии будет вырабатываться турбоагрегатами с паровыми турбинами, для выполнения поставленных задач необходимо увеличение единичных мощностей как электростанций, так и отдельных блоков при одновременном повышении их экономичности и надежности. Повышение эксплуатационной надежности паровых турбин при проектировании может быть достигнуто путем уточненного расчетно-экспериментального анализа характеристик прочности и вибрации их основных элементов с учетом предшествующего опыта эксплуатации.

Предлагаемая читателю книга, посвященная вопросам прочности и вибрации рабочих лопаток и дисков, является вторым, дополненным и переработанным изданием книги д-ра техн. наук проф. А. В. Левина «Рабочие лопатки и диски паровых турбин» [107].

За годы, прошедшие со дня выхода в свет первого издания книги (1953 г.), отечественное и зарубежное паротурбостроение получило значительное развитие как в области освоения высоких и сверхкритических параметров пара, так и в увеличении единичной мощности турбоагрегатов. Достаточно сказать, что единичная мощность турбоагрегатов за последние 25 лет увеличилась более чем в 10 раз. Существенное развитие получила также атомная энергетика, базирующаяся на турбинах мощностью 500—1000 МВт и более. Все это, естественно, привело к конструктивному изменению многих ответственных элементов паровых турбин и возрастанию действующих на них нагрузок.

С увеличением единичной мощности паровых турбин и развитием атомной энергетики повысились и требования к эксплуатационной надежности турбоагрегата в целом и, в частности, к надежности наиболее напряженных его элементов — роторов, дисков и рабочих лопаток. Это, в свою очередь, вызвало повышение требований к точности расчетного и экспериментального определения напряженного состояния и вибрационных характеристик указанных элементов.

ББК 31.363

Л34

УДК 621.165.73:620.17:62—752

Рецензент Ю. С. Воробьев

Левин А. В. и др.

Л34

Прочность и вибрация лопаток и дисков паровых турбин/А. В. Левин, К. Н. Боришанский, Е. Д. Консон. — Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1981. — 710 с., ил.

В пер.: 2 р. 50 к.

Рассмотрены условия работы турбинных лопаток и дисков. Даны методы расчета на прочность и вибрацию лопаток и дисков с учетом условий их работы.

Новое издание (1-е изд. 1953 г.) дополнено расчетами на прочность лопаток и дисков с учетом ползучести и концентрации напряжений. Описаны изгибно-крутильные колебания отдельных лопаток, а также лопаток, соединенных замкнутой на круг связями.

Книга предназначена для инженерно-технических работников, занимающихся вопросами турбостроения.

Л 30303-281
038(01)-81 281-81. 2303000000

ББК 31.363
6П2.23

Удовлетворить возросшим требованиям по надежности оказалось возможным только за счет того прогресса, который был достигнут за последние годы в развитии расчетных и экспериментальных методов. Этот прогресс во многом обязан широкому внедрению ЭВМ в практику инженерных расчетов и развитию измерительной техники. Значительно пополнился к настоящему времени и опыт эксплуатации паровых турбин большой мощности, который необходимо использовать при проектировании.

Указанные обстоятельства потребовали существенной переработки первого издания книги. Все главы нового издания значительно дополнены, а некоторые, касающиеся, например, свойств применяемых материалов, расчетов за пределами упругости, совместных изгибно-крутильных колебаний длинных закрученных лопаток и другие, написаны заново.

При изложении материала особое внимание уделялось выявлению специфических особенностей рассматриваемых задач, объяснению физической картины явлений, рассмотрению возможного влияния технологических и эксплуатационных факторов на полученные результаты.

Выражаем искреннюю благодарность нашим товарищам по работе за ценные замечания и полезные советы, а также за помощь при выполнении численных примеров и подготовке рукописи.

Часть первая

УСЛОВИЯ РАБОТЫ ЛОПАТОК И ДИСКОВ

Паротурбинные энергетические установки, работающие на органическом или ядерном топливе, являются основой современной энергетики. В настоящее время в эксплуатации на электростанциях находятся паровые турбины различной мощности от 25—50 МВт до 1000 МВт и более, спроектированные на параметры пара от низких (давление 4—6 МПа, температура 250—300 °С) до сверхкритических (давление 24—30 МПа, температура 560—650 °С). Широкое применение паровые турбины находят в судовых паротурбинных установках, используются в качестве приводов и т. д.

В зависимости от назначения и параметров пара каждый тип паровых турбин имеет свои конструктивные особенности. Во многом конструкцию всей турбины в целом и особенно конструкцию ротора предопределяет выбранный тип облопачивания. В силу этого разработке конструкций рабочих лопаток и роторов при проектировании турбины уделяется особое внимание как с точки зрения обеспечения эксплуатационной надежности, экономичности, так и высокой технологичности изготовления.

Глава I

ОСОБЕННОСТИ КОНСТРУКЦИЙ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ДЕЙСТВУЮЩИЕ НАГРУЗКИ

1.1. КОНСТРУКЦИИ РАБОЧИХ ЛОПАТОК И СВЯЗЕЙ

В зависимости от условий работы в турбине конструкции рабочих лопаток весьма разнообразны. О размерах лопаток можно судить по рис. 1.1, на котором показан облопаченный ротор турбины мощностью 300 МВт на 3000 об/мин. Длина лопатки первой ступени этого ротора составляет 97 мм, последней — 960 мм.

Основными конструктивными элементами рабочей лопатки являются профильная или рабочая часть, обтекаемая потоком пара и преобразующая его кинетическую энергию в механическую работу вращения ротора, и хвостовая часть, посредством которой

осуществляется крепление лопатки в диске. Профильная часть может иметь шипы для установки бандаж, отверстия для проводочных связей или может быть выполнена заодно с так называемым цельнофрезерованным бандажом.

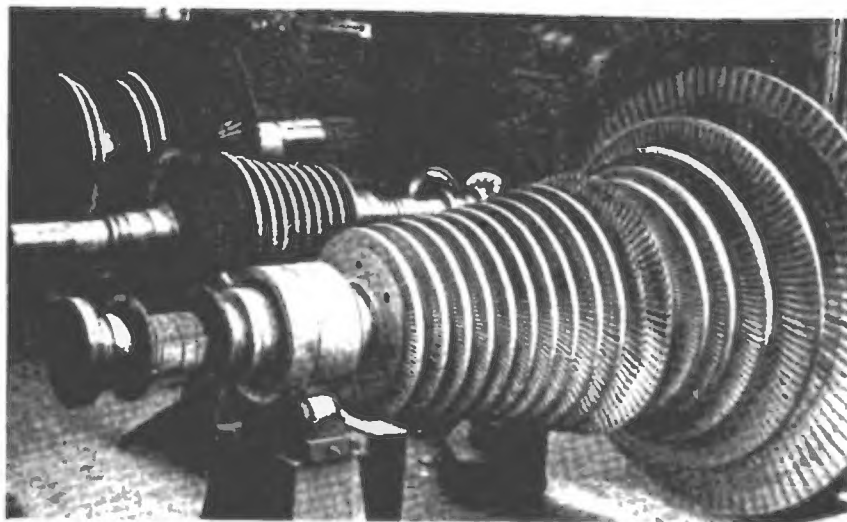


Рис. 1.1 Облопаченный ротор паровой турбины мощностью 300 МВт

Профильная часть лопатки. По конструкции профильной части рабочие лопатки можно разделить на лопатки постоянного и переменного сечений (рис. 1.2 и 1.3). Лопатки постоянного сечения применяются для ступеней с отношением $D_{\text{ср}}/l > 10$ ($D_{\text{ср}}$ — средний диаметр ступени, l — длина рабочей части лопатки). В турбинах большой мощности это, как правило, лопатки первых ступеней высокого давления, реже лопатки первых ступеней среднего давления. Высота этих лопаток невелика и составляет обычно 20—100 мм. Лопатки последующих ступеней имеют переменный профиль, причем площадь поперечных сечений плавно уменьшается от корневого сечения к вершине. Обычно для лопаток высокого и среднего давления, а также для лопаток первых ступеней низкого давления отношение площади корневого сечения к периферийному не превосходит 2,0—

3,0. У лопаток последних ступеней это отношение достигает 6,0—8,0.

Лопатки переменного сечения всегда имеют начальную закрутку, т. е. углы установки сечений¹ по высоте из соображений аэродинамики задаются различными, с плавным увеличением от корня к вершине. Для относительно коротких лопаток углы закрутки профиля (разность между углами установки периферийного и корневого сечений) составляют 10—30°, а для лопаток последних ступеней могут достигать 65—70°.

При конструировании рабочей лопатки профильная часть ее задается чертежом отдельных сечений. Количество сечений выбирается в зависимости от длины лопатки и составляет 5—10 для коротких лопаток

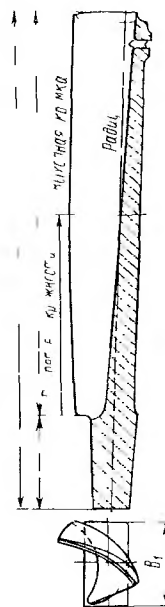


Рис. 1.3. Лопатка переменного сечения

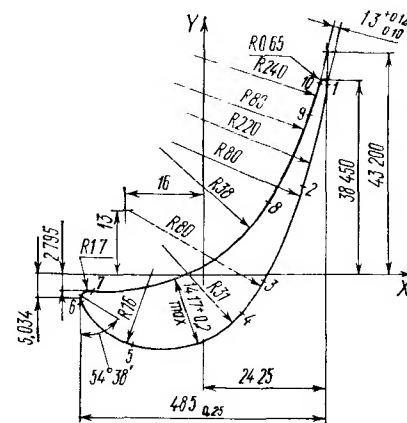


Рис. 1.4. Сечение, заданное дугами окружностей (1—10 — точки сопряжения)

и 20—25 для длинных лопаток последних ступеней. Чертеж сечений строится в базовой системе координатных осей, определенным образом привязанной к хвосту лопатки. Контур сечения может быть задан дугами окружностей и сопряженными прямыми (рис. 1.4) или координатами точек (рис. 1.5). Имеются также другие методы задания контура сечения, например отрезками парабол или кривыми более высокого порядка (сплайнами), применение которых возможно в основном при машинном проектировании. Взаимное расположение сечений по высоте лопатки при образовании профиля и положение этого профиля относительно диска представляет собой «установку» лопатки на диске и должно удовлетворять требованиям аэродинамики, прочности и технологичности изготовления.

¹ Угол, образованный прямой, соединяющей кромок сечения (хордой), с осью турбины.

Лопатки постоянного и переменного сечения изготавливаются, как правило, из предварительно отштампованных заготовок. Применяются также методы изготовления лопаток точным литьем или точной штамповкой, при которых требуется только шлифовка и полировка. Особую сложность представляет конструкция профильной части у лопаток последних ступеней турбин большой мощности. Современные тенденции повышения единичной мощности турбин требуют увеличения площади выхлопа последней ступени, а следовательно, и разработки рабочих лопаток максимально возможной длины. Создание таких лопаток зависит от уровня научных достижений в вопросах аэродинамики потока, статической и динамической прочности, а также от обеспечения сталями или сплавами с необходимыми свойствами и возможности решения возникающих технологических задач.

Создание лопатки «предельной» длины для данного момента времени требует больших усилий и затрат как при конструктивной разработке и

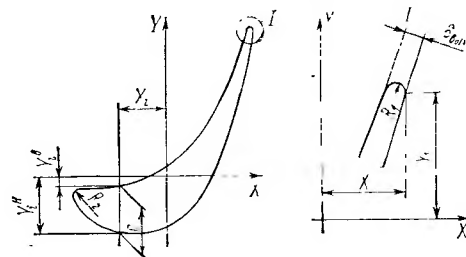


Рис. 1.5. Сечение, заданное координатами точек (значения буквенных обозначений задаются на чертеже таблично)



Рис. 1.6. Лопатка последней ступени длиной 960 мм

В качестве примера на рис. 1.7 показаны рабочие лопатки последних ступеней мощных конденсационных паровых турбин на разных этапах развития турбостроения на Ленинградском металлургическом заводе, а в табл. 1.1 приведены характеристики наиболее крупных лопаток последних ступеней, изготавливаемых отечественными и ведущими зарубежными фирмами [175].

Опыт проектирования рабочих лопаток последних ступеней показывает, что в силу их высокой напряженности возможность

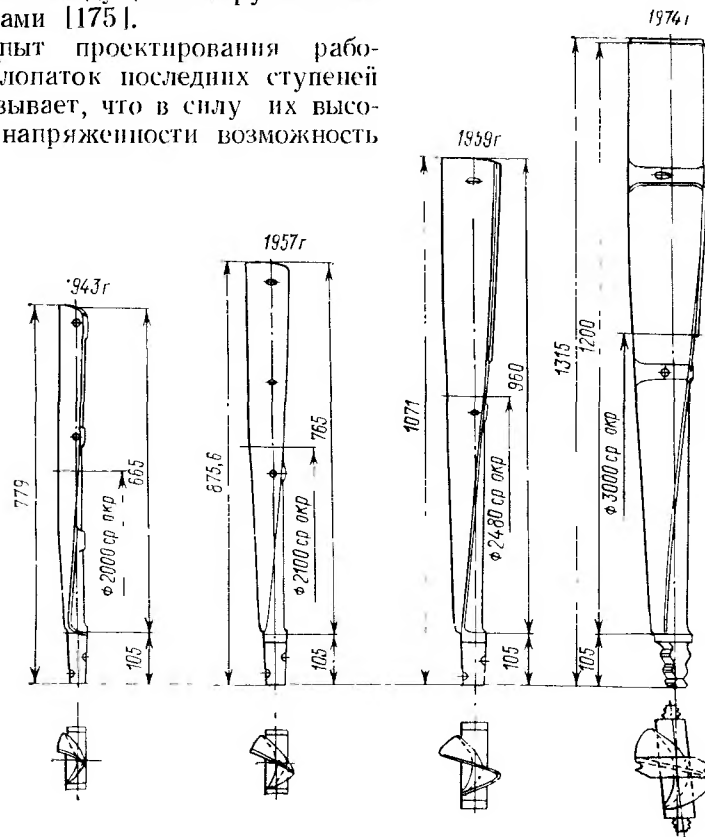


Рис. 1.7 Рабочие лопатки последних ступеней турбин ЛМЗ

экспериментальной доводке, так и при создании технологии изготовления. Как правило, на базе созданной лопатки строится целая серия турбин различной мощности. Так, созданная в 1959 г. на Ленинградском металлургическом заводе лопатка длиной 960 мм (рис. 1.6) на 3000 об/мин позволила выпустить серию турбин мощностью 300, 500 и 800 МВт соответственно с тремя, четырьмя и шестью выхлопами. Аналогичное положение имеет место и на других отечественных заводах и зарубежных турбостроительных фирмах.

увеличения площади выхлопа в первую очередь определяется прочностными свойствами освоенных лопаточных и роторных сталей. Так, стали с пределом текучести 700—750 МПа позволяют создать лопатку на 3000 об/мин длиной примерно 1000 мм при корневом диаметре 1500 мм, а высокопрочные стали с пределом текучести более 1000 МПа — до 1200 мм с корневым диаметром 1800—2000 мм.

Дальнейшее увеличение площади выхлопа при сохранении частоты вращения турбины требует применения материалов с меньшей плотностью. В связи с этим возникает необходимость в приме-

Таблица 11

Угловая скорость враще- ния ω , с ⁻¹	Длина лопатки l , мм	Средний диаметр D_{cp} , мм	D_{cp}/l	Торцевая площадь $S_{тп}$, мм ²	Периферийная сторона u , мм	Завод-изготовитель
50	1200	3,25	2,71	12,25	700	ББЦ
50	1200	3,00	2,50	11,30	658	ЛМЗ
50	1143	2,97	2,60	10,68	639	АЕИ
50	1080	2,95	2,73	10,00	633	КВУ
50	1030	2,53	2,46	8,19	559	ХПЗ
50	1000	2,82	2,82	8,82	600	ББЦ
50	1000	2,70	2,70	8,48	580	КМ—ББЦ
50	960	2,48	2,58	7,48	540	ЛМЗ
25	1500	1,50	2,57	20,50	475	АЛ
25	1150	1,15	2,56	18,90	440	ХПЗ
25	1365	1,38	2,14	18,40	445	КВУ
25	1320	1,91	2,96	16,20	411	АЛ
60	889	—	—	—	—	ЦЭ
60	852	2,50	2,71	6,15	594	ТЭ «Хитачи»
60	850	2,25	2,65	6,00	590	ББЦ—АЕИ
60	787	2,48	3,15	6,12	616	«Вестингауз»
30	1320	3,96	3,00	16,42	198	ББЦ
30	1320	3,86	2,93	16,02	188	ЦЭ «Хитачи»
30	1270	3,81	3,00	15,35	180	«Вестингауз»
30	1170	3,50	2,82	12,20	120	ЛМЗ—АЕИ

нения для изготовления таких лопаток сплавов на основе титана. Лопатка длиной 1200 мм, показанная на рис. 17, изготовлена из высокопрочного титанового сплава. Следует иметь в виду, что хотя при использовании титановых сплавов длина рабочей лопатки может быть увеличена до 1400—1500 мм, ограничением в данном случае может явиться прочность ротора, поскольку создание лопатки такой длины требует одновременного увеличения корневого диаметра для сохранения отношения $D_{cp}/l \geq 2,4$. В противном случае увеличение длины лопатки становится неэффективным. Необходимо заметить, что в настоящее время применение титановых сплавов существенно усложняет технологию и увеличивает трудоемкость изготовления лопаток.

Лопатки последних ступеней работают в среде влажного пара и подвержены эрозионному разрушению, которое вызывается ударным и кавитационным воздействием капель влаги. Наиболее сильная эрозия входных кромок наблюдается обычно в периферийных сечениях лопаток. Кроме того, подвергаются эрозии и выходные кромки лопаток в корневых сечениях вследствие отрыва потока при частичных нагрузках и связанных с этим обратных токов из выхлопного патрубка.

Важным моментом при создании рабочих лопаток последних ступеней является защита их входных кромок от эрозионного разрушения.

Рабочие лопатки из титановых сплавов имеют более высокую стойкость против эрозии, что подтверждается длительным опытом эксплуатации лопаток с неупрочненными входными кромками при окружных скоростях до 550 м/с. Тем не менее дальнейшее увеличение окружных скоростей требует разработки способов упрочнения входных кромок и у титановых лопаток.

Существуют различные способы защиты входных кромок. Широко распространенным и хорошо зарекомендовавшим себя в эксплуатации является метод напайки на входную кромку пластинок из специальных сплавов (рис. 18). Таким сплавом может служить стеллит-сплав, содержащий 60—65% Co, 25—28% Cr, до 7% W, 2—2,5% Si, 1—1,2% C и Fe — остальное. Пластины специальной формы толщиной 1,5—2,0 мм, шириной до 10 мм и длиной 20—30 мм охватывают входную кромку со стороны спинки и припаяются к лопатке серебряным припоем. Находит также применение электроискровой метод упрочнения, при котором на входную кромку проецируется наплавка износостойчивого сплава, например Т15К6, состоящего из карбидов W (79%), Ti (15%) и Co (6%) или карбидохромового сплава, состоящего из карбидов Cr (85%) и Ni (15%). Опыт эксплуатации турбин показал, что защита входных кромок припайкой стеллитовых пластинок является более эффективной по сравнению с электроискровым упрочнением. Помимо указанных существует способ упрочнения кромок заключающийся в закалке входной кромки токами высокой частоты (т. в. ч.). Необходимо отметить, что припайка стеллитовых пластинок и электроискровое упрочнение могут существенно снижать (до 2—2,5 раз) усталостную конструктивную прочность лопаток. При этом заслуживает внимания упрочнение входных кромок приваркой к лопатке цельной пластины из твердого сплава, обработанной по профилю входной кромки. Специальную проблему представляет собой защита от эрозии входных кромок титановых лопаток и лопаток для турбин АЭС с одноконтурными реакторами. Последнее усложняется тем, что сплав стеллита содержит кобальт образующий радиоактивные изотопы с длительным периодом полураспада.

Весьма существенное значение при конструировании лопаток имеют вопросы технологии. При разработке чертежей лопаток необходимо учитывать производственные возможности завода изготовителя, а также количество лопаток, выпускаемых по этим

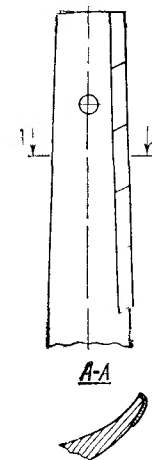


Рис. 18 Упрочнение входной кромки лопатки напайкой стеллитовых пластинок

чертежам. При массовом изготовлении могут стать весьма выгодными даже самые сложные технологические процессы.

Способы обработки профильной части турбинных лопаток можно разделить на три основных вида [96]. К первому относятся различные способы механической обработки резанием лезвийным инструментом, ко второму — электрофизические и электрохимические, к третьему — способы абразивной (чистовой) обработки лопаток.

Способы механической обработки резанием включают различные виды обработки поперечными и продольными «строчками» узколезвийным инструментом (точением, строганием, фрезерованием дисковыми и концевыми фрезами) и обработку профилированным широколезвийным инструментом, работающим одновременно по всей ширине или длине лопатки, например фасонными фрезами. Наиболее производительным способом механической обработки лопаток постоянного сечения, а также относительно простых лопаток переменного сечения (лопатки «косого» фрезерования) является обработка фрезерованием фасонными фрезами. Поверхность, обработанная фасонной фрезой, не требует окончательной размерной шлифовки, а лишь подвергается полировке. Распространенным способом обработки лопаток переменного профиля является фрезерование поперечными и продольными строчками, при котором отдельно обрабатываются внутренняя и наружная поверхность лопатки. Для лопаток большой длины, имеющих сложную форму профиля, наиболее эффективным способом обработки является круговое фрезерование. Во всех указанных случаях обработка лопаток переменного профиля фрезерованием производится по копиру или по эталонной лопатке.

Весьма эффективным способом механической обработки лопаток является применение станков с программным управлением. В этом случае процесс механической обработки удается полностью автоматизировать, исключив необходимость изготовления трудоемких копиров. Последовательность обработки профильной поверхности полностью записывается на перфоленте или на магнитном барабане.

Электрофизические способы обработки (электроимпульсный и электрохимический) эффективны для изготовления лопаток из труднообрабатываемых и титановых сплавов, а также лопаток, выполненных заодно с бандажом. Электрохимический способ применяется также на отдельных операциях обработки лопаток (обработка отверстий и др.).

Чистовая обработка лопаток производится с помощью абразивных и войлочных кругов с применением различных абразивных паст. Эффективным является электроабразивный способ обработки, совмещающий электрический и абразивный способы. Его преимуществом является высокая стойкость инструмента (шлифовального круга) и отсутствие силовых и температурных нагрузок на лопатку.

Большое внимание в производстве лопаток уделяется организации системы контроля, которая могла бы гарантировать не только высокое качество выпускаемых лопаток, но и позволяла бы выявлять происхождение брака и тем самым указывать пути его ликвидации.

Хвостовая часть лопатки. Конструкции хвостовых соединений весьма разнообразны и применяются исходя из условий обеспечения необходимой прочности с учетом освоенности технологии их изготовления на турбостроительном предприятии.

Широкое применение в паровых турбинах нашло Т-образное хвостовое соединение (рис. 1.9). Это соединение выгодно отличается от соединений других типов простотой конструкции, а следовательно, и наиболее простой технологией изготовления. Лопатки заводятся в паз обода диска обычно через два диаметрально противоположных колодца, ширина которых равна ширине полки хвоста. Хвосты плотно пригоняются друг к другу по тангенциальным плоскостям (по краске) и прижимаются к опорной поверхности обода подкладными пружинами 1. После набора лопаток в колодцы устанавливаются замковые лопатки, которые могут крепиться к ободу диска, например, поставленными под развертку одной или двумя заклепками. Торцы заклепок развальцовываются. Недостатком Т-образного хвостового соединения является изгиб щечек обода диска, что приводит к необходимости их утолщения. Для того чтобы уменьшить величину изгибающих напряжений, на лопатках и на диске выполняются заплечики (рис. 1.9, б), которые удерживают щечки обода от раскрытия. Однако и в этом случае несущая способность Т-образного хвостового соединения относительно невелика, что не позволяет использовать его для длинных и сильно нагруженных лопаток.

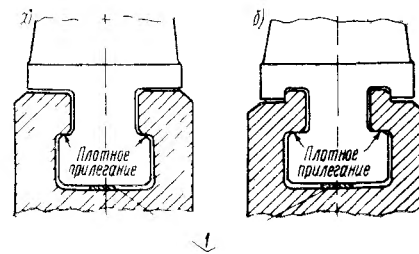


Рис. 1.9. Т-образное хвостовое соединение: а — без заплечиков; б — с заплечиками

Близким к Т-образному хвостовому соединению является грибовидное соединение (рис. 1.10). Его большим преимуществом является то, что он весь открыт и легко доступен осмотру, а это гарантирует высокое качество сборки и качество ревизий при ремонтах.

Для уменьшения напряжений изгиба, которые возникают в ножках хвоста, грибовидное хвостовое соединение, как и Т-образное, выполняется с заплечиками. С целью повышения несущей способности применяются двух- и трехпорные грибовидные хвосты (рис. 1.10, б и в).

Для посадки лопатки на диск в ободу в одном или в двух диаметрально противоположных местах выполняют местный срез

грибков на длине, превышающей шаг лопаток по хвосту на 1,0—1,5 мм. После сборки лопаток с плотной пригонкой их по тангенциальным плоскостям (по краске), в замковый вырез устанавливается лопатка 1 со специальным хвостом (рис. 1.11), которая

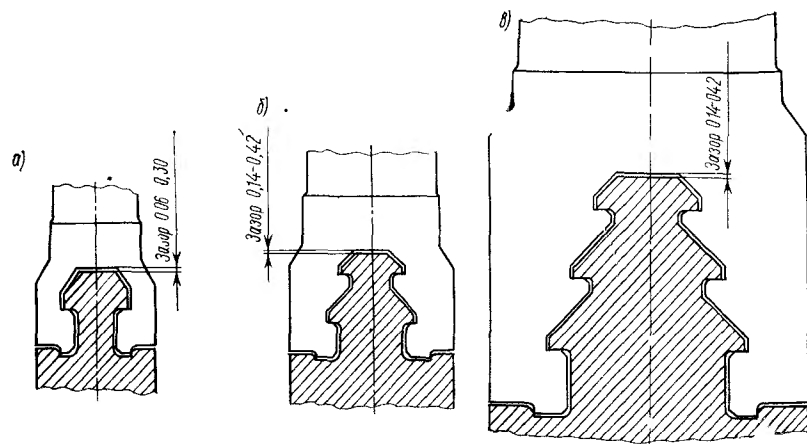


Рис. 1.10. Грибовидное хвостовое соединение: а — одноопорный хвост; б — двухопорный хвост; в — трехопорный хвост

может крепиться к ободу одной или двумя заклепками, поставленными под развертку. Иногда между замковой лопаткой 1 и предзамковыми 2 устанавливают дополнительные штифты 3 в продольной части. Возможны и другие варианты замков.

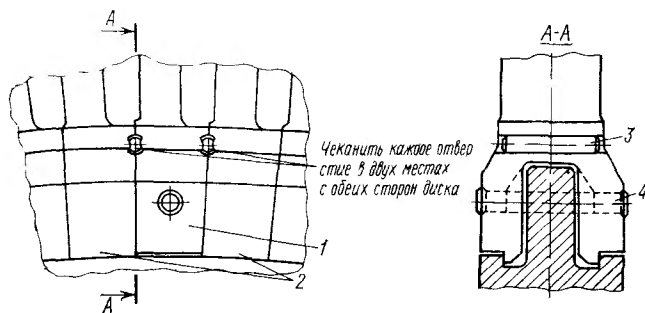


Рис. 1.11. Замковая лопатка грибовидного хвостового соединения:

1 — замковая лопатка; 2 — предзамковые лопатки, 3 — штифт; 4 — заклепка

Общим недостатком Т-образного и грибовидного хвостовых соединений является трудность частичной замены лопаток на диске при ремонтах. И в том, и в другом случаях необходимо демонтировать замковую лопатку и часть лопаток, находящихся между замковой и заменяемой.

Механическая обработка Т-образных и грибовидных хвостов относительно проста. Т-образные хвосты обрабатываются точением на токарно-карусельных станках в специальных оправках. Для повышения точности обработки многоопорных грибовидных хвостов их обрабатывают одной профильной фрезой после предварительной грубой проточки.

Большей несущей способностью обладают вильчатые хвостовые соединения (рис. 1.12 и 1.13). Число вилок в хвостовом соединении, т. е. число срезов заклепок, зависит от величины центробежной силы лопатки. Для легких лопаток применяется конструкция хвоста с двумя-тремя вилами, а для тяжелых — число вилок может

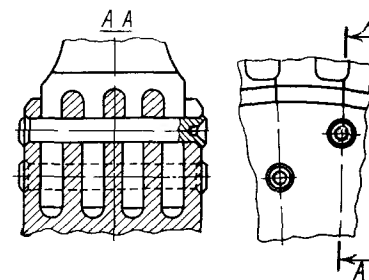


Рис. 1.12. Вильчатое хвостовое соединение с боковой заклепкой

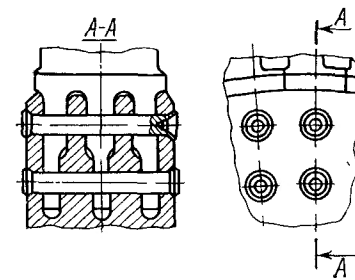


Рис. 1.13. Равнопрочное вильчатое хвостовое соединение с центральной заклепкой

быть увеличено до пяти—семи. Несущую способность вильчатого хвостового соединения можно существенно увеличить, если вилки хвоста и гребни обода диска будут ступенчатого сечения, как это показано на рис. 1.13 (равнопрочный хвост).

К гребням диска лопатки крепятся заклепки, которые устанавливаются под развертку и края которых развальцовываются. Заклепки могут устанавливаться между двумя соседними лопатками (рис. 1.12) или по оси хвоста (рис. 1.13). В первом случае вильчатый хвост будет с боковыми заклепками, во втором — с центральными.

Преимущество вильчатых хвостовых соединений перед выше-рассмотренными заключается прежде всего в отсутствии изгибающих напряжений в ободу диска от действия центробежных сил. Увеличением числа вилок и выполнением их ступенчатого сечения можно получить хвостовое соединение с высокой несущей способностью, пригодное для лопаток большой длины. Кроме того, это соединение не требует установки специальных замковых лопаток и допускает частичную замену отдельных поврежденных лопаток.

Вильчатое хвостовое соединение может быть с наружными вилами хвоста, что важно для влажнопаровых турбин, где обод диска требуется предохранять от эрозии. Для получения необходимой

точности при изготовлении окончательная обработка хвоста лопатки производится протяжкой, а гребни диска протачиваются на токарно-карусельных станках. Опыт производства показывает, что установка лопаток с вильчатыми хвостами возможна как на отдельных дисках, так и на дисках цельнокованных роторов с использованием специальных приспособлений для сверления отверстий

Наибольшей несущей способностью обладают елочные хвостовые соединения с торцевой заводкой (рис. 1 14, а), которые находят применение как для самых длинных лопаток последних ступеней, так и для коротких лопаток, работающих при высокой температуре. Применяются елочные хвосты с различным числом

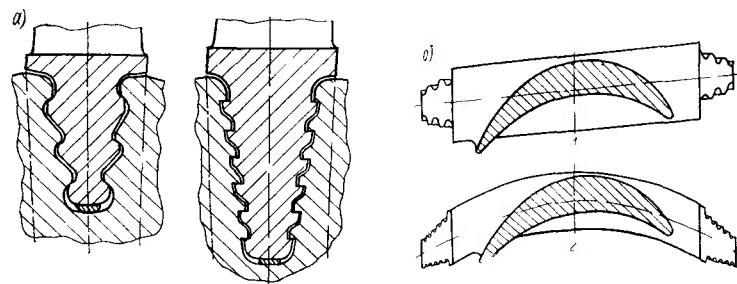


Рис. 1 14 Елочные торцевые хвостовые соединения (а) и елочные торцевые хвосты (б):

1 — хвост косой, 2 — хвост с круговой заводкой

зубьев, как правило, от двух до шести. Опыт проектирования показывает, что применение хвостов с малым числом зубьев позволяет более равномерно распределить нагрузку по зубьям и выполнить достаточно большие радиусы скругления, сведя тем самым к минимуму концентрацию напряжений

В зависимости от формы профиля корневого сечения лопатки елочные торцевые хвосты могут выполняться прямыми (ось хвоста перпендикулярна плоскости диска), косыми (ось хвоста составляет некоторый угол, не равный 90° , с плоскостью диска) и по дуге окружности (рис. 1.14, б). Выбором того или иного вида хвоста добиваются отсутствия свеса кромок корневого сечения. Свисающие кромки затрудняют заводку лопаток в диск и, главное, снижают усталостную прочность корневой части лопатки. Конструкция елочного торцевого соединения допускает качание лопатки после заводки ее в паз диска. Это создает трудности при установке связей, особенно паяных, и не позволяет определить статические вибрационные характеристики облопаченного диска. Для устранения этого качания с нижнего торца хвоста может производиться подклинка лопаток. Эти же клинья служат одновременно и стопорами, которые фиксируют лопатки от смещения в осевом направле-

нии. Подклинка лопаток необходима еще и по другим соображениям. В случае обрыва одной из лопаток будет нарушено равновесие сил, действующих на выступ диска, что приведет к возникновению изгибающего момента. При большой центробежной силе лопатки величина этого момента может оказаться чрезвычайно большой и вызвать остаточные изгибные деформации выступа. Наличие подклинки позволит избежать возможного недопустимого изгиба выступа в такой аварийной ситуации

Недостатком елочного торцевого соединения является большая зависимость его работоспособности от технологических отклонений при изготовлении. Отступления от назначенных в чертеже допусков могут привести к значительному снижению работоспособности этого соединения. Для достижения необходимой точности все зубья хвоста лопатки одновременно фрезеруются профильной фрезой после предварительной обработки или протачиваются профильной гребенкой. Пазы в диске также обрабатываются профильными фрезами с одновременной проточкой всех зубьев

В паровых турбинах находят также применение хвосты елочного профиля, но с тангенциальной заводкой в паз диска — зубчиковые хвосты. Характер работы таких хвостовых соединений и конструкция замка близки к Т-образному соединению. Их недостатком также является наличие изгиба в щечках диска.

Перечисленные выше типы хвостовых соединений не охватывают, естественно, всего многообразия конструкций, применяемых в турбостроении. Известны, например, способы приварки лопаток к диску [173] и т. д. Трудно утверждать, что тот или иной тип хвостового соединения имеет решающие преимущества перед другими. Разными заводами изготавливаются турбины больших мощностей, причем каждый из них применяет освоенные им типы хвостов. Правильно выбранные размеры хвостового соединения с учетом условий эксплуатации, а также высокое качество изготовления будут гарантировать его достаточную надежность

Связи. Рабочие лопатки паровых турбин, как правило, соединяются в пакеты связями различной конструкции: бандажами, приклепанными к лопаткам или выполненными в виде полок (цельнофрезерованный бандаж); проволоками, припаянными к лопаткам или свободно вставленным в отверстия в профильной части лопаток и прижимающимися к ним центробежными силами (демпферные связи); с помощью специальных выступов, свариваемых друг с другом после сборки лопаток и т. д.

Ленточный бандаж устанавливается обычно на лопатках небольшой длины (лопатки высокого и частично среднего и низкого давления) и связывает в пакеты по 4—10 лопаток. Бандаж, с одной стороны, уменьшает радиальные и осевые протечки пара в рабочем колесе и способствует лучшей организации потока, а с другой — повышает вибрационную надежность рабочих лопаток. Поперечные сечения ленточных бандажей имеют весьма разнообразные формы — плоские или ступенчатые с осевым уплотнительным

усиком (рис. I.15, а), сложные с уплотнительными осевыми и радиальными усиками (рис. I.15, б и в).

Ленточный бандаж крепится к лопаткам расклепкой шипов, которые имеют прямоугольное, круглое сечение или сечение, вписанное в профиль лопатки (профильные шипы). Если профиль лопатки в периферийных сечениях относительно тонкий, то у основания шипа выполняют утолщение профиля со стороны спинки

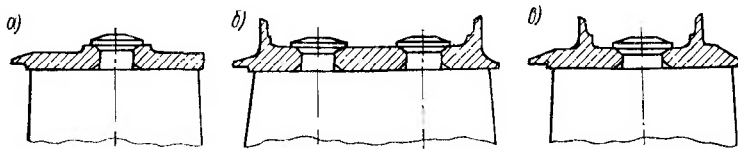


Рис. I.15. Поперечные сечения ленточных бандажей

или с двух сторон. Отверстия в бандажной ленте под шипы пробивают после разметки по лопаткам, установленным в диск, чтобы учесть возможные отклонения в шагах лопаток. В каждом отверстии выполняется фаска, которая заполняется металлом расклепываемого шипа.

С увеличением единичной мощности турбин существенно возрастают габаритные размеры лопаток, в частности ширина профиля. Установка ленточного клепаного бандажа на такие лопатки становится невозможной из-за возникновения в бандаже и

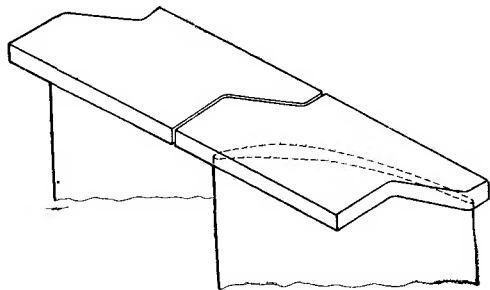


Рис. I.16. Цельнофрезерованный бандаж

шипах недопустимо высоких напряжений. В этом случае бандаж выполняют цельнофрезерованным заодно с лопаткой (рис. I.16). Поверх бандажа могут быть предусмотрены шипы, с помощью которых приклепывается накладной ленточный бандаж облегченной конструкции для объединения лопаток в пакеты. Объединение лопаток в пакеты может быть выполнено также с помощью сварки. Лопатки по четыре-пять штук свариваются по тангенциальным плоскостям хвоста и по бандажу. Сварка лопаток может проводиться с помощью электронного луча (электронно-лучевая сварка), что обеспечивает высокое качество сварного шва и относительно малые поводки пакета.

Особенно широко сварные пакеты применяются в регулирующих ступенях с парциальным подводом пара. Здесь сваркой в пакеты достигается также снижение изгибных динамических напряжений в хвостах. Лопатки свариваются в пакеты по две-три штуки (рис. I.17). В турбинах большой мощности сварные пакеты часто объединяют в единый пакет накладным бандажом. Объединение лопаток в единый пакет, замкнутый на круг, может быть достигнуто также установкой демпферной связи, которая может быть выполнена, например, в виде полосы трапецеидального сечения и вставлена в паз, проточенный в цельнофрезерованном бандаже.



Рис. I.17. Сварной пакет лопаток регулирующей ступени турбины мощностью 800 МВт

Опыт эксплуатации показывает, что объединение всех лопаток ступени в единый пакет клепаным накладным бандажом создает весьма жесткую конструкцию, плохо воспринимающую температурные нагрузки. При длительной эксплуатации в бандажах такой конструкции могут появиться повреждения в виде трещин малоцикловой усталости. В этом случае конструкция с демпферной связью является более предпочтительной.



Рис. I.18. Цельнофрезерованный бандаж с зубом

На длинных лопатках последних ступеней цельнофрезерованный бандаж выполняется с «зубом» (рис. I.18). При упругой раскрутке лопаток, которая может достигать 10—12°, зубья соседних лопаток входят в контакт друг с другом, образуя замкнутую кольцевую связь. При этом одновременно устраняется раскрутка профиля, ухудшающая эффективность работы ступени. Следует отметить высокие демпфирующие свойства такого бандажа. Если раскрутка лопаток невелика и не обеспечивает необходимого контакта зубьев, то в пределах цельнофрезерованного бандажа могут быть выполнены специальные полости или канавки, в которые

устанавливаются различные по конструкции демпферные связи, например, в виде демпферных проволок [211; 212] (рис. 1.19). Паз для демпферных связей в бандажах может протачиваться после окончательной сборки диска или при установке лопаток в специальном приспособлении. При сборке сегменты проволок, объединяющие несколько лопаток, заводятся в паз и стопорятся.

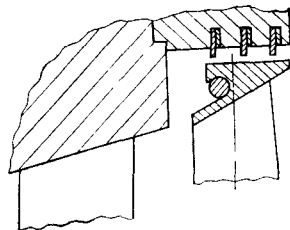


Рис. 1.19 Целнофрезерованный бандаж с расположенной в нем демпферной проволокой

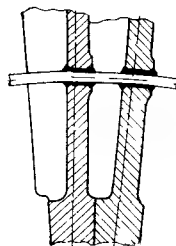


Рис. 1.20 Паяная проволочная связь

Для вибрационной настройки ступени и для исключения некоторых опасных форм колебаний применяются проволочные паяные или демпферные связи. Паяная проволочная связь (рис. 1.20) применяется для объединения лопаток в пакеты по пять—десять штук. Отверстия в лопатках выполняются на 0,3—0,5 мм больше диаметра проволоки. Сегменты проволоки припаиваются к лопаткам

серебряным припоем. В некоторых случаях при необходимости вибрационной настройки вместо сплошной проволоки могут применяться трубчатые сегменты, имеющие меньшую массу и поэтому менее напряженные и обеспечивающие, как правило, некоторое повышение частот собственных колебаний пакета лопаток.

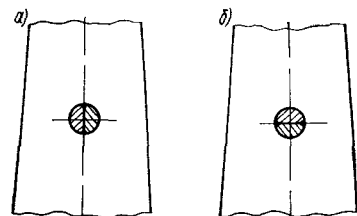


Рис. 1.21. Варианты установки сегментов демпферной проволоки

Проволочная связь может и не припаиваться к лопаткам, а работать как демпфер с прижатием к лопаткам собственной центробежной силой. Опыт эксплуатации показывает, что проскальзывание по всей поверхности контакта между проволокой и лопатками обычно отсутствует, а это устраняет практическую опасность износа контактирующих поверхностей. Широкое применение нашла конструкция демпферной связи, состоящей из двух сегментов полукруглого сечения (рис. 1.21). Сегменты такой проволоки с вертикальным или горизонтальным разъемом, в зависимости от их напряженности, вставляются в отверстия лопаток. При этом необходимо, чтобы при вращении ротора было обеспечено обяза-

тельное прижатие проволоки к лопаткам с учетом возможного технологического зазора. Только в этом случае демпферная связь будет выполнять свои функции.

Указанная конструкция демпферной связи обычно применяется для круговой перевязки лопаток. Для этого сегменты проволок сдвигаются относительно друг друга на половину длины и устанавливаются в шахматном порядке. Фиксация сегментов демпферной проволоки относительно лопаток может производиться отгибом их концов, выступающих из крайних лопаток, или наплавкой специальных стопорных «бобышек». Для уменьшения напряжений в проволочных связях их иногда выполняют ступенчатыми, с облегчением в середине пролета между лопатками, или переменного сечения по форме, близкой к балке равного сопротивления.

С целью уменьшения напряжений в сечении, ослабленном отверстием, на лопатке предусматривается утолщение профиля, которое чаще выполняется со стороны спинки, а в наиболее напряженных лопатках — с обеих сторон. Необходимо отметить, что установка проволочных связей в проточной части приводит к снижению экономичности ступени. Это следует иметь в виду при выборе конструкции связей и тщательно анализировать необходимость установки проволочных связей в проточной части.

1.2. КОНСТРУКЦИИ ТУРБИНЫХ РОТОРОВ И ДИСКОВ

По своим конструктивным особенностям роторы паровых турбин можно разделить на роторы цельнокованные (рис. 1.22),

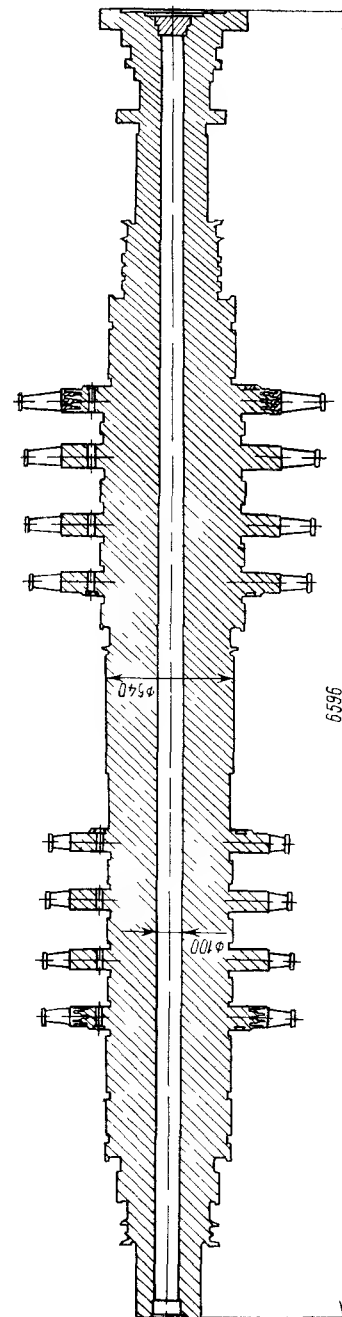


Рис. 1.22. Цельнокованный ротор

наборные с насадными дисками (рис. 1.23), комбинированные (рис. 1.24) и сварные (рис. 1.25) [35]. Применение той или иной конструкции связано с условиями работы ротора (температура, уровень напряжений), типа принятого облопачивания, возможности получения того или иного вида заготовок и т. д.

В части высокого и среднего давления паровых турбин применяются, как правило, цельнокованные роторы, у которых диски откованы за одно целое с валом (бочкой ротора). Диски на цельнокованных роторах обычно выполняются постоянной толщины или с небольшим коническим участком у основания. Такая возможность объясняется сравнительно небольшой центробежной силой рабочих лопаток. На бочке ротора нарезаются канавки для диафрагменных и концевых лабиринтовых уплотнений. Цельнокованные роторы, с одной стороны, отличаются относительно простой технологией механической обработки и сборки, а с другой, — довольно сложным производством поковок. К металлургическому производству поковок роторов предъявляются очень высокие требования как по обеспечению необходимого комплекса механических свойств, так и по загрязненности металла вредными примесями и наличию дефектов металлургического характера. Для поковок роторов применяется только кислая мартеновская сталь или электросталь с вакуумированием слитка. При ковке сверху и снизу слитка удаляется наиболее загрязненная прибыльная часть. Кроме того, поковки для цельнокованных роторов, как правило, выполняются с центральной расточкой диаметром до 140 мм, что также обусловлено необходимостью удаления наиболее загрязненной ее части. Поковки подвергаются тщательному ультразвуковому и другим видам контроля, а наличие центрального отверстия позволяет осуществить дополнительный перископический контроль ее внутренней части. В настоящее время отечественной металлургической промышленностью для цельнокованных роторов высокого и среднего давления изготавливаются поковки из слитков массой более 100 т. Цельнокованные роторы обладают компактностью конструкции и позволяют получить минимальные габаритные размеры проточной части в осевом направлении.

Роторы с насадными дисками обычно применяются в части низкого давления, где температура пара относительно невелика и отсутствует опасность в ослаблении посадки дисков на вал. Основной деталью такого ротора являются диски, состоящие из ступицы, в которой выполнено центральное отверстие для посадки на вал и центровки, средней части (полотна) и обода, в котором крепятся лопатки. В современных паровых турбинах большой мощности средняя часть дисков выполняется или постоянной толщины, или конической. Более сложные профили дисков, как правило, не применяются. В качестве примера на рис. 1.26 представлены диски последних ступеней некоторых турбин большой мощности.

Для обеспечения нормальной работы ротора и для передачи крутящего момента диски насаживаются на вал с натягом, который

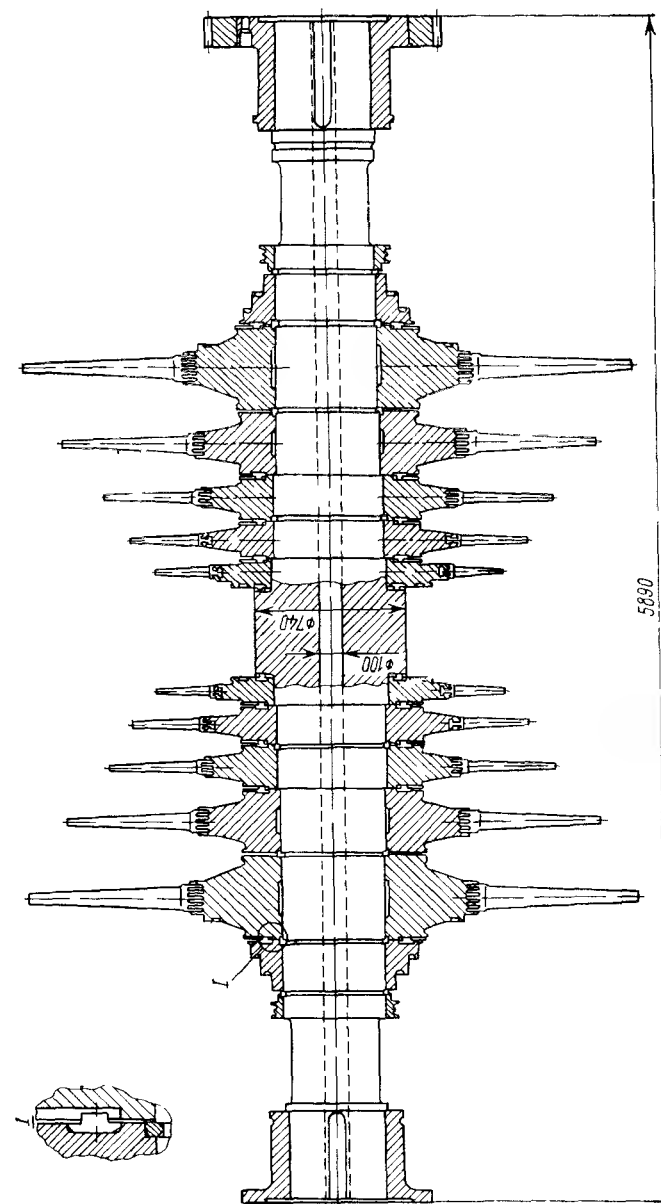


Рис. 1.23 Ротор с насадными дисками

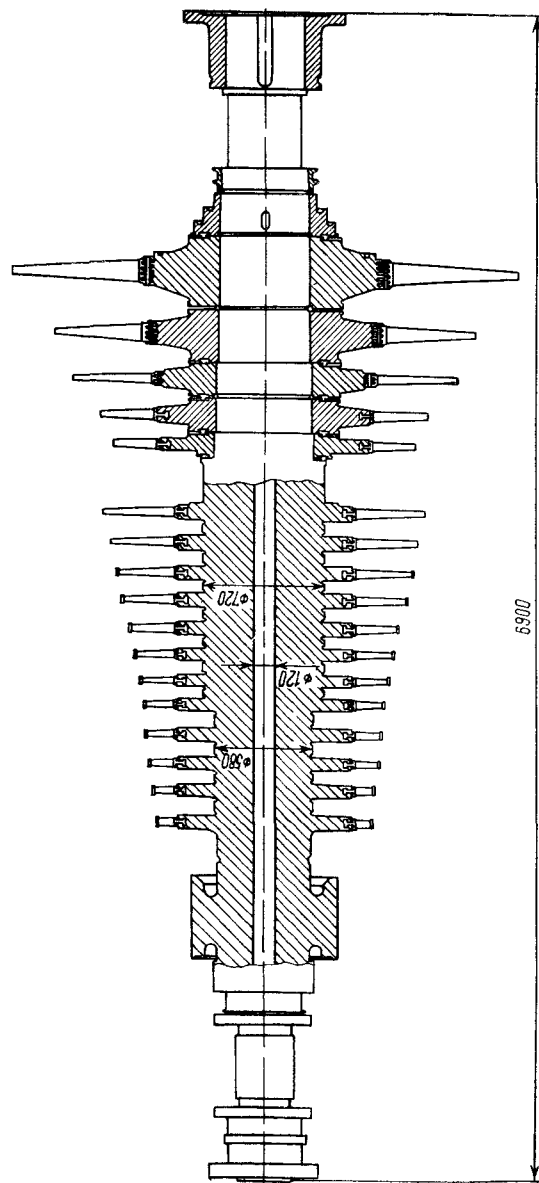


Рис. I.24. Комбинированный ротор

осуществляется выполнением диаметра центрального отверстия диска несколько меньшим посадочного диаметра вала. Величина

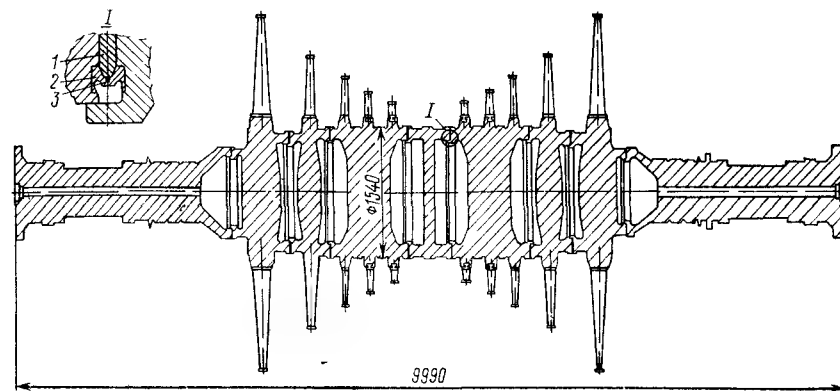


Рис. I.25 Сварной ротор:

1 — основной шов, 2 — мягкая наплавка, 3 — корневой шов

натяга выбирается расчетом из тех соображений, чтобы, с одной стороны, его верхний предел не вызвал бы в диске чрезмерно высоких напряжений от посадки, а с другой — чтобы нижний предел обеспечивал необходимую плотность посадки при разгонной частоте вращения турбины (примерно на 10—15% выше номинальной частоты).

Посадка дисков на вал осуществляется в горячем состоянии при их нагреве до температуры 200—300° С. При посадке положение дисков фиксируется на валу в осевом и окружном направлениях. Осевое положение диска определяется либо выступом вала, либо специальным упорным кольцом, установленным на валу. В окружном направлении положение диска фиксируется осевой или радиальной шпонками (рис. I.23). При посадке диска на вал с натягом между диском и валом создаются контактные усилия,

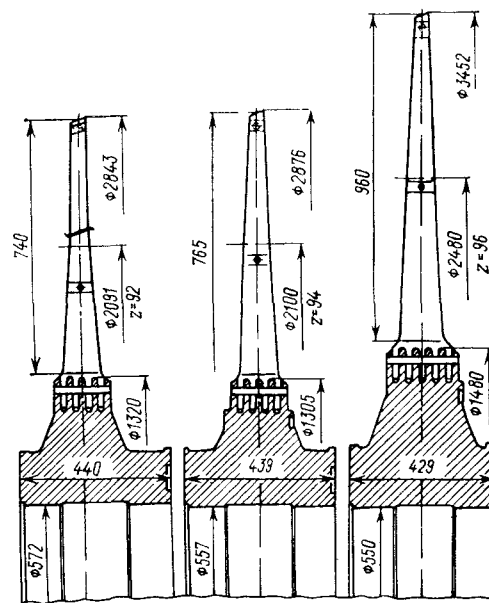


Рис. I.26 Диски последних ступеней мощных паровых турбин

сохраняющиеся и во время работы турбины. Эти контактные усилия приводят к возникновению сил трения, обычно достаточных для передачи крутящего момента от диска к валу и для предотвращения его осевого сдвига. В случае исчезновения натяга по тем или иным причинам или его сильного уменьшения передача крутящего момента будет осуществляться через шпонки. Осевые шпонки применяются только в малонагруженных дисках, так как они создают в наиболее напряженном месте диска (поверхность центральной расточки) значительную концентрацию напряжений. Известны случаи надрыва дисков в углу шпоночного паза только при их посадке на вал с натягом. В высоконагруженных дисках применяются радиальные шпонки, устанавливаемые на торце диска. Радиальными шпонками диск соединяется или с соседним диском, или с малонагруженной специальной втулкой, которая связана с валом осевой шпонкой. В качестве таких втулок могут использоваться насадные уплотнительные втулки.

По сравнению с цельноковаными роторами роторы с насадными дисками отличаются большой трудоемкостью и сложностью технологии изготовления и сборки. Однако они более просты в металлургическом отношении при изготовлении поковок вала и дисков. Ввиду меньших габаритных размеров и массы, качество этих поковок может быть обеспечено значительно более высоким.

В части среднего давления иногда могут применяться комбинированные роторы, у которых ряд дисков, работающих при высокой температуре, откованы заодно с валом, а диски, работающие при относительно низкой температуре, посажены на этот вал с натягом. Комбинированные роторы применяются в том случае, если нет возможности получить крупную поковку для цельнокованого ротора или механические свойства жаропрочной стали недостаточно высоки, чтобы обеспечить прочность более нагруженных дисков последних ступеней.

Проектирование роторов низкого давления для турбин большой мощности показало, что в настоящее время для освоенных марок сталей уровень напряжений в дисках достигает своей предельной величины при использовании лопаток последних ступеней длиной порядка 1000—1100 мм. Использование более длинных лопаток требует применения конструкции ротора, обладающего большей несущей способностью. Такой конструкцией является сварной ротор. Сварной ротор состоит из отдельно откованных дисков и двух хвостовиков, сваренных между собой по перемычкам, представляющих короткие цилиндрические оболочки. Диски сварного ротора отковываются без центрального отверстия, что примерно в два раза снижает в них уровень максимальных напряжений в центральной части. Полотно диска выполняют, по возможности, в форме, близкой к диску равного сопротивления, обладающего наибольшей несущей способностью. Для металлургического производства сварной ротор более технологичен, так как при изготовлении отдельных дисков и хвостовиков, имеющих

сравнительно небольшие габаритные размеры и массу, можно обеспечить более высокое качество поковок. Заметим, что для наиболее ответственных сварных роторов турбин большой мощности диски и хвостовики изготавливаются из стали специальной выплавки (ЭШП — электрошлаковый переплав или ВДП — вакуумно-дуговой переплав). Применение такой стали существенно снижает загрязненность металла вредными примесями и повышает его пластические свойства.

Весьма важным моментом при производстве сварных роторов является обеспечение высокого качества сварных швов. Качество сварного шва зависит от его конструкции, рациональной технологии сварки и правильной термической обработки. Возможные непровары, особенно в корне шва, являющиеся концентраторами напряжений, резко снижают несущую способность сварного ротора. Сборка ротора под сварку может производиться в вертикальном или горизонтальном положении в специальном приспособлении. Центровка деталей достигается с помощью посадочных поясков (рис. 1.25). При этом прямолинейность оси ротора должна быть обеспечена с высокой точностью. Биение ротора не должно превышать 0,5 мм.

Для снижения чувствительности к концентрации напряжений в корне шва, на дисках и хвостовиках производится наплавка «мягкой» прослойки аустенитными электродами. После аргонодуговой сварки корня шва производится автоматическая сварка основного шва под слоем флюса в узкощелевую разделку. Сварка производится с индукционным подогревом. Качество шва проверяется ультразвуковым контролем и гамма-контролем. Кроме того, наружная поверхность сварного шва проверяется травлением.

Длительный опыт эксплуатации сварных роторов, в частности, в турбинах Харьковского турбинного завода подтвердил их высокую надежность. Однако при всех своих достоинствах сварные роторы отличаются сложной технологией изготовления, являются весьма трудоемкими, с длительным циклом производства. Кроме того, важным недостатком сварных роторов является относительно низкий уровень прочности стали. Повысить его (для освоенных марок сталей) из-за наличия сварки с последующим отпускком не представляется возможным. Более перспективными в этом отношении для турбин большой мощности являются роторы цельнокованные. Однако изготовление таких роторов в настоящее время представляет значительные трудности для металлургической промышленности. Так, например, для ротора низкого давления турбины мощностью 1200 МВт с корневым диаметром 1800 мм требуется слиток массой 250—300 т. Для обеспечения прочности такого ротора (при наличии центральной расточки) необходима сталь с пределом текучести на уровне 800 МПа и с минимальным размером дефектов. При изготовлении подобного ротора без центральной расточки уровень прочности стали может быть снижен до 600 МПа и вместе с тем увеличен максимально допустимый

размер дефектов (см. п. I 3). Однако в этом случае возникают существенные трудности, связанные с получением высокого качества металла в центральной части поковки. Решению этой проблемы будут способствовать разрабатываемые новые методы выплавки стали с применением внепечного вакуумирования и углеродного раскисления.

Наряду с указанными конструкциями роторов в паровых турбинах находят также применение барабанные роторы, состоящие из пустотелой центральной части с приваренными хвостовиками. Роторы этого типа, как правило, малонагруженные и применяются в тихоходных турбинах ($n = 1500$ об/мин).

1.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ СВОЙСТВ ПРИМЕНЯЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ

В связи с широким диапазоном температур и нагрузок, при которых работают лопатки и диски паровых турбин, необходимо иметь большой набор высокопрочных и жаропрочных сталей и сплавов, обладающих хорошими технологическими свойствами.

Высокий уровень напряженности и значительные размеры роторов и дисков современных паровых турбин определяют строгие требования, предъявляемые к применяемым маркам сталей, которые должны обеспечивать получение заданного комплекса свойств по всему объему заготовок и давать возможность изготовления крупных поковок без существенных металлургических дефектов. Строгие требования предъявляются и к металлу, а также к производству заготовок рабочих лопаток. С целью улучшения качества металла заготовок для лопаток в настоящее время используются стали специальной выплавки — электрошлаковый переплав (ЭШП) или вакуумно-дуговой переплав (ВДП), — обеспечивающие низкое содержание вредных примесей (сера, фосфор) и резкое уменьшение дефектов металлургического характера, в частности волосовин.

Механические свойства лопаточных и дисковых (роторных) сталей или сплавов определяются известными характеристиками прочности и пластичности, пределом текучести σ_T или условным пределом текучести $\sigma_{0,2}$, пределом прочности σ_B , относительным удлинением δ и относительным сужением ψ , которые получают при одноосном растяжении стандартных образцов в условиях нормальной (20°C) или рабочей температуры [75]. Дополнительно к этим характеристикам определяют ударную вязкость a_K , связанную с величиной удельной работы разрушения материала, а также угол загиба, на который изгибают специальный образец до появления первой трещины на растягиваемой стороне.

Для ударных испытаний используются прямоугольные стандартные образцы с концентратором в виде U-образного (образец Менаже) или V-образного (образец Шарпи) надрезов. Испытания на загиб производятся также на стандартных образцах в виде полосы сечением 10×20 мм и длиной $150\text{—}200$ мм [75].

Весьма важной характеристикой для контроля механических свойств материала, в частности лопаток, является твердость. Широкое распространение получили методы определения твердости по Бринелю HB , Виккерсу HV и Роквеллу HRC . Как контрольная характеристика величина твердости имеет приближенную корреляционную зависимость с пределом прочности (МПа). Эта зависимость имеет вид

$$\sigma_B \propto HB$$

Для углеродистых и малолегированных сталей коэффициент α равен примерно 3,5 [75]. Это значение коэффициента α используется и для турбинных лопаточных и роторных сталей.

Указанные механические характеристики регламентируются техническими условиями на изготовление заготовок дисков, роторов и лопаток и определяются индивидуально для каждой заготовки диска или ротора и для каждой партии заготовок лопаток. Однако эти характеристики не исчерпывают всего комплекса свойств, необходимых для обеспечения работоспособности ответственных деталей паровых турбин.

Стали и сплавы для дисков, роторов и лопаток должны обладать высокой способностью сопротивляться хрупкому и усталостному разрушениям, иметь необходимую жаропрочность, хорошо сопротивляться коррозии и эрозии при работе в паровой среде. Кроме того, весьма желательно, чтобы лопаточные материалы имели относительно высокую демпфирующую способность. Остановимся на некоторых из этих свойств подробнее.

Сопротивление хрупкому разрушению [80; 157]. Случаи внезапного разрушения ответственных конструкций, в частности турбинных дисков и роторов, происшедшие при сравнительно невысоких расчетных напряжениях, выявили необходимость в более глубоком подходе к анализу прочности конструкций с привлечением дополнительных критериев оценки работоспособности материала как в стационарных, так и в нестационарных условиях.

Классические представления о наступлении разрушения при достижении некоторого критического напряжения материала (например, сопротивления отрыву или сдвигу) в ряде случаев являются недостаточными. Разрушение одного и того же материала в зависимости от ряда факторов может быть как вязким, так и хрупким. Вязкое разрушение сопровождается существенными пластическими деформациями и проходит по определенным кристаллографическим плоскостям (плоскостям сдвига). Излом при этом имеет мелкозернистую матовую структуру, которую называют волокнистой. Хрупкое разрушение происходит без заметной пластической деформации путем отрыва по главным кристаллографическим плоскостям. В этом случае место излома имеет четко выраженную кристаллическую, с металлическим блеском структуру. Ввиду того что хрупкое разрушение происходит практически без предварительного пластического деформирования конст-

рукции при сравнительно невысоких расчетных напряжениях и наступает внезапно, оно является наиболее опасным. Для исключения таких разрушений возникает необходимость в исследовании реальной прочности конструкции с учетом возможных дефектов в материале и с учетом способности материала сопротивляться росту этих дефектов.

В зависимости от внешних условий (температуры, скорости нагружения) один и тот же материал может вести себя как хрупкий или как пластичный. Если провести ударные испытания для одного и того же материала при разных температурах и построить зависимость величины ударной вязкости от температуры, то можно заметить, что в некотором относительно узком температурном интервале ударная вязкость резко уменьшается при снижении температуры. При высоких значениях ударной вязкости излом образца имеет вязкий характер, при самых низких — хрупкий. На промежуточном участке резкого падения ударной вязкости наблюдается смешанное квазихрупкое разрушение с различными долями вязкого и хрупкого разрушения в изломе.

Температурный интервал, в котором происходит перегиб кривой a_n — T , называют критическим интервалом хрупкости. Если температура испытаний выше критического интервала, то сопротивление отрыву больше, чем сопротивление сдвигу и разрушение будет вязким. Если, наоборот, температура испытаний ниже критического интервала, то сопротивление сдвигу больше, чем сопротивление отрыву, и разрушение будет хрупким.

Основополагающие идеи в исследовании переходного состояния материалов из вязкого состояния в хрупкое были развиты Н. Н. Давиденковым. Им были предложены методы определения критического интервала и изучено влияние на него различных факторов. Для определения критического температурного интервала проводятся ударные испытания образцов с U-образным или V-образным надрезом. Использование образцов с концентраторами напряжений дает возможность создать в месте начала разрушения объемное напряженное состояние, которое затрудняет пластическое деформирование и в большей степени выявляет склонность материала к хрупкому разрушению.

При исследовании материалов в более жестких условиях проводятся ударные или статические изгибные испытания образцов с инициированной усталостной трещиной.

Для практической оценки границы переходного состояния вводится понятие о критической (переходной) температуре или о пороге хладноломкости. Чтобы однозначно назвать значение критической температуры, необходимо принять какой-либо условный критерий. В настоящее время широкое распространение получили критерии определения критической температуры по значению ударной вязкости, равной $a_n = 30 \text{ Дж/см}^2$, или по процентному содержанию доли вязкого разрушения в изломе образца, равной 50%. В качестве примера на рис. 1.27 приведены резуль-

таты ударных испытаний для стали 15X12ВНМФ, полученные на образцах с U-образным надрезом. Представленные кривые дают зависимости ударной вязкости и процентного содержания доли вязкого разрушения в изломе от температуры испытаний. С использованием указанных выше критериев значения критической температуры получаются равными соответственно $(-80) - (-50)^\circ\text{C}$ и $(-15) - (+20)^\circ\text{C}$. Видно, что два использованных критерия дают существенные разные значения критической температуры [197]. Указанные критерии не являются и не могут быть единственными для всех возможных видов испытаний. Так, при испытаниях образцов с инициированной трещиной часто критическую температуру определяют по значению ударной вязкости, равной $a_{n\text{кр}} = 20 \text{ Дж/см}^2$, или при наличии доли вязкого разрушения в изломе, равной 25%. Результаты таких испытаний и принятые критерии дали бы другие значения критической температуры, отличные от вышеуказанных, т. е. критическая температура является величиной условной, зависящей от критерия, по которому она определяется.

Как уже упоминалось, с увеличением концентрации напряжений более отчетливо проявляется влияние объемного напряженного состояния на переход от вязкого разрушения к хрупкому. Это находит свое отражение и на величине критической температуры: с увеличением концентрации напряжений критическая температура будет повышаться. Поэтому критическая температура, определенная при испытаниях образцов с U-образным надрезом, будет несколько ниже, чем при испытаниях образцов с V-образным надрезом, и значительно более низкой по сравнению с температурой, определенной при испытаниях образцов с инициированной усталостной трещиной. Таким образом, понятие критической температуры хрупкости не может быть использовано для количественной оценки реальной прочности конструкции.

Количественную оценку опасности хрупкого разрушения дают методы линейной механики разрушения. В основе линейной механики разрушения лежит гипотеза Гриффитса (1920 г.), согласно которой низкая реальная прочность хрупких материалов объясняется наличием в материале несовершенств в виде трещин, приводящих к значительной концентрации напряжений. Разрушение,

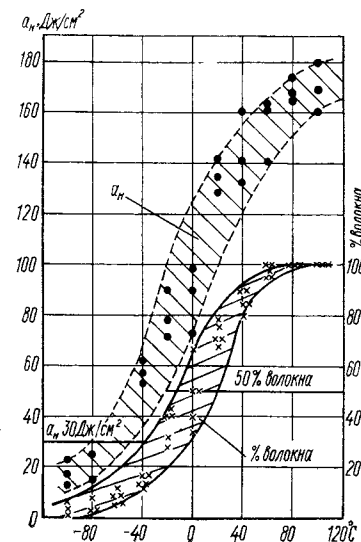


Рис. 1.27. Критический интервал хрупкости стали 15X12ВНМФ ($\sigma_{0,2} = 600 \div 640 \text{ МПа}$)

по Гриффитсу, является следствием развития трещин или дефектов материала. Гриффитс показал, что для продвижения (подрастания) трещины необходимо преодолеть некоторый энергетический барьер, которым является энергия, необходимая для образования свободной поверхности при росте трещины. В энергетическом уравнении Гриффитса условие разрушения определяется равенством энергии, затраченной на образование свободной поверхности, т. е. на подрастание трещины, изменению (уменьшению) потенциальной энергии напряженного упругого тела. При этом для разрушения не требуется дополнительного увеличения нагрузки, и трещина распространяется практически мгновенно. Гипотеза Гриффитса хорошо подтверждалась при разрушении хрупких материалов (стекло и пр.). Однако при разрушении материалов хотя бы с ограниченной пластической деформацией наблюдались большие количественные отклонения. Эти отклонения, как заметили Ирвин и Орован (1952 г.), связаны с тем, что Гриффитс не принимал во внимание образование в вершине трещины пластической зоны, достаточно малой по сравнению с размером трещины. В этом случае для продвижения трещины помимо преодоления энергетического барьера, на который указал Гриффитс, необходимо затратить дополнительную работу на пластическое деформирование материала. Эта работа значительно превышает (на два-три порядка) энергию, необходимую для образования свободной поверхности при росте трещины по Гриффитсу. Величина этой работы по существу и определяет трещиностойкость материала.

Если принять во внимание, что пластическое деформирование происходит в относительно тонком слое, малом как по сравнению с размерами деформируемого упругого тела, так и по сравнению с длиной трещины, то применение энергетического уравнения Гриффитса можно расширить. Однако в этом случае в качестве энергии, необходимой для образования свободной поверхности, следует принять эффективную энергию разрушения, включающую работу пластического деформирования. Тогда схема Гриффитса охватывает также и хрупко-вязкие разрушения металлов. Изучение напряженного состояния вблизи вершины трещины с применением методов линейной теории упругости привело к выражениям для компонент напряжений, имеющим следующую структуру:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \text{конечные члены}, \quad (1.1)$$

где r и θ — локальная система полярных координат с началом в вершине трещины; K — постоянный коэффициент (Н/мм^{3/2}), зависящий от вида напряженного состояния, величины действующих номинальных напряжений, характерного размера дефекта и его формы.

Этот коэффициент, называемый коэффициентом интенсивности напряжений, в случае растяжения (растягивающие напряжения

действуют перпендикулярно плоскости трещины, рис. 1.28, а)

$$K = K_1 = \sigma \sqrt{Ml};$$

при поперечном сдвиге (напряжения сдвига действуют перпендикулярно фронту трещины, рис. 1.28, б):

$$K = K_2 = \tau_{zx} \sqrt{Ml};$$

при продольном сдвиге (напряжения сдвига действуют параллельно фронту трещины, рис. 1.28, в):

$$K = K_3 = \tau_{zy} \sqrt{Ml}.$$

Здесь параметр M определяет форму трещины.

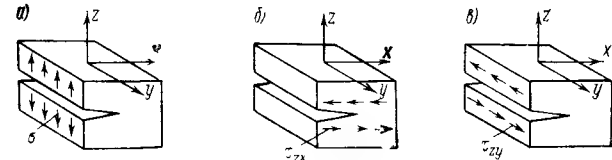


Рис. 1.28. Виды напряженного состояния вблизи трещины

Поскольку первый вид напряженного состояния является наиболее опасным для раскрытия трещины, его считают основным. В дальнейшем будем рассматривать только этот вид напряженного состояния.

Выражения (1.1) в вершине трещины имеют особенность вида $1/\sqrt{r}$, что лишает их физического смысла при $r \rightarrow 0$. Однако с учетом того, что зона пластического деформирования мала по сравнению с длиной трещины, полученное решение позволяет связать энергию, поглощаемую при образовании свободной поверхности, с потенциальной энергией напряженного упругого тела, а конкретнее, связать эффективную энергию разрушения с характеристикой напряженного состояния — коэффициентом интенсивности напряжений K_1 . Момент наступления спонтанного развития трещины, т. е. хрупкого разрушения, называют критическим состоянием. В этом состоянии коэффициент интенсивности напряжений достигает своего критического значения, которое обозначается K_{1c} . Критических значений достигают действующие номинальные напряжения $\sigma_{кр}$ и длина трещины $l_{кр}$. Для критического состояния

$$K_{1c} = \sigma_{кр} \sqrt{Ml_{кр}}. \quad (1.2)$$

Таким образом, критическое, нестабильное состояние роста трещины может характеризоваться критическим значением коэффициента интенсивности напряжений. Критическое значение коэффициента интенсивности напряжений K_{1c} является константой материала и зависит от свойств материала, его структуры, а также от

внешних условий (температура, скорость деформации). Величина этого параметра определяется экспериментально, путем испытания специальных образцов с инициированной трещиной [75]. Заметим, что начальное развитие трещины, в докритическом состоянии, протекает стабильно в процессе возрастания статической нагрузки (номинальных напряжений). При достижении критического состояния развитие трещины уже не требует подвода энергии извне, а протекает за счет освобождающейся потенциальной энергии упругой деформации тела

В соответствии с зависимостью (I 2) при заданном размере дефекта можно вычислить критическое значение номинального напряжения

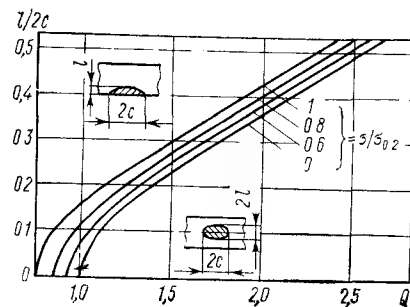


Рис I 29 Кривые для определения параметра формы поверхностных и внутренних дефектов

Параметр M для элементов конструкций толщиной более 50 мм (указанная толщина определена размерами стандартных образцов при нахождении параметра K_{1c}) с внутренним круглым дефектом равен [121]

$$M = 4/\pi,$$

а для внутреннего дефекта в форме эллипса с малой и большой полуосями l и c , а также для поверхностного полуэллиптического дефекта глубиной l и длиной $2c$

$$M = 1,21\pi/Q,$$

где Q — параметр формы трещины, определяемый по графику рис I.29 при различных отношениях действующего напряжения к пределу текучести материала.

Таким образом, в соответствии с рассмотренной схемой хрупкого разрушения Ирвина—Гриффитса, для каждого материала существует критическое значение коэффициента интенсивности напряжений K_{1c} , характеризующего сопротивление возникновению хрупкого разрушения при наличии исходного дефекта. При достижении этого критического значения K_{1c} наступает неравновесное состояние трещины — и она распространяется практически мгновенно.

Условие прочности для хрупкого разрушения может быть пред-
ставлено, таким образом, в виде

$$K = \sigma \sqrt{Ml} < K_{1c}. \quad (I 3)$$

Это условие учитывает, с одной стороны, величину действующих напряжений, размер и форму дефекта, а с другой — свойства материала. Величина K_{1c} в значительной степени зависит от температуры, что необходимо учитывать при оценке опасности возникновения хрупкого разрушения.

Использование критического значения коэффициента интенсивности напряжений для оценки условий возникновения хрупкого разрушения предполагает образование в вершине трещины лишь малой пластической зоны. Однако для некоторых сталей или сплавов с высокой пластичностью началу разрушения может предшествовать развитая пластическая деформация в вершине трещины. В этом случае рассмотренная выше схема разрушения Гриффитса—Ирвина может дать существенные отклонения от действительных условий разрушения. Ввиду этого в качестве критерия нестабильного распространения трещины после пластической деформации принимается предельное расхождение берегов трещины в зоне у вершины — критическое раскрытие трещины δ_c . Это критическое раскрытие трещины принимается в качестве параметра вязкости материала и определяется экспериментально [75]. Оценка условий нестабильного распространения трещины с использованием представлений о критическом раскрытии трещины и корреляция этого раскрытия с другими параметрами вязкости материала к настоящему времени выяснены еще не окончательно.

Из вышеизложенного следует, что наиболее полное представление о сопротивляемости материала хрупкому разрушению дает параметр K_{1c} . Однако экспериментальное определение этого параметра требует изготовления специальных образцов и представляет существенные трудности. Определение параметра K_{1c} производится в основном при углубленных исследованиях, где необходима количественная оценка сопротивляемости материала конкретной конструкции хрупкому разрушению. Практически в качестве сравнительного параметра широко используется величина критической температуры хрупкости, определяемая по критерию 50% волокнистого строения в изломе образца. Наиболее объективные данные получаются при испытаниях образцов с V-образным надрезом, однако для таких испытаний используются и образцы с U-образным надрезом.

Принимая критическую температуру в качестве сравнительного параметра, укажем на некоторые факторы, существенно влияющие на сопротивляемость материала хрупкому разрушению. Критическая температура может иметь разные значения для одной и той же марки стали в зависимости от вида ее термической обработки. Действительно, изменением процесса термической обработки может варьироваться в значительной степени структурное

Марка стали	Закалочная среда	$\sigma_{0,2}$, МПа	$T_{кр}$ (°C) по критериям	
			$a_H = 30 \text{ Дж/см}^2$	50% волокна в изломе
30ХН3М2ФА	Масло Вода	740—830 670—790	—100 <—100	0—10 <—100
35ХН1М2ФА	Масло Вода	680—730 750—780	—80 —100	20 —70
34ХН3МА	Масло Вода	750—820 750—770	—80 —100	20—40 —70

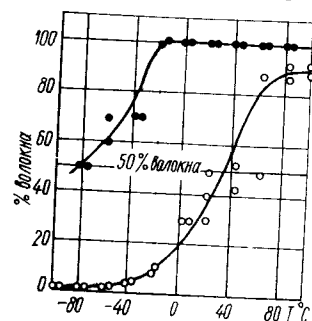


Рис. 1.30 Критическая температура стали 34ХНЗМ в зависимости от скорости охлаждения при закалке:
● — закалка в воду, ○ — закалка в масло

из стали Р2М (25Х1М1ФА) [155] позволило снизить критическую температуру на 40—60 °C при сопоставимых значениях прочности [198].

Существенного снижения критической температуры можно достигнуть также применением закалки с интенсифицированной скоростью охлаждения. Приведенные на рис. 1.30 кривые показывают, что критическая температура для хромоникельмолибденовой дисковой стали 34ХНЗМ [155] снизилась с +35 до —80 °C при переходе от закалки заготовок крупных дисков в масле к закалке в воде [161].

В табл. 1.2 приведены данные по критической температуре хрупкости для широко применяемых дисковых сталей в различных состояниях термической обработки [161]. Как видно, наибольшее снижение критической температуры достигается применением закалки с охлаждением в воде. Это указывает на то, что интенсификация скорости охлаждения при закалке заготовок дисков дает возможность повысить уровень прочностных свойств без увеличения склонности к хрупкому разрушению. Однако поддержание равномерного температурного поля и одинаковой скорости охлаждения по всему объему поковки, обеспечивающих

состояние стали, что оказывает влияние на сопротивляемость хрупкому разрушению. Этот факт представляется весьма важным при выборе режимов термической и термомеханической обработки заготовок лопаток, дисков и роторов. Так, в работе [197] показано, что перегрев металла при штамповке заготовок лопаток из стали 15Х12ВНМФ до температуры 1250—1270 °C вместо 1180—1200 °C приводит к ухудшенному структурному состоянию стали, существенно повышающему критическую температуру. Особую сложность вызывает назначение режима окончательной термической обработки и разработка технологии ее проведения для крупных заготовок цельнокованных роторов и дисков с целью получения необходимого комплекса прочностных, пластических и вязких свойств.

В настоящее время доказано, что снижение критической температуры может быть достигнуто повышением скорости охлаждения при термообработке или применением закалки. Однако заметим, что применение закалки, особенно для заготовок крупных роторов, связано с опасностью возникновения закалочных трещин и требует особой осторожности. Применение закалки вместо второй нормализации при термообработке заготовок крупных роторов

прокаливаемость металла по всему ее сечению, представляет значительные трудности. С этой целью для роторов с центральным отверстием применяют принудительную прокачку воды через этот центральный канал при одновременном погружении заготовки в закалочный бак. Более сложной является технология термообработки роторов без осевой расточки. В этом случае снижения критической температуры добиваются применением двойной закалки и выбором оптимального сочетания легирующих элементов.

Большое влияние на величину критической температуры при одинаковом типе термической обработки оказывает уровень прочностных свойств стали — предела текучести и предела прочности, определяемый температурой отпуска.

На рис. 1.31 представлены зависимости критической температуры от уровня предела текучести для высокохромистых лопаточных сталей 15Х11МФ и 15Х12ВНМФ, определенные по различным критериям по результатам ударных испытаний образцов Менаже (кривые 1 и 2) и образцов Шарпи с инициированной трещиной (кривые 3 и 4) [197]. Из рассмотрения приведенных кривых следует, что при повышении предела текучести для указанных сталей до 800—850 МПа критическая температура достигает рабочего диапазона температур лопаток последних ступеней и, следовательно, в этих условиях можно ожидать хрупкого разрушения,

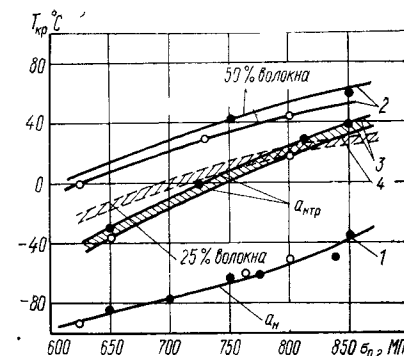
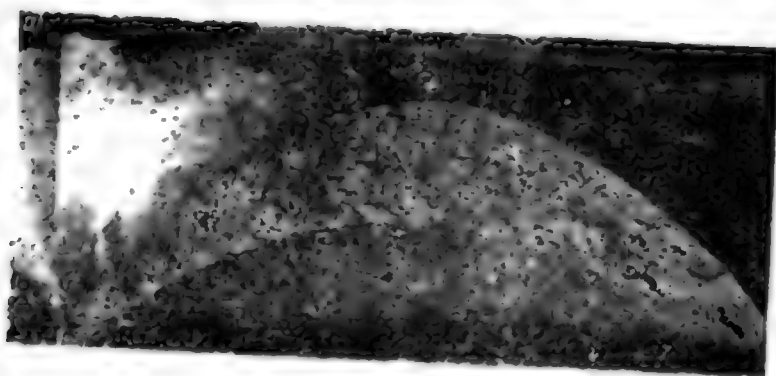


Рис. 1.31 Зависимость критической температуры от предела текучести для некоторых сталей:
○ — сталь 15Х11МФ, ● — сталь 15Х12ВНМФ

особенно при наличии возможных металлургических дефектов или начальных усталостных трещин. Опыт эксплуатации показывает, что хрупкое разрушение у лопаток последних ступеней, изготовленных из указанных сталей с пределом текучести 850–900 МПа, имеет место при появлении усталостной трещины, составляющей 5–10% от хорды профиля, в то время как при пределе текучести, равном 700–750 МПа, такое разрушение наступает при усталост-



б)

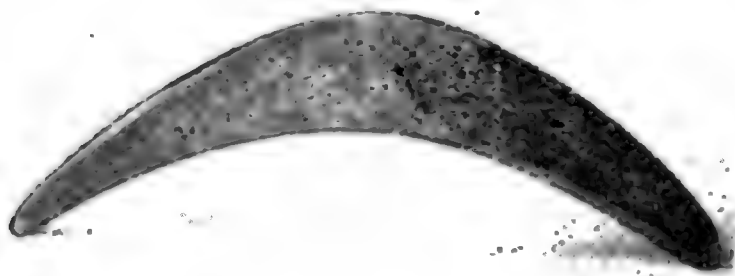


Рис. I 32 Разрушения лопаток из стали 15X11MF с различным уровнем прочностных свойств: а — $\sigma_{0,2} = 880 \div 930$ МПа, б — $\sigma_{0,2} = 740 \div 760$ МПа

ной трещине, составляющей 40–50% от хорды. Примеры подобных разрушений приведены на рис. I 32.

Аналогичное положение наблюдается для дисковых и роторных сталей. Здесь опасность хрупкого разрушения возрастает вследствие большей вероятности присутствия в поковках различных металлургических дефектов (неметаллических включений, закатов, флокенов и др.), которые являются резкими концентраторами напряжений. При этом необходимо учитывать масштабный фактор, в соответствии с которым критическая температура повышается с увеличением габаритных размеров поковки. На рис. I 33 при-

веден пример хрупкого разрушения крупного диска из стали 34XНЗМА с высоким уровнем предела текучести ($\sigma_{0,2} \approx 900$ МПа) [77].

Таким образом, повышение характеристик прочности стали без учета вязкости разрушения может дать формальное увеличение запаса прочности при одновременном повышении опасности хрупкого разрушения. С целью исключения этого положения в технических условиях на изготовление заготовок лопаток, дисков и роторов вводятся ограничения верхнего значения предела текучести. Так, например, для лопаток последних ступеней из высокохромистой стали 15X11MF верхнее значение предела текучести ограни-

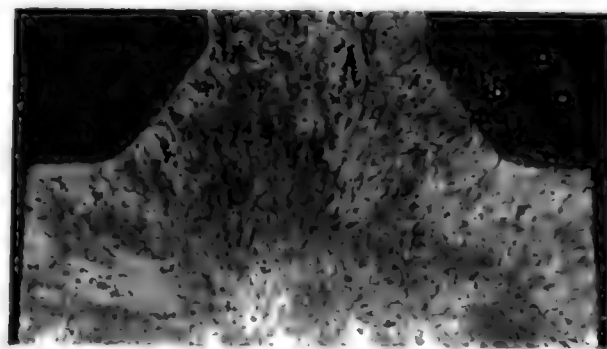


Рис. I 33. Хрупкое разрушение крупного диска из стали 34XНЗМА с высоким уровнем предела текучести ($\sigma_{0,2} \approx 900$ МПа)

чено численным значением 830 МПа, а для дисков из хромоникель-молибденовых сталей типа 34XНЗМ — численным значением 850 МПа.

При выборе материала для рабочих лопаток, дисков и роторов должен обеспечиваться температурный запас, равный разности между рабочей $T_{раб}$ и критической $T_{кр}$ температурой

$$\Delta T = T_{кр} - T_{раб}$$

Этот запас необходимо принимать не менее 20 °С при определении критической температуры на образцах с V-образным надрезом по критерию 50% вязкого разрушения в изломе.

Свойства жаропрочности [79, 116] Длительное действие относительно небольших напряжений при высокой температуре вызывает в металлах ползучесть¹. При нагружении образца постоянной нагрузкой его деформация с течением времени увеличи-

¹ Для некоторых сплавов, например сплавов на основе титана, явление ползучести проявляется и при нормальной температуре

вается до разрушения. Процесс ползучести можно разделить на три стадии. Первая стадия соответствует неустановившейся ползучести, с постепенно уменьшающейся скоростью нарастания деформации; вторая стадия, наиболее длительная, соответствует установившейся ползучести с минимальной и практически постоянной скоростью; третья стадия соответствует быстрому нарастанию скорости ползучести до разрушения образца. Явление ползучести существенно изменяет исходные свойства сталей и сплавов, определяемые при кратковременных испытаниях. Длительное действие нагрузок в таких условиях приводит к образованию в металле микротрещин, которые с течением времени разрастаются в макротрещины и приводят к разрушению. Прочность металлов при ползучести определяется характеристикой, называемой пределом длительной прочности.



Рис. 1.34 Логарифмическая зависимость длительной прочности стали Р2М от времени до разрушения при температуре 525 °С [155]

вызывающей разрушение этого образца через определенное время. В двойных логарифмических координатах зависимость предела длительной прочности от времени до разрушения прямолинейна¹ (рис. 1.34).

Временную базу (заданный промежуток времени), на которой определяют предел длительной прочности, выбирают исходя из срока эксплуатации детали. В стационарном турбостроении расчетный срок эксплуатации деталей, работающих при высокой температуре, условно принимается равным 100 тыс. ч. Безусловно, определить значение длительной прочности для всех применяемых материалов непосредственными испытаниями на такой временной базе практически невозможно. В настоящее время проведены отдельные испытания на длительную прочность некоторых широко применяемых марок сталей на базе 40—50 тыс. ч. Ввиду этого характеристики длительной прочности находят экстраполяцией результатов испытаний, полученных на базе 3—5 тыс. ч, реже 10—15 тыс. ч. Такую экстраполяцию позволяет произвести прямолинейность зависимости длительной прочности от времени до разрушения в двойных логарифмических координатах (рис. 1.34, штриховые линии).

¹ Следует иметь в виду, что для некоторых сталей указанная прямолинейная зависимость может иметь перелом на больших временных базах

Разрушение образца при испытаниях на длительную прочность может иметь вязкий внутрикристаллитный характер с большой деформацией ползучести или межзеренный характер разрушения, при котором деформация ползучести, как правило, невелика и такое разрушение можно назвать хрупким или квазихрупким. Для жаропрочных турбинных сталей вязкое разрушение обычно имеет место при относительно высоких напряжениях и соответственно небольших сроках до разрушения. Хрупкое или квазихрупкое разрушение, наоборот, имеет место при относительно низких напряжениях и большом времени до разрушения.

Большое значение для несущей способности стали, особенно при наличии концентраторов напряжений, имеет длительная пластичность, т. е. относительная деформация при длительном разрыве образца ($\delta_{дл}$). Нужно иметь в виду, что для некоторых сталей длительная пластичность на больших временных базах может составлять 1—2%, в то время как при кратковременном разрыве относительное удлинение могло быть равным 15—20%.

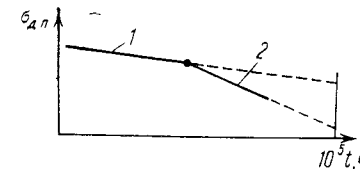


Рис. 1.35 Логарифмическая зависимость длительной прочности от времени до разрушения, имеющая перелом

Указанное падение пластичности связано с изменением характера разрушения материала, к чему приводит образование микротрещин по границам зерен, постепенное их разрастание и переход в макротрещины. Логарифмическая зависимость длительной прочности от времени до разрушения в этом случае будет иметь перелом (рис. 1.35). Если на участке 1 разрушение имело вязкий внутрикристаллитный характер, то на участке 2 оно будет межзеренным, близким к хрупкому или квазихрупкому. Переход от внутрикристаллитного разрушения к межзеренному происходит не сразу. Как правило, в окрестности точки перелома разрушение носит смешанный характер. На участке 2 логарифмической зависимости, где разрушение имеет межзеренный характер, снижение длительной прочности во времени будет более интенсивным. Здесь необходимо заметить, что погрешность экстраполяции характеристик длительной прочности на большие временные базы будет особенно велика для стали, у которой логарифмическая зависимость длительной прочности от времени до разрушения имеет перелом, не выявленный при испытаниях. При этом значения экстраполированного предела длительной прочности окажутся завышенными. Достоверность значений длительной прочности будет еще более сомнительной, если экстраполяцию проводить на ресурс, превышающий 100 тыс. ч (150—200 тыс. ч). Возможная в этом случае погрешность должна компенсироваться назначаемым запасом прочности конструкции.

Применяемые в турбостроении жаропрочные стали для лопаток и роторов имеют, как правило, высокие значения длитель-

ной прочности при относительно высокой длительной пластичности в рабочем диапазоне температур. Так, например, жаропрочная роторная сталь Р2М, длительная прочность которой при температуре 525 °С представлена на рис. 1.34, имеет длительную пластичность на базе 100 тыс. ч не менее 5–7% [198], что достаточно для обеспечения работоспособности роторов при больших сроках эксплуатации.

Способность стали сопротивляться ползучести определяется условной характеристикой — пределом ползучести. Пределом ползучести $\sigma_{\text{п}}$ при данной температуре называют напряжение, которое вызывает определенную величину остаточной деформации за установленное время. В стационарном отечественном турбостроении за такую величину принимают деформацию ползучести, составляющую 1% за 100 тыс. ч. Если скорость ползучести приближенно принять постоянной и равной ее минимальной величине на втором, установившемся участке кривой ползучести, то

$$\epsilon_c = \dot{\epsilon}_{c \min} t, \quad (1.4)$$

где ϵ_c — остаточная деформация ползучести за время t , $\dot{\epsilon}_{c \min}$ — постоянная минимальная скорость ползучести.

Из этого уравнения можно найти минимальную скорость ползучести, при которой деформация, накопленная за заданный промежуток времени, будет равна заданной величине. Для принятой величины остаточной деформации, составляющей 1% за 100 тыс. ч, минимальная скорость ползучести должна быть равна $10^{-5}\%/ч$. В таком случае пределу ползучести можно дать другое определение. Пределом ползучести называют напряжение, которое вызывает определенную скорость ползучести при данной температуре. Учитывая, что равенство (1.4) будет иметь тем меньшую погрешность, чем больше временная база, второе определение предела ползучести можно применять для деталей с длительным сроком эксплуатации. Его, в частности, с достаточной точностью можно использовать при определении предела ползучести деталей стационарных паровых турбин.

Характеристики жаропрочности ($\sigma_{\text{дл}}$, $\sigma_{\text{п}}$), определяемые экспериментально, как правило, имеют разброс до 20% от средних значений. Для учета разброса характеристик длительной прочности обычно используют статистические методы, позволяющие определить положение средней линии и доверительный интервал, соответствующий определенной вероятности неразрушения.

Усталость металлов [157; 189]. Как показывает опыт, материал, подверженный переменным периодическим нагрузкам, разрушается при напряжениях, лежащих ниже не только предела прочности, но и предела текучести. Это явление называется усталостью металла — процесс постепенного накопления повреждений под действием переменных напряжений и деформаций, приводящий к образованию трещин и разрушению.

Таким образом, для суждения о прочности лопатки или ротора при колебаниях недостаточно располагать статическими характеристиками прочности (предел текучести и предел прочности) материала, а необходимо иметь показатель, определяющий сопротивление его переменным нагрузкам. Последний характеризуется пределом выносливости материала — значением максимального по абсолютной величине напряжения цикла, соответствующего заданной долговечности (числу циклов) — см. ГОСТ 23026–78. Цикл, в котором минимальные и максимальные значения напряжений одинаковы по величине, но противоположны по знаку, называют симметричным. Если минимальные и максимальные значения напряжений неодинаковы по величине, то цикл называют несимметричным или асимметричным. При асимметричном цикле напряжения изменяются в пределах от наименьшего значения $\sigma_{\min}$ до наибольшего $\sigma_{\max}$ (рис. 1.36). Среднее напряжение и амплитуда переменных напряжений в этом цикле равны

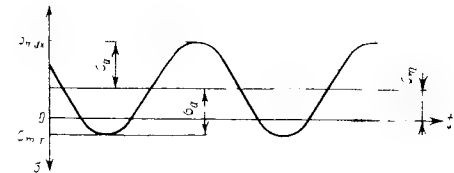


Рис. 1.36 Параметры асимметричного цикла

$$\sigma_m = 0,5 (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}),$$

$$\sigma_a = 0,5 (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}).$$

Характеристикой асимметричного цикла является коэффициент асимметрии

$$r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$$

Для симметричного цикла $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \sigma_a$; $\sigma_m = 0$ и $r = -1$. Для пульсирующего цикла, когда напряжения меняются от нуля до максимальной величины, $\sigma_{\min} = 0$, $\sigma_m = \sigma_a = 0,5\sigma_{\max}$ и $r = 0$.

В зависимости от вида напряженного состояния различают предел выносливости при растяжении–сжатии, изгибе, кручении и более сложных напряженных состояниях. Это различие обусловлено соотношением и изменением главных напряжений по сечению образца. Определение предела выносливости при различных видах напряженного состояния производится экспериментально на специальных установках [75]. Опытные данные позволяют считать, что если стальной образец при некотором максимальном напряжении цикла с фиксированным значением r в условиях нормальной температуры и отсутствии агрессивной среды выдержал без разрушения 10^7 циклов, то он выдержит и неограниченное число циклов. Кривая усталости (зависимость между максимальными или амплитудными значениями напряжений цикла и числом циклов N , рис. 1.37) в этом случае асимптотически приближается к некоторому предельному значению, не равному среднему напряжению.

Максимальное число циклов, при которых проводятся усталостные испытания, называют базой испытаний. Из сказанного выше следует, что за базу испытаний для стали может быть принято 10^7 циклов. Для цветных металлов и для легких сплавов подобной асимптотической зависимости нет, т. е. отсутствует так называемый физический предел выносливости, и за базу испытаний принимают значительно большее число циклов, вплоть до $500 \cdot 10^6$, на которой определяют ограниченный предел выносливости. Необходимо заметить, что указанная асимптотическая зависимость и для стали имеет место только при нормальной температуре и отсутствии агрессивной среды. При повышенной температуре горизонтальный участок кривой усталости исчезает. На рис. 1.38 приведены кривые усталости лопаточной стали 15Х11МФ при температуре 550°C на базе до 10^{10} циклов [161]. Ограниченный предел выносливости определяют и при испытаниях стальных образцов в агрессивной среде, например в паре с растворенными в нем солевыми примесями.

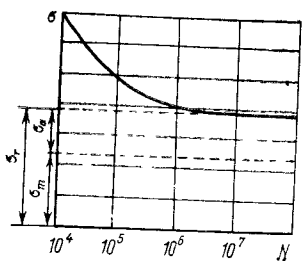


Рис. 1.37. Кривая усталости

На основании опытных данных могут быть построены диаграммы предельных напряжений (рис. 1.39, а) или предельных амплитуд цикла (рис. 1.39, б). При построении диаграммы предельных напряжений по оси абсцисс откладывается постоянная составляющая напряжения (она же среднее напряжение цикла σ_m), а по оси ординат — предельное максимальное ($\sigma_{\max}$) и минимальное ($\sigma_{\min}$) напряжения цикла. Точки А и А' относятся к симметричному циклу, а линии АС и А'С' указывают допустимые максимальные и минимальные напряжения цикла. Экспериментальные данные показывают, что линии АС и А'С' очень близки к прямым. Поэтому практически их можно принимать за прямые линии, что и сделано при данном построении диаграммы. Средние напряжения σ_m по оси абсцисс и максимальные напряжения $\sigma_{\max}$ по оси ординат ограничиваются значениями, равными пределу текучести материала σ_T . Тогда построенная диаграмма позволяет по заданному среднему напряжению σ_m определять графически предельную амплитуду переменных напряжений σ_a . Приближенно предельное значение амплитуды при асимметричном цикле и вели-

чина максимальных напряжений могут быть определены из соотношений [157]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m; \\ \sigma_{\max} &= \sigma_{-1} + (1 - \psi_\sigma) \sigma_m, \end{aligned} \right\}$$

где $\psi_\sigma = 0,2 \div 0,3$ для легированных сталей, а также для титана и легких сплавов

Диаграмма предельных амплитуд (рис. 1.39, б) для пластичных материалов, в частности для лопаточных и роторных сталей, лучше всего описывается параболой. В некоторых случаях в качестве диаграммы предельных амплитуд принимается прямая линия (штриховая линия на рис. 1.39, б).

Предел выносливости симметричного цикла связывают приближенными эмпирическими

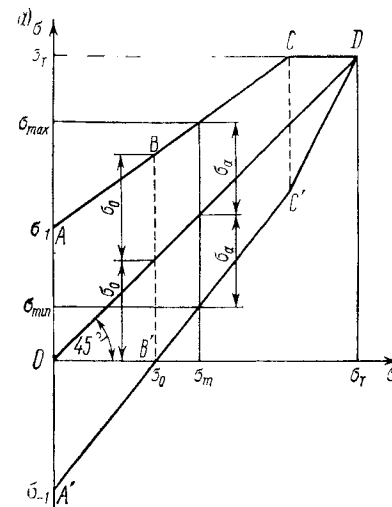


Рис. 1.39. Диаграммы предельных напряжений (а) и предельных амплитуд напряжений (б)

зависимостями с пределом прочности материала, используя, например, следующие соотношения [189]

$$\sigma_1 \approx (0,35 - 0,6) \sigma_B.$$

Для касательных напряжений

$$\tau_{-1} \approx 0,6 \sigma_{-1}.$$

Предложены и другие подобные зависимости, однако ни одна из них не является достаточно точной и универсальной, а поэтому применять их следует с большой осторожностью.

На величину предела выносливости существенное влияние оказывают конструктивные, технологические и эксплуатационные факторы. Под конструктивными факторами подразумеваются размеры и геометрическая форма детали, включая наличие концентраторов напряжений, под технологическими — состояние поверхности, структура металла, наличие металлургических дефектов, качество сварных соединений и др. под эксплуатационными —

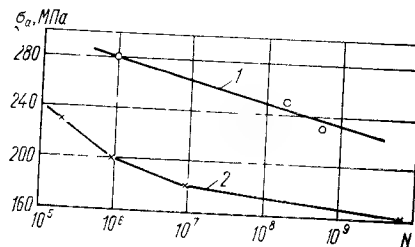


Рис. 1.38. Кривая усталости стали 15Х11МФ при температуре 550°C : 1 — гладкие образцы, 2 — образцы с надрезом

режим и частота нагружения, температура и агрессивное действие окружающей среды. На некоторых из них, касающихся рабочих лопаток, мы будем останавливаться ниже. Отметим только, что степень влияния концентрации напряжений на величину предела выносливости характеризуется эффективным коэффициентом концентрации напряжений, равным отношению предела выносливости при симметричном цикле гладких образцов σ_{-1} к пределу выносливости образцов с концентратором напряжений $(\sigma_{-1})_k$

$$k_\sigma = \sigma_{-1} / (\sigma_{-1})_k.$$

(I.5)



Рис. I.40. Усталостный излом рабочей лопатки

Кроме того, вводится характеристика, указывающая на чувствительность материала к концентрации напряжений

$$q = (k_\sigma - 1) / (k - 1),$$

(I.6)

где k — теоретический коэффициент концентрации напряжений.

Обычно предел выносливости, определенный при симметричном цикле на стандартных образцах при нормальных условиях, называют пределом выносливости материала, а предел выносливости, определенный непосредственными усталостными испытаниями деталей, с учетом влияния указанных факторов — конструктивным пределом выносливости.

Усталостные изломы имеют характерные признаки, которые позволяют отличить их от изломов другого рода (рис. I.40). На поверхности излома можно различить малую локальную зону — зону возникновения начальной макроскопической трещины усталости, называемую фокусом. Обычно фокус излома располагается на поверхности в местах концентрации напряжений или поверхностных дефектов. Далее располагается зона развития усталостной трещины с гладкой поверхностью. В этой зоне обычно видны характерные усталостные линии — следы фронта продвижения трещины. На последней стадии усталостного разрушения обра-

зуется зона долома, имеющая признаки хрупкого разрушения. Необходимо заметить, что до настоящего времени нет единой трактовки процесса зарождения усталостной трещины, что объясняется исключительной сложностью этого явления. Почти все современные теории усталостного разрушения металлов связывают возникновение усталостной трещины с локализованными пластическими деформациями сдвига в отдельных зернах, но по-разному объясняют сам процесс возникновения и распространения усталостной трещины.

Процессы усталостного повреждения носят случайный характер, так как связаны со структурной неоднородностью материалов, состоянием поверхности и т. д. Эта особенность усталостных явлений порождает существенное рассеяние механических характеристик усталостной прочности. В связи с этим при определении предела выносливости проводится статистический анализ, позволяющий отразить вероятностную природу усталостного разрушения. В результате этого анализа находится функция распределения предела выносливости и, далее, предел выносливости, соответствующий определенной вероятности неразрушения.

Совершенно другой механизм разрушения будет иметь место при переменных напряжениях, равных или превышающих предел текучести материала. Если переменные напряжения в цикле достигают предела текучести материала или превышают его, то при повторных нагрузках и разгрузках зависимость между напряжениями и деформациями будет иметь вид петли циклического упруго-пластического деформирования — петли гистерезиса (рис. I.41). Ширина петли равна величине пластической деформации $\Delta \epsilon_p$. Если ширина петли в каждом последующем полупериоде будет больше, чем в предыдущем, то имеет место направленное пластическое деформирование с накоплением пластической деформации до уровня деформации, соответствующей разрушению при однократном статическом нагружении. Такое разрушение называют квазистатическим. Оно может произойти за относительно небольшое число циклов — от 10^2 до 10^3 .

Если ширина петли гистерезиса в каждом последующем полупериоде равна ширине петли в предыдущем полупериоде или меньше ее, то имеет место стабильное циклическое деформирование или затухание пластической деформации с накоплением усталостных повреждений и возникновением усталостной трещины. Указанные разрушения деталей при напряжениях, равных пределу текучести материала или превышающих его, происходящих за сравнительно небольшое число циклов (10^2 — 10^4), называют малоцикло-вой усталостью. Способность материала сопротивляться малоцикло-

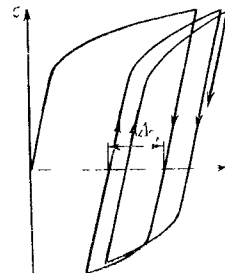


Рис. I.41. Диаграмма циклического деформирования

ловой усталости называют малоцикловою прочностью. Характер разрушения и необходимое число циклов при малоцикловом нагружении зависит от уровня исходных напряжений и деформаций, режима нагружения и свойств материала. При малом числе циклов ($N < 10^3$) проявляется разрушение, близкое к статическому, а при относительно большом ($N \geq 10^4$) — к усталостному. Таким образом, малоцикловая прочность занимает промежуточное положение между статической и усталостной прочностью.

Характеристики малоцикловою прочности определяются экспериментально при двух способах испытаний: мягком и жестком нагружениях. Малоцикловое нагружение с постоянной амплитудой напряжения принято называть мягким, так как образование пластической деформации при этом является свободным. Нагружение с постоянной амплитудой полной деформации называется жестким, так как протекание циклической пластической деформации ограничено задаваемой полной деформацией [157]. При жестком нагружении величина амплитуды пластической деформации связана с числом циклов до разрушения N_k зависимостью Мэнсона-Коффина [157]

$$(\Delta \epsilon_p) N_k^{1/2} = 0,5 \epsilon_k, \quad (1.7)$$

где ϵ_k — истинное удлинение при разрыве

В деталях паровых турбин, в частности в роторах и в конструкциях облопачивания, малоцикловое усталостное разрушение может иметь место вследствие работы турбины при переменных режимах. В этом случае температурные градиенты на отдельных участках ротора или лопаток приводят к возникновению высоких термических напряжений, превосходящих предел текучести материала. Заметим, что иногда малоцикловое усталостное разрушение, вызванное термическими напряжениями, называют термической усталостью.

Коррозионные и другие виды разрушения металлов в агрессивной среде будем рассматривать ниже (см. пп. II.10; II.13). Здесь же только заметим, что высокая коррозионная стойкость применяемых в паровых турбинах сталей, в частности высокохромистых нержавеющей лопаточных сталей 12X13, 20X13, 15X11МФ и др. [155], обуславливается влиянием хрома на образование устойчивой защитной окисной пленки на поверхности металла, предохраняющей его от дальнейшего окисления.

1.4. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА РАБОЧИЕ ЛОПАТКИ И ДИСКИ В УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Для того чтобы была понятна необходимость разработки уточненных методов прочностных и вибрационных расчетов лопаток и дисков турбин и оправданность высоких требований, предъявляемых к материалам, следует рассмотреть силы, действующие на

лопатки и диски в условиях эксплуатации турбины, и напряжения, вызываемые в них этими силами.

Рассмотрим сначала силы, действующие на рабочие лопатки турбин. Наибольшими являются центробежные силы, действующие на лопатки при вращении. В зависимости от мощности и рабочей частоты вращения турбины, а также размеров лопатки, численные значения действующих на нее центробежных сил могут изменяться в очень широких пределах, достигая для лопаток последних ступеней низкого давления тихоходных турбин нескольких меганьютонов. Если в лопатках постоянного поперечного сечения центробежные силы, в основном, вызывают напряжения растяжения, то в закрученных лопатках переменного сечения, помимо напряжений растяжения, возникают также значительные напряжения изгиба и кручения. В лопатках постоянного сечения напряжения растяжения, вызванные центробежной силой профильной части лопатки, изменяются по высоте почти линейно, причем их максимальные значения пропорциональны длине лопатки и не зависят от ее площади (см. п. III.1). В закрученных лопатках последних ступеней низкого давления мощных турбин напряжения растяжения в нижней половине лопатки могут быть практически постоянными. Эти напряжения распределены неравномерно в поперечном сечении, увеличиваясь в центральной части и уменьшаясь на кромках. Напряжения кручения обычно достигают максимума в средних сечениях, а упругая раскрутка периферийных сечений может достигать 10°, если не используются специальные связи, ей препятствующие (см. п. V.5).

Кроме центробежных сил, на рабочие лопатки действуют усилия от потока пара. Зная секундный расход пара, перепад на ступень, изменение степени реакции и окружной скорости по высоте лопатки, а также к. п. д. ступени и число рабочих лопаток, можем найти величину распределенной нагрузки, действующей на лопатку в тангенциальном (в плоскости диска) и аксиальном (перпендикулярно плоскости диска) направлениях, а затем и величины суммарных усилий (см. п. III.3). Усилия, действующие на лопатку от потока пара, имеют значительно меньшие численные значения, чем центробежные силы, и достигают максимальных значений, равных нескольким килоньютонам, в регулирующих ступенях мощных турбин. Поскольку действующие от парового потока силы направлены перпендикулярно оси лопатки, то они вызывают в лопатке изгибающие напряжения, так называемые напряжения парового изгиба.

Помимо напряжений, возникающих от центробежных сил и паровых усилий, лопатки подвергаются действию термических напряжений при пусках, остановках и изменении нагрузки турбины. В лопатках стационарных паровых турбин термические напряжения оказываются значительно меньшими, чем, например, в лопатках газотурбинных двигателей. Относительно большие напряжения могут возникнуть в лопатках регулирующих ступе-

ней при соединении лопаток достаточно жесткими связями (см. п. IV.3), а также в лопатках последних ступеней низкого давления при малых нагрузках и ухудшенном вакууме. Об этом свидетельствует приведенный на рис. 1.42 «гистерезис» угла упругой раскрутки лопатки с $D_{ср}/l = 2,58$ при подъеме и снижении частоты вращения турбины [25]. «Гистерезис», достигающий 2—2,5°, имел место при разнице температур в различных точках поперечного сечения лопатки, не превышающей 30—40 °С, и сопровождался появлением дополнительных напряжений кручения около 40 МПа. Следует иметь в виду, что при малых нагрузках турбин

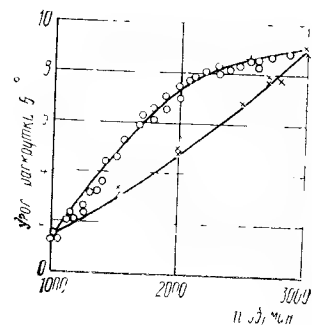


Рис. 1.42. «Гистерезис» угла упругой раскрутки лопатки с $D_{ср}/l = 2,58$ при подъеме (точки $\times$) и снижении (точки $\circ$) частоты вращения турбины

из-за наличия в последних ступенях низкого давления зон активного потока, вихревого движения и подсоса пара температура до рабочих лопаток и за ними может отличаться более чем на 100 °С [92].

Кроме статических и термических напряжений в рабочих лопатках паровых турбин в процессе эксплуатации могут возникать динамические напряжения, периодически изменяющиеся во времени.

В отличие от статических напряжений, численные значения которых могут быть найдены расчетным путем, значения переменных напряжений не могут быть вычислены с требуемой для практики точностью, что обусловлено недостаточностью знаний как возмущающих, так и демпфирующих сил. Существует три различных вида колебаний лопаток турбин.

1. Вынужденные колебания, вызванные переменными во времени усилиями потока пара. Опасный уровень переменных напряжений достигается в этом случае только в условиях резонанса, т. е. при совпадении частоты возмущающей силы с одной из собственных частот колебаний лопаток.

2. Вынужденные колебания, связанные с вибрацией ротора турбины. Поскольку в мощных стационарных турбоустановках отсутствует редукторная передача, то опасные переменные напряжения в лопатках, вызванные вибрацией ротора, как правило, могут возникнуть только при аварийном режиме короткого замыкания, когда валопровод турбоагрегата совершает интенсивные крутильные колебания [187; 190].

3. Автоколебания и срывные колебания лопаток в потоке пара, не кратные частоте вращения турбины. Теоретически автоколебания и срывные колебания лопаток турбин недостаточно изучены из-за значительной сложности возникающих процессов. В связи с этим весьма эффективным является комбинированное использо-

вание теоретических и экспериментальных методов [153]. В отличие от вынужденных колебаний, частоты срывных колебаний и автоколебаний не кратны частоте вращения ротора, а практически совпадают с одной из собственных частот лопаток. Возбуждение той или иной собственной формы и уровень переменных напряжений определяются механизмом энергообмена колеблющихся лопаток с потоком пара. Наибольшая вероятность возникновения автоколебаний или срывных колебаний имеет место в последних ступенях низкого давления паровых турбин. Автоколебания могут явиться также причиной разрушения выходных кромок направляющих лопаток, особенно в сопловых аппаратах и первых ступенях высокого давления.

Рассмотрим более подробно природу переменных возмущающих сил, создаваемых потоком пара, поскольку резонансные колебания, вызванные этими силами, являются основной причиной усталостных разрушений рабочих лопаток стационарных паровых турбин. Первоначально рассмотрим характер неравномерности, создаваемой в потоке пара наличием решеток направляющих лопаток.

Если пренебречь влиянием вязкости и сжимаемости пара, т. е. считать поток невязким и несжимаемым, равномерным вдали от решетки направляющих лопаток, то по мере приближения к решетке даже в этом идеализированном случае начнется его перестройка. Эта перестройка вызвана тем, что на поверхности лопаток нормальная составляющая скорости потока должна быть равна нулю. В связи с этим непосредственно перед и за решеткой направляющих лопаток поля скоростей, статических давлений и значения углов потока будут существенно неравномерными. Рабочие лопатки, движущиеся в таком неравномерном потоке, будут испытывать переменные во времени нагрузки, величина которых зависит от осевого расстояния между решетками направляющих и рабочих лопаток. Возмущения, не связанные с силами вязкости пара, в дальнейшем будем называть потенциальными. Потенциальные возмущения убывают по мере удаления от решетки направляющих лопаток по экспоненциальному закону. На рабочие лопатки будут действовать потенциальные возмущения от направляющих лопаток как предыдущей, так и последующей ступеней

На рис. 1.43 показано изменение неравномерности скорости потока перед решеткой направляющих лопаток в зависимости от

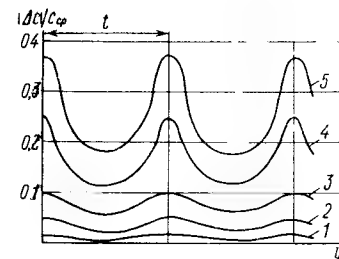


Рис. 1.43. Относительная неравномерность скорости потока перед решеткой лопаток в зависимости от осевого расстояния входных кромок до рассматриваемого сечения:

1 — $x = 0,41$, 2 — $x = 0,27$; 3 — $x = 0,18$, 4 — $x = 0,09$, 5 — $x = 0,015$

осевого расстояния до нее [84]. Как видно, по мере приближения к решетке лопаток, т. е. с уменьшением величины $\bar{x} = x/t$ (где x — расстояние в осевом направлении между рассматриваемым сечением потока и плоскостью, в которой расположены входные кромки лопаток, а t — шаг направляющих лопаток), относительное численное значение $|\Delta c|/c_{\text{ср}}$ резко возрастает ($c_{\text{ср}}$ — средняя скорость потока, Δc — отклонение от средней скорости). Другим источником неравномерности в потоке за решеткой направляющих лопаток являются силы вязкости. При обтекании направляющих лопаток вязким потоком на их поверхности не только нормальные, но и касательные составляющие скорости оказываются равными нулю. Возрастание касательной составляющей скорости от нулевого до номинального значения происходит в сравнительно узком пограничном слое.

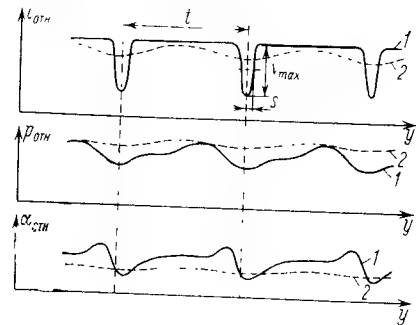


Рис. 1.44. Относительная неравномерность потока за решеткой лопаток в зависимости от осевого расстояния выходных кромок до рассматриваемого сечения:

1 — $\bar{x} = 1$; 2 — $\bar{x} \approx 1$

направляющей лопаткой. По мере удаления от решетки направляющих лопаток происходит выравнивание полей статических давлений и углов потока и более медленное выравнивание полей скоростей. На рис. 1.44 показано изменение относительной неравномерности скоростей ($c_{\text{отн}} = c/c_{\text{max}}$), статических давлений ($p_{\text{отн}} = p/p_{\text{max}}$) и углов выхода потока ($\alpha_{\text{отн}} = \alpha_1/\alpha_{\text{max}}$) по шагу t в зависимости от относительного расстояния выходных кромок направляющих лопаток $\bar{x} = x/t$ до рассматриваемого сечения. Как видно, по мере увеличения расстояния от выходных кромок неравномерность потока существенно уменьшается.

Кромочный след, образующийся за направляющими лопатками, характеризуется следующими параметрами: 1) максимальной дополнительной скоростью в следе $v_{\text{max}} = c_{\text{max}} - c_{\text{min}}$, где c_{max} — скорость в ядре потока, на малых расстояниях за решеткой практически равная скорости потока c_1 при отсутствии потерь; c_{min} — минимальная скорость потока; 2) полушириной следа s , определяемой как расстояние, отсчитываемое от оси следа в направлении, перпендикулярном скорости потока, до точки, в ко-

рой величина дополнительной скорости v_{max} уменьшается в два раза; 3) законом изменения дополнительной скорости по оси следа. На малых расстояниях от выходных кромок направляющих лопаток полуширина следа s составляет относительно небольшую часть шага t , затем происходит одновременное уменьшение v_{max} и увеличение s и, наконец, смыкание следов. В области до смыкания следов выполняются следующие соотношения [162]:

$$\left. \begin{aligned} c_{\text{max}} &= A_1 c_1 t \sqrt{t \sin \alpha_1 \zeta_{\text{пр}} x_1}; \\ s &= A_2 \sqrt{t \zeta_{\text{пр}} x_1 \sin \alpha_1} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

$$\text{или } v_{\text{max}} s = A_3 c_1 t \sin \alpha_1 \zeta_{\text{пр}},$$

где A_1, A_2, A_3 — постоянные коэффициенты; α_1 — угол выхода потока из направляющих лопаток, т. е. угол между скоростью потока и плоскостью вращения; x_1 — расстояние от выходных кромок вдоль потока, $x_1 = x/\sin \alpha_1$; $\zeta_{\text{пр}}$ — коэффициент профильных потерь.

Неравномерное поле скоростей за решеткой направляющих лопаток является периодической функцией, период которой равен шагу лопаток.

В дальнейшем будем считать, что по окружности установлено z равномерно расположенных направляющих лопаток, т. е. неравномерность потока является функцией, период которой равен $2\pi/z$. Функция $c(\varphi)$, описывающая неравномерное по окружности поле скоростей, может быть поэтому представлена в виде

$$c(\varphi) = c_{\text{ср}} + \sum_{k=1}^{\infty} v_{kz} \sin(kz\varphi + \alpha'_{kz}), \quad (1.9)$$

где $c_{\text{ср}}$ — осредненная по шагу скорость потока; v_{kz} — k -й коэффициент ряда Фурье в разложении функции $c(\varphi)$; φ — угол, отсчитываемый от произвольно выбранного начального радиуса; α'_{kz} — сдвиг по фазе. Индекс z и множитель z указывают на периодичность функции $c(\varphi)$ по шагу направляющих лопаток.

Если осевое расстояние от решетки направляющих лопаток настолько велико, что потенциальным возмущением можно пренебречь, то неравномерность потока характеризуется в основном неравномерным полем скоростей. Величины параметров, определяющих неравномерность поля скоростей, могут быть найдены по формуле (1.8). Из гармонического анализа следует, что при $s/t \ll 1$, $v_{1z} \sim v_{\text{max}} s/t$. Так как в соответствии с (1.8) $v_{\text{max}} s = \text{const}$, то v_{1z} мало изменяется при увеличении осевого расстояния от выходных кромок (естественно, что это справедливо только в зоне до смыкания следов). Из гармонического анализа следует также, что при $s/t \ll 1$ гармоники v_{2z} и v_{3z} также пропорциональны $v_{\text{max}} s/t$, т. е. будут близкими по величине к первой гармонике. Однако при удалении от выходных кромок в соответствии с формулой (1.8) происходит увеличение ширины следа, т. е.

увеличение отношения s/t , сопровождающееся резким уменьшением относительных значений высших гармоник. После смыкания следов закон изменения неравномерности скоростей по шагу близок к синусоидальному (рис. 1.44), т. е. будет в основном определяться первым слагаемым суммы в разложении (1.9), что иллюстрируется графиком рис. 1.45, где показана зависимость v_{1z}/c_{1z} и $v_{\max}/c_{1z}$ от расстояния рассматриваемого сечения до выходных кромок направляющих лопаток [153]. Как видно, по мере увеличения расстояния от выходных кромок значения v_{1z} и $v_{\max}$ сближаются друг с другом, что свидетельствует об очень резком уменьшении относительных значений высших гармоник (v_{2z} , v_{3z} и т. д.) неравномерности поля скоростей.

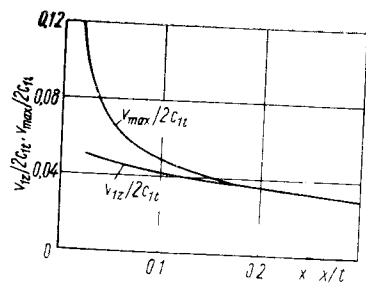


Рис. 1.45. Неравномерность поля скоростей за решеткой направляющих лопаток в зависимости от расстояния до выходных кромок

Еще одним источником неравномерности потока за решеткой направляющих лопаток являются концевые потери, которые также вызваны влиянием сил вязкости. Концевые потери связаны с перетеканием пограничного слоя по поверхностям, которые ограничивают каналы направляющих лопаток по высоте. Концевые потери вызывают неравномерность потока, период которой также равен шагу решетки. Таким образом, все указанные выше причины приводят к появлению периодической по шагу неравномерности потока за решеткой направляющих лопаток.

Поля скоростей, статических давлений и углов потока на определенном расстоянии от решетки могут быть представлены в виде функций угла φ , отсчитываемого от произвольно выбранного начального радиуса. Учитывая периодичность исследуемых функций по шагу направляющих лопаток, выражения для них можем представить в виде следующих рядов:

$$\left. \begin{aligned} c(\varphi) &= c_{cp} + \sum_{k=1}^{\infty} v_{kz} \sin(kz\varphi + \alpha'_{kz}); \\ p(\varphi) &= p_{cp} + \sum_{k=1}^{\infty} p_{kz} \sin(kz\varphi + \alpha''_{kz}); \\ \alpha_1(\varphi) &= \alpha_{1cp} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1kz} \sin(kz\varphi + \alpha''_{kz}), \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

где c_{cp} , p_{cp} , α_{1cp} — усредненные по шагу параметры потока (нулевые коэффициенты в разложениях соответствующих функций в ряды Фурье)

Для рабочих лопаток, вращающихся по отношению к направляющим с угловой скоростью ω , координата φ изменяется с течением времени по закону

$$\varphi = \omega t = 2\pi n t,$$

где n — частота вращения турбины, об/с

Силовое воздействие неравномерного по окружности потока на рабочие лопатки можно поэтому представить в следующем виде:

$$q(t) = q_{cp} + \sum_{k=1}^{\infty} q_{kz} \sin(2\pi n k z t + \alpha_{kz}), \quad (1.11)$$

где $q(t)$ — переменная во времени нагрузка, действующая на единицу длины лопатки, q_{cp} — постоянная нагрузка, действующая на единицу длины лопатки; q_{kz} — амплитуда переменной нагрузки с частотой $f = knz$, действующая на единицу длины лопатки

Таким образом, частоты возмущающих сил, обусловленные наличием в потоке решетки направляющих лопаток, пропорциональны произведению nz и равны knz

Составляющую постоянную нагрузку q_{cp} , действующую в окружном направлении, как известно, можно представить в виде (см. п. III.3)

$$q_{cp} = (\omega_{1u} - \omega_{2u}) \Delta G z_1,$$

где ω_{1u} , ω_{2u} — окружные составляющие скорости пара на входе и выходе из рабочих лопаток; ΔG — секундный расход пара, отнесенный к кольцевой решетке единичной высоты; z_1 — число рабочих лопаток в ступени

Учитывая, что $\Delta G = \pi \rho D \omega_a t_1$ (где ρ — плотность пара; D — диаметр рассматриваемого сечения; t_1 — шаг рабочих лопаток; ω_a — осевая скорость пара), преобразуем выражение для q_{cp} к следующему виду:

$$q_{cp} = (\omega_{1u} - \omega_{2u}) \omega_a \rho t_1. \quad (1.12)$$

При больших осевых расстояниях между рабочими и направляющими лопатками переменные нагрузки будут определяться главным образом неравномерностью поля скоростей. При этом условии, по аналогии с формулой (1.12), величину q_{kz} можно представить в следующем виде

$$q_{kz} = v_{kz} \omega_1 \rho t_1 \psi, \quad (1.13)$$

где ψ — функция, зависящая от параметров как решеток направляющих и рабочих лопаток, так и потока.

Справедливость формулы (1.13) можно обосновать тем, что ее правая часть пропорциональна пульсации количества движения массы пара, отнесенной к единице длины лопатки, поступающей в межлопаточный канал [153].

При условии, что сжимаемостью пара можно пренебречь, функция ψ будет зависеть от следующих параметров α — сдвига по фазе между возмущающими силами, действующими на соседние рабочие лопатки, определяемого величиной z/z_1 ; β — угла установки рабочей лопатки, т. е. угла между хордой лопатки и линией, параллельной оси вращения, γ — угла между направлением возмущающей скорости и хордой рабочей лопатки; b/t_1 — отношения хорды рабочей лопатки b к шагу рабочих лопаток, Sh — числа Струхала, равного $Sh = \omega k z b / \omega_1$, где $\omega k z = 2\pi f$ — круговая частота возмущающей силы.

Тогда амплитуду переменной нагрузки с частотой nz для несжимаемого потока можно представить в виде

$$q_{1z} = v_{1z} \omega_1 t_1 \psi(\alpha, \beta, \gamma, b/t_1, Sh) \quad (I.14)$$

При учете сжимаемости пара на величину функции ψ влияет также число Маха (M) и число Струхала, определяемое через скорость звука a в паре $Sh_a = \omega k z b / a$. Необходимо иметь в виду, что дополнительное увеличение неравномерности потока и, следовательно, переменных нагрузок может иметь место при работе во влажном паре.

Выше было показано, что $v_{1z} \sim c_{1z} \xi_{np}$. Так как $\omega_1 \sim c_{1z}$, то $v_{1z} \sim \omega_1 \xi_{np}$, и из формул (I.12) и (I.14) следует, что $q_{1z} \sim q_{срu} \sim q_{1p}$. Именно пропорциональность между переменной и постоянной нагрузками, действующими на рабочие лопатки, позволяет при проектировании новых турбин ограничивать переменные напряжения в лопатках на более или менее постоянном уровне за счет сохранения примерно равными напряжений парового изгиба, определяемых величиной нагрузки $q_{ср}$.

Теоретическое определение возмущающих сил, действующих на рабочие лопатки турбин, в настоящее время не может быть произведено с требуемой для практики точностью. Тем не менее результаты расчетов, полученные при ряде существенных упрощений, позволяют оценить тенденции в изменении величин возмущающих сил при различных изменениях в конструкции прочной части.

В [224] приведены результаты вычислений амплитуд возмущающих сил, возникающих при взаимном перемещении двух решеток тонких слабоизогнутых профилей в потоке невязкой несжимаемой жидкости при различных предположениях относительно изменения аэродинамической нагрузки по хорде и высоте лопаток. В работе показано, что в зависимости от осевого расстояния между решетками и предположений о распределении аэродинамической нагрузки амплитуда возмущающей силы с частотой nz может составлять от 1 до 16% от постоянной во времени силы. При этом наблюдается монотонное уменьшение амплитуд возмущающих сил при увеличении осевого расстояния. Значения высших гармоник возмущающих сил с частотами knz оказываются значительно меньше значения первой гармоники с частотой nz .

В квазистационарной постановке, т. е. в предположении, что взаимное перемещение решеток происходит настолько медленно, что рассматриваемый поток невязкой несжимаемой жидкости можно считать установившимся, изменение в распределении скоростей и давлений по профилю лопаток может быть найдено не только для решеток тонких слабоизогнутых профилей, но и для турбинных решеток. Казимирским [223] были проведены вычисления в квазистационарной постановке для реактивной турбинной ступени, в которой профили направляющих и рабочих лопаток были одинаковыми, а угол установки и шаг — равными. Результаты расчетов указывают на то, что при потенциальном взаимодействии решеток наиболее существенным оказывается изменение скорости на выходных кромках направляющих лопаток и на входных кромках рабочих лопаток. Уменьшения взаимного влияния можно добиться за счет увеличения осевого расстояния между решетками.

Величины возмущающих сил, вызванные вязкими следами, для решетки тонких слабоизогнутых профилей были определены в работе [225]. Результаты расчетов показали, что для рассматриваемых решеток эффект вязких следов оказался соизмеримым с эффектом потенциального взаимодействия. Было получено также, что амплитуда возмущающей силы с частотой $2nz$ может составлять более половины амплитуды возмущающей силы с частотой nz .

В работе [236] было исследовано влияние входящих в формулу (I.14) параметров α , β , b/t_1 , Sh (при условии $\gamma = 90^\circ$) на переменные аэродинамические силы и крутящие моменты, которые возникают при синусоидальном изменении скорости потока на входе в решетку тонких слабоизогнутых профилей. На основании результатов вычислений составлены подробные таблицы безразмерных коэффициентов возмущающих сил и моментов, частично приведенные в [152]. Из результатов вычислений, например, следует, что координата приложения переменной аэродинамической силы несколько изменяется на протяжении периода действия возмущающей силы, но в большинстве случаев оказывается сравнительно близкой к точке, расположенной на расстоянии 1/4 хорды от входной кромки. Это обстоятельство будет использовано в п. II.7 при рассмотрении сравнительной возбудимости различных собственных форм изгибных и крутильных колебаний лопаток.

Из приведенных выше теоретических результатов следует, что как потенциальные возмущения, так и возмущения, вызванные вязкими следами, уменьшаются по мере увеличения осевого расстояния между решетками. Отсюда, казалось бы, можно сделать вывод о целесообразности увеличения осевых зазоров для снижения возмущающих сил. Необходимо, однако, иметь в виду, что в некоторых случаях при увеличении осевого зазора может наблюдаться возрастание суммарной неравномерности потока, вызванное переменным сдвигом по фазе между потенциальными и

вязкими возмущениями [40]. По всей вероятности, подобное изменение суммарной неравномерности потока может явиться причиной немонотонной зависимости переменных сил и динамических напряжений в лопатках от осевого зазора между решетками, которая наблюдалась в ряде случаев экспериментально [153; 192]. Тем не менее при значительном увеличении осевого зазора суммарная неравномерность существенно уменьшается. Поэтому соответствующее увеличение осевого зазора оказывается целесообразным для уменьшения возмущающих сил. Это подтверждается тем обстоятельством, что при обычно имеющих место относительно

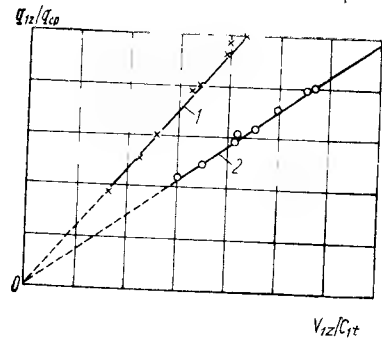


Рис. 1.46. Зависимость относительной величины возмущающих сил от неоднородности потока: 1 — тангенциальные колебания; 2 — аксиальные колебания

больших осевых зазоров между рабочими лопатками и направляющими лопатками последующей ступени потенциальное возмущение от направляющих лопаток этой ступени, как правило, не вызывает опасного роста переменных напряжений в рабочих лопатках предыдущей ступени. Существенное значение имеет сочетание теоретических и экспериментальных методов изучения нестационарных процессов в турбинных ступенях с учетом недостаточной точности расчетного определения величин возмущающих сил. В монографии [152]

обоснована возможность моделирования процессов энергообмена при колебаниях лопаток на «обращенных» установках, представляющих собой модельные турбины, в которых исследуемые рабочие лопатки неподвижны, а создающие возмущения направляющие лопатки вращаются. В работах [84; 152; 153] приведены важные экспериментальные результаты, полученные на подобных установках, позволяющие оценить влияние различных конструктивных изменений в проточной части на уровень переменных аэродинамических сил.

На рис. 1.46 приведены результаты, свидетельствующие о существовании линейной зависимости между q_{12}/q_{cp} и v_{12}/c_{1t} при различных формах колебаний лопаток [153]. Естественно, что наличие такой зависимости подтверждает справедливость формулы (1.14).

Из формул (1.12) — (1.14) вытекает, что существует зависимость $q_{kz}^{отн} = q_{kz}/q_{cp} = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, b/t_1, Sh, \bar{x})$, где φ — функция, зависящая от тех же параметров, что и функция ψ в формуле (1.14), а также от относительной величины осевого зазора между решетками $\bar{x}$.

Для однотипных ступеней можно ожидать, что значения функции φ будут отличаться не очень сильно, т. е. будет выполняться

приближенное равенство: $q_{kz}^{отн} \approx \text{const}$. Обычно величины $q_{kz}^{отн}$ сравнительно невелики. Например, в [173] указаны следующие ориентировочные значения $q_{12}^{отн} = 0,1$, $q_{22}^{отн} = 0,08$; $q_{32}^{отн} = 0,06$. Необходимо, однако, учитывать, что при совпадении частоты возмущающей силы с какой-либо из собственных частот лопаток, т. е. в условиях резонанса, динамические напряжения в лопатках даже под действием относительно небольшой возмущающей силы могут достигать опасного значения (см. п. II.6).

Кроме возмущающих сил с частотами knz на рабочие лопатки в условиях эксплуатации действуют также возмущающие силы со значительно более низкими частотами, вызванные неравномерностью полей скоростей и давлений, а также изменением

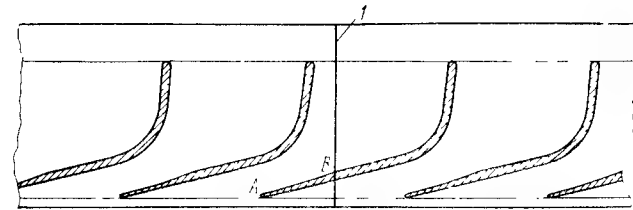


Рис. 1.47. Горизонтальный разрез с прямым стыком двух половин диафрагмы

углов потока не по шагу направляющих лопаток, а по окружности колеса. Эти низкочастотные возмущающие силы могут иметь ярко выраженный конструктивный источник: парциальный подвод пара; несимметричность по окружности, создаваемую патрубками; наличие отборов, силовых стоек и т. д. Однако низкочастотные возмущающие силы могут возникнуть и при отсутствии ярко выраженных конструктивных источников, например за счет технологических отклонений при изготовлении или сборке диафрагм. Одним из источников подобных возмущающих сил может явиться горизонтальный разъем между верхней и нижней половинами диафрагмы. На рис. 1.47 приведена ранее применявшаяся конструкция диафрагмы, в которой направляющие лопатки у разрыва I разрезались. При некачественной пригонке обеих частей разрезной направляющей лопатки были возможны значительные местные изменения расхода и давления пара, являвшиеся источником низкочастотных возмущающих сил. Особенно большие усилия могли возникать при отсутствии части направляющей лопатки (например, AB на рис. 1.47) в случае некачественного ее закрепления. Для уменьшения возмущений, источником которых является горизонтальный разъем, в современных конструкциях диафрагм часто применяют косой разъем I , при котором направляющие лопатки в стыке не разрезаются (рис. 1.48).

В особенно тяжелых условиях работают лопатки регулирующих ступеней при парциальном подводе пара (см. п. II.9) и

лопатки, расположенные за поворотными регулируемыми диафрагмами. В последнем случае возрастание амплитуд возмущающих сил объясняется как нерасчетным обтеканием направляющих лопаток при частичном закрытии диафрагмы, так и большей чувствительностью подобных диафрагм к технологическим отклонениям

По аналогии с формулами (I 10), поля скоростей, давлений и углов потока, неравномерные по окружности из-за технологических отклонений или отсутствия круговой симметрии у конструкции, могут быть представлены в виде следующих рядов:

$$\left. \begin{aligned} c(\varphi) &= c_{cp} + \sum_{k=1}^{\infty} v_k \sin(k\varphi + \alpha'_k), \\ p(\varphi) &= p_{cp} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sin(k\varphi + \alpha''_k), \\ \alpha_1(\varphi) &= \alpha_{1cp} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1k} \sin(k\varphi + \alpha'_k), \end{aligned} \right\} \quad (I.15)$$

где v_k , p_k , α_{1k} — k -е коэффициенты разложения в ряд Фурье.

Так как для вращающейся рабочей лопатки угловая координата изменяется по закону $\varphi = \omega t = 2\pi n t$, то силовое воздействие неравномерного парового потока $q(t)$ на лопатку в данном случае можно представить в виде

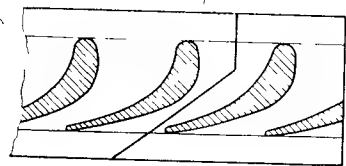


Рис I.48 Горизонтальный разъем с косым стыком двух половин диафрагмы

$$q(t) = q_{cp} + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin(2\pi k n t + \alpha_k), \quad (I.16)$$

где q_k — амплитудное значение переменной во времени нагрузки, действующей на единицу длины лопатки

Из формулы (I 16) следует, что частоты переменных нагрузок кратны частоте вращения и равны $f = kn$. Как и ранее, введем безразмерные величины переменных нагрузок, равные

$$q_k^{отн} = q_k / q_{cp},$$

характеризующие относительную неравномерность силового воздействия потока на лопатку за оборот. Величины $q_k^{отн}$ в еще меньшей степени, чем q_{kz} , поддаются расчетному определению, так как в значительной степени зависят от технологических отклонений при изготовлении и сборке лопаток и турбины в целом. Величины $q_k^{отн}$ могут существенно различаться даже для машин, изготовленных по одному чертежу. При отсутствии специальных конструктивных источников неравномерности величины $q_k^{отн}$, как

правило, существенно уменьшаются с ростом номера k . В работе [73] рекомендуются следующие ориентировочные значения $q_k^{отн}$: $q_2^{отн} = 0,05 \div 0,1$; $q_3^{отн} = 0,05 \div 0,1$; $q_4^{отн} = 0,05 \div 0,1$; $q_5^{отн} = 0,03 \div 0,06$; $q_6^{отн} = 0,02 \div 0,04$. Величина $q_1^{отн}$ может быть больше величин остальных коэффициентов, однако она не представляет практического интереса для возбуждения колебаний лопаток (см. II 5).

Из изложенного ясно, что на рабочие лопатки в условиях эксплуатации действуют две группы возмущающих сил, одна из которых имеет частоты knz , т. е. кратные произведению частоты вращения на число направляющих лопаток, а другая — частоты kn , т. е. кратные частоте вращения турбины

При проектировании турбин выполняются различные конструктивные мероприятия для уменьшения амплитуд возмущающих сил как с частотами kn , так и с частотами knz (главным образом, с частотой nz). В частности, большое внимание обращается на обработку конструкции входных и выходных патрубков с целью уменьшения создаваемой ими окружной неравномерности, на профилирование канала отбора и увеличение объема камеры отбора, на выбор оптимального числа направляющих лопаток, а также осевых зазоров между рабочими и направляющими лопатками

Следует иметь в виду, что задание достаточно малых допусков на отклонения в шагах, горлах и навалах направляющих лопаток и на толщину их выходных кромок может привести к существенному уменьшению амплитуд возмущающих сил с частотами kn . Так как различия в величинах шагов, горл, навалов и в толщинах выходных кромок по окружности колеса в большинстве случаев носят случайный характер, то увеличение числа направляющих лопаток при сохранении разбросов в процентном отношении, как правило, будет способствовать уменьшению амплитуд низкочастотных возмущающих сил. Действительно, оценим величину возможного суммарного различия в шагах или горлах направляющих лопаток на определенной части окружности, на которой, например, размещается полуовална возмущения с кратностью k . Из изложенного ясно, что в определенном смысле эта величина будет пропорциональна гармонике возмущающей силы с кратностью k . Как следует из теории вероятностей [38], дисперсия суммы случайных величин равна сумме дисперсий, а среднее квадратическое отклонение суммы пропорционально корню квадратному из числа слагаемых. Если различия в шагах или горлах в диафрагмах с большим и малым числом направляющих лопаток составляют один и тот же процент, то среднее квадратическое отклонение для каждого из слагаемых уменьшается обратно пропорционально числу направляющих лопаток, а среднее квадратическое отклонение для суммы уменьшается обратно пропорционально корню квадратному из числа направляющих

лопаток. Таким образом, вероятность достижения суммарным различием в шагах или горлах на рассматриваемой части окружности какого-либо определенного фиксированного значения уменьшается по мере увеличения числа направляющих лопаток.

Поскольку для диафрагм с большим числом направляющих лопаток при сохранении абсолютной величины осевого зазора между решетками возрастает его относительная величина x , то использование подобных диафрагм в большинстве случаев будет сопровождаться уменьшением и амплитуд возмущающих сил с частотами $k\pi z$.

Значительные резервы уменьшения амплитуд возмущающих сил заключаются в управлении пограничным слоем. Неравномерность потока, а следовательно, и возмущающие силы могут быть уменьшены за счет отсоса пограничного слоя или выдува рабочего тела из выходных кромок направляющих лопаток.

Выбор оптимального соотношения между числом рабочих и направляющих лопаток, выбор оптимальных осевых зазоров [84, 152; 153], учет взаимосвязи режимных и конструктивных параметров приводят к уменьшению действующих на рабочие лопатки переменных аэродинамических сил или крутящих моментов. К последнему направлению относится, например, работа [194], где рассмотрены условия, при которых возможна частичная или полная взаимная компенсация действующих на лопатку возмущающих сил, вызванных поперечными и продольными по отношению к хорде пульсациями скорости. К этому же направлению относятся работы по изменению формы профиля рабочей лопатки таким образом, чтобы сблизить центр кручения с центром давления переменных аэродинамических сил и за этот счет уменьшить переменный крутящий момент и уровень динамических напряжений при крутильных колебаниях.

Высокочастотные возмущающие силы могут быть уменьшены и за счет введения специальных изменений в конструкцию диафрагм — применения так называемых диафрагм переменного шага или навала в окружном направлении выходных кромок направляющих лопаток (см. п. XIII 9).

Соединение лопаток различными по конструкции связями также приводит к более или менее значительному уменьшению амплитуд возмущающих сил, действующих на лопатку в пакете, по сравнению с возмущающими силами, действующими на отдельную лопатку. Эффективность уменьшения возмущающих сил в этом случае оценивается с помощью так называемого пакетного множителя (см. п. II 8).

Повышение требований к надежности турбин и, в частности, к надежности работы лопаточного аппарата вызывает необходимость более глубокого изучения природы действующих на лопатки возмущающих сил. В целом, несмотря на значительные успехи в области теории колебаний и нестационарной аэродинамики, обес-

ечение вибрационной надежности рабочих лопаток турбин до настоящего времени остается весьма сложной задачей.

Перейдем к рассмотрению сил, действующих на диски и роторы турбин. Как и для рабочих лопаток, наибольшими по величине силами, действующими на диски и роторы, являются центробежные силы, которые, например, для дисков последних ступеней низкого давления мощных турбин могут достигать сотен меганьютонов. Центробежные силы вызываются массой как собственно диска или ротора, так и массон укрепленных на них рабочих лопаток. Действие центробежных сил на диск сводится в основном к возникновению напряжения растяжения. Однако, если плоскость действия центробежных сил лопаток не совпадает с плоскостью симметрии диска или форма самого диска асимметрична, то в нем возникнут также напряжения изгиба. Возникновение напряжений изгиба под действием центробежных сил особенно характерно для дисков сварных роторов. В этом случае в связи с некоторым различием радиальных перемещений отдельных дисков на них действуют и дополнительные изгибающие моменты от перемычек, соединяющих диски между собой. Дополнительные напряжения могут возникать в ободу диска и под действием изгибающих и крутящих моментов от рабочих лопаток. Диски испытывают напряжения изгиба также и под действием перепада давления по проточной части. Для дисков мощных паровых турбин эти напряжения обычно невелики из-за их большой изгибной жесткости.

Значительные напряжения возникают в дисках при посадке их на вал с натягом. Оценка этих напряжений должна производиться как для невращающихся, так и для вращающихся дисков, поскольку напряжения от натяга в годе центробежных сил хотя и существенно уменьшаются, но суммируются с напряжениями, возникающими в дисках при вращении.

В цилиндрических сечениях диска возникают касательные напряжения, связанные с передачей крутящего момента от рабочих лопаток. При оценке прочности дисков эти напряжения, как правило, не принимаются во внимание из-за их малости. В поперечных сечениях роторов и особенно в шейках валов напряжения, создаваемые этим крутящим моментом, могут быть более значительными. Тем не менее даже в шейках валов эти напряжения не являются опасными, так как диаметры шеек выбираются из условия прочности вала в аварийном режиме короткого замыкания [190], при котором переменные во времени напряжения кручения в несколько раз превышают напряжения от передачи номинального крутящего момента.

Повышение маневренности современных стационарных паровых турбин приводит к значительной неравномерности температурного поля в дисках и роторах при переменных режимах. Большие разности температур как в радиальном, так и в осевом направлениях являются причиной возникновения значительных

термических напряжений, для вычисления которых необходимо знание температурных полей.

Разработанные к настоящему времени методы электро моделирования температурных полей [168] и расчетные сеточные методы [174] дают возможность находить распределение температур в диске или роторе. Однако точность полученных результатов будет зависеть от правильной постановки граничных условий — условий теплообмена на границе пара с металлом, которые должны уточняться экспериментально, путем термометрирования отдельных элементов турбины в эксплуатационных условиях. Следует заметить, что оценка термонапряженного состояния роторов весьма важна и для влажнопаровых турбин атомных электростанций, несмотря на относительно низкие начальные параметры пара. Это объясняется тем, что теплообмен между ротором и средой во влажном паре происходит значительно интенсивнее, чем в перегретом, в результате чего неравномерность температурного поля ротора может быть более высокой [175].

Особую опасность температурные напряжения представляют в зонах концентрации, где при неблагоприятных условиях они могут достигать предела текучести. В этом случае ввиду циклического действия температурных напряжений возникает опасность малочиклового термоусталостного разрушения (см. п. I.3).

Как и рабочие лопатки, диски паровых турбин подвергаются действию переменных во времени нагрузок. Неравномерное по окружности давление пара вызывает во вращающемся диске появление динамических напряжений, резко возрастающих в условиях резонанса. Кроме того, переменные силы и моменты действуют на диск и при колебаниях укрепленных на них рабочих лопаток. Переменные напряжения в роторах возникают при их вибрации, а также под действием собственного веса ротора при вращении. Изгибные напряжения от собственного веса роторов невелики и обычно не превышают 10—20 МПа, дополнительные изгибные напряжения могут возникнуть в роторе при расцентровке валопровода. При работе турбины возможны как вынужденные колебания роторов под действием сил небаланса, так и автоколебания под действием сил, возникающих в концевых и надбандажных уплотнениях роторов и в их подшипниках.

1.5. УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ РАБОЧИХ ЛОПАТОК, ДИСКОВ И РОТОРОВ

Прочность и надежность рабочих лопаток, дисков и роторов будет обеспечена, если напряжения, возникающие в них при заданных нагрузках (силовых или температурных), будут удовлетворять определенным условиям прочности. Эти условия связывают напряженно-деформированное состояние конструкции с механическими свойствами материала. В зависимости от характера нагружения — статического, повторно-статического или циклического — условия прочности имеют свои особенности. Критерием

прочности или долговечности конструкции являются запасы прочности или долговечности. При проектировании эти запасы могут рассматриваться как сравнительные показатели надежности вновь проектируемой конструкции с конструкцией, уже имеющей опыт эксплуатации. Запас прочности представляет собой отношение некоторых предельных напряжений для данного материала к максимальным эквивалентным напряжениям в детали:

$$n_{\sigma} = \sigma_{\text{пред}} / \sigma_{\text{max}},$$

а запас долговечности — отношение времени или числа циклов до разрушения детали к расчетному времени или числу циклов в эксплуатации

$$n_t = t_p / t \quad \text{или} \quad n_N = N_p / N$$

Условия прочности будут выполнены, если запасы прочности или долговечности окажутся не менее минимально допустимых нормативных значений. Допустимые нормативные запасы прочности или долговечности зависят от многих факторов и для рабочих лопаток, дисков и роторов устанавливаются в основном на основании обобщения опыта проектирования и эксплуатации турбин. Они должны учитывать точность расчетного или экспериментального определения напряженно-деформированного состояния конструкции, достоверность знания прочностных характеристик материалов, отступления в геометрических размерах при изготовлении хотя бы в пределах допусков. Необходимо учитывать также качество изготовления поковок и заготовок для рабочих лопаток, дисков и роторов, разброс свойств по объему поковки, наличие остаточных напряжений, возможных внутренних дефектов в виде неметаллических включений, флокенов, заковов, дефектов в сварных швах и пр. Должны учитываться изменения характеристик длительной и усталостной прочности материала при больших сроках эксплуатации. Важное значение имеют также отступления в режимах эксплуатации турбин и работа при этом лопаток или дисков в нерасчетных условиях.

При установлении запасов прочности и долговечности учитывают назначение турбоагрегата, длительность его эксплуатации и последствия, к которым могут привести разрушения лопаток той или иной ступени или ротора. Запасы прочности или долговечности могут уточняться в процессе накопления опыта проектирования и эксплуатации турбин, на базе совершенствования методов расчета и экспериментального исследования напряженно-деформированного состояния деталей, накопления данных по механическим характеристикам применяемых материалов с возможностью их статистической обработки. Важное значение имеет совершенствование методов дефектоскопии заготовок и поковок (ультразвуковой контроль, γ-дефектоскопия и пр.). Все это указывает на условный характер значений запасов прочности, которые могут изменяться на различных этапах как в сторону их

снижения, так и повышения. Как правило, допустимые нормативные запасы прочности и долговечности в турбостроении, в частности, для лопаток, дисков и роторов на определенный период времени регламентируются отраслевыми стандартами.

Рассмотрим далее условия прочности и долговечности рабочих лопаток, дисков и роторов в зависимости от характера их нагружения.

1. При составлении условий статической прочности в зависимости от вида напряженного состояния вводится эквивалентное напряжение, устанавливающее соответствие между сложным напряженным состоянием в детали и одноосным в образце. Эквивалентное напряжение определяется принятым критерием прочности (гипотезой прочности) [13]. Для пластичных материалов в качестве таких критериев в основном используется или критерий интенсивности напряжений, или критерий максимального касательного напряжения. В первом случае разрушающим напряжением считается «среднее» касательное напряжение в точке, а во втором — максимальное касательное напряжение. Например, для рабочих лопаток, в сечениях которых действуют нормальные напряжения σ и касательные напряжения τ (см. гл. III—V), эквивалентные напряжения в соответствии с первым критерием таковы:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_c = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \quad (I.17)$$

а в соответствии со вторым

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (I.18)$$

Для тонкого диска (см. гл. VIII) эквивалентное напряжение, равное интенсивности напряжений,

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_c = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi}, \quad (I.19)$$

а для «толстого» диска или для ротора (см. гл. IX), в которых реализуется объемное напряженное состояние

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2}, \quad (I.20)$$

где σ_r , σ_φ и σ_z — компоненты нормальных напряжений, соответственно радиальные, окружные и осевые; τ_{rz} — компоненты касательных напряжений.

Эквивалентное напряжение в соответствии с критерием максимального касательного напряжения в общем случае объемного напряженного состояния равно максимальному значению по абсолютной величине

$$\sigma_{\text{экв}} = \left| \begin{array}{c} \sigma_r - \sigma_\varphi \\ \sigma_\varphi - \sigma_z \\ \sigma_z - \sigma_r \end{array} \right|_{\text{max}}. \quad (I.21)$$

Для хрупких и малопластичных материалов ответственными разрушение являются в основном нормальные напряжения. Эквивалентные напряжения в этом случае определяются в соответствии с критериями максимального нормального напряжения или максимальной нормальной деформации. Более широкое применение находит первый критерий, в соответствии с которым эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{\text{max}}.$$

В расчетной практике используются и многие другие критерии прочности, некоторые из которых, например для тонких дисков, указаны в [137].

В качестве предельных напряжений при оценке прочности принимают предел текучести σ_t , $\sigma_{0.2}$ или предел прочности σ_B материала при рабочей температуре, а также предел длительной прочности $\sigma_{д.п}$ или предел ползучести $\sigma_{п}$, если при рабочей температуре имеет место явление ползучести. Если для надежной работы конструкции нежелательно появление пластических деформаций, то в качестве предельного напряжения принимают предел текучести материала. Условие статической прочности в этом случае имеет вид

$$n_1 = \sigma_t / \sigma_{\text{экв}} \geq [n_1],$$

где $[n_1]$ — допустимый нормативный запас прочности по пределу текучести.

В качестве эквивалентных напряжений в этом случае обычно принимают или интенсивность напряжений в точке, или максимальное касательное напряжение. Если работоспособность конструкции оценивается по разрушению, то в качестве предельного напряжения принимают предел прочности материала, условие прочности при этом

$$n_B = \sigma_B / \sigma_{\text{экв}} \geq [n_B],$$

где $[n_B]$ — допустимый нормативный запас по пределу прочности.

Последнее условие обычно используется для хрупких и малопластичных материалов. В качестве эквивалентных напряжений здесь обычно принимают максимальное нормальное напряжение. Аналогичное условие прочности используется и для деталей, работающих при ползучести материала, так как при длительной эксплуатации пластические свойства материала оцениваются его длительной пластичностью, величина которой может оказаться весьма невысокой. В качестве предельного напряжения в этом случае принимают предел длительной прочности материала на расчетном ресурсе. Условие прочности имеет вид

$$n_{д.п} = \sigma_{д.п} / \sigma_{\text{экв}} \geq [n_{д.п}],$$

где $[n_{д.п}]$ — допустимый нормативный запас по длительной прочности.

В тех случаях, когда работоспособность конструкции может быть нарушена накоплением значительных деформаций ползучести (например, недопустимая вытяжка рабочих лопаток), в качестве предельного напряжения принимают предел ползучести материала.

Запасы прочности для лопаток, дисков и роторов регламентируются обычно по отношению к номинальным напряжениям. Оценка прочности с учетом местных напряжений в зонах концентрации должна производиться в каждом конкретном случае с учетом свойств материала и условий эксплуатации. Так, при относительно высокой пластичности материала, что характерно для турбинных сталей, и при отсутствии ползучести однократное превышение предела текучести в зонах концентрации еще не приведет к потере работоспособности детали. Местные напряжения в этих зонах, определяемые в результате упругопластического расчета, останутся на уровне предела текучести за счет пластического деформирования материала. Однако, если в этих зонах превышение предела текучести будет многократным, то возникнет опасность малоциклового усталостного разрушения, для которого условия прочности будут указаны ниже.

При ползучести местные пики напряжений в зонах концентрации будут снижаться за счет релаксации. Однако при этом будет иметь место истощение определенной доли исходной пластичности материала и сокращение общего ресурса эксплуатации детали. В этом случае местные напряжения должны определяться с учетом ползучести материала.

Оценка прочности конструкции с учетом возможного появления пластических деформаций в отдельных зонах, не представляющих опасности для ее работоспособности, проводится из условия истощения ее несущей способности. Если материал имеет относительно высокую пластичность, то при достижении в отдельных зонах предела текучести происходит пластическое деформирование материала с увеличением напряжений в соседних, еще упругих слоях. Происходит так называемое перераспределение напряжений за счет пластичности материала. Увеличение нагрузки приводит к расширению зоны пластического деформирования, которая при некоторой предельной нагрузке распространится на все расчетное сечение. Дальнейшая работоспособность детали возможна только за счет упрочнения материала. Разрушение детали произойдет при достижении напряжениями во всем сечении предела прочности материала. Способность материала перераспределять напряжения и этим повышать несущую способность детали определяется характером кривой деформирования. При этом важное значение имеет и характер напряженного состояния исследуемой детали.

При оценке работоспособности детали по несущей способности вводится понятие предельной нагрузки $P_{\text{пред}}$, при которой средние напряжения во всех точках расчетного сечения достигают

или предела текучести, или предела прочности материала. В соответствии с этим вводится понятие запаса прочности по несущей способности, который определяется отношением предельной нагрузки к максимальной

$$n = P_{\text{пред}} / P_{\text{max}}.$$

Примером оценки работоспособности деталей по несущей способности являются расчеты на прочность по средним напряжениям. В этом случае действительное распределение напряжений при упругом или упругопластическом деформировании не определяется ввиду сложности той или иной задачи. Определяются средние напряжения растяжения, среза или смятия в отдельных расчетных сечениях, соответствующие максимальной нагрузке, которые сопоставляются с пределом текучести или пределом прочности материала. Такого типа оценки правомочны только при относительно высокой пластичности материала.

При ползучести, как уже указывалось, пластичность материала определяется его длительной пластичностью и при больших сроках эксплуатации разрушение может наступить в локальных зонах до полного выравнивания напряжений по расчетному сечению и поэтому оценка прочности по несущей способности может оказаться завышенной. Оценкой прочности по несущей способности является определение разрушающего числа оборотов диска и определение запаса по разрушающим оборотам [15]. Принятые таким образом запасы прочности в соответствии с указанными условиями могут, однако, оказаться формальными, если не будет обеспечена в условиях эксплуатации сопротивляемость хрупкому разрушению. Для исключения хрупкого разрушения должно выполняться специальное условие прочности в соответствии с (1.3)

$$\sigma \sqrt{Ml} < K_{1c}.$$

При оценке прочности по хрупкому разрушению вводятся понятия запасов по критическому размеру дефекта

$$n_l = l_{\text{кр}} / l \geq [n_l]$$

или по критическому напряжению

$$n_\sigma = \sigma_{\text{кр}} / \sigma \geq [n_\sigma],$$

где $[n_l]$ и $[n_\sigma]$ — соответствующие допустимые нормативные запасы.

Для лопаток и роторов, работающих при высокой температуре кроме запаса по длительной прочности определяется также запас по долговечности [13; 15], который должен быть в несколько раз больше, чем запас по напряжениям. Это можно показать, если воспользоваться степенной зависимостью предела длительной прочности от времени до разрушения,

$$t = A \sigma_{\text{д}}^{-\lambda} \quad (\lambda > 1), \quad (1.22)$$

где A и λ — постоянные для данного материала, зависящие от температуры и характера разрушения.

Принимая, что расчетным напряжениям в детали $\sigma_{\text{э.кв}}$ соответствует время до разрушения t_p , а пределу длительной прочности материала на расчетном ресурсе $\sigma_{\text{д.п}}$ — время t , получим

$$n_t = t_p/t = (\sigma_{\text{д.п.}}/\sigma_{\text{э.кв}})^\lambda = n_{\text{д.п.}}^\lambda. \quad (I.23)$$

Если в процессе эксплуатации турбины лопатки и ротор работают при различных режимах, различающихся температурой и действующими напряжениями, то их работоспособность оценивается эквивалентными запасами по длительной прочности или долговечности [13; 116]. Считают, что при работе в течение времени t_j на j -м режиме при напряжениях $\sigma_j = \text{const}$ материал получает некоторую долю повреждений, которая приближенно оценивается относительной продолжительностью работы на этом режиме t_j/t_{jp} , где t_{jp} — время до разрушения при условиях j -го режима. Если до разрушения деталь работала на нескольких различных режимах, то на каждом из них она получила определенную долю повреждений. Экспериментально установлено, что сумма всех повреждений, каждое из которых оценивается относительной продолжительностью работы на этом режиме, приблизительно равна единице, т. е.:

$$\sum_{j=1}^k (t_j/t_{jp}) = 1. \quad (I.24)$$

Равенство (I.24) называют законом линейного суммирования повреждений.

Для определения эквивалентного запаса по долговечности вводится понятие эквивалентного режима, при котором относительная повреждаемость материала будет равна суммарной повреждаемости при работе детали на k различных режимах, т. е.

$$t_{\text{э.кв. п}} = \sum_{j=1}^k t_j/t_{jp},$$

где $t_{\text{э.кв.}}$ — продолжительность работы на эквивалентном режиме; $t_{\text{э.кв. п}}$ — время до разрушения на эквивалентном режиме.

Тогда с учетом (I.23) эквивалентный запас по долговечности

$$\frac{1}{n_{\text{э.кв. т}}} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_{jt}} = \sum_{j=1}^k (1/n_{\text{д.п.}})^{\lambda_j} t_j, \quad (I.25)$$

а эквивалентный запас по длительной прочности

$$n_{\text{э.кв. д.п.}} = (n_{\text{э.кв. т}})^{1/\lambda_{\text{э.кв}}} = \left[1 / \sum_{j=1}^k (1/n_{\text{д.п.}})^{\lambda_j} t_j \right]^{1/\lambda_{\text{э.кв}}}, \quad (I.26)$$

где n_{jt} и $n_{\text{д.п.}}$ — запасы по долговечности и по длительной прочности на j -ом режиме.

При непрерывном изменении напряжений закон линейного суммирования принимает вид [116]

$$\int_0^{t_p^*} \frac{dt}{t_p(\sigma)} = 1, \quad (I.27)$$

где $t_p(\sigma)$ — время до разрушения при напряжении σ ; t_p^* — эквивалентное время до разрушения.

Закон линейного суммирования повреждений в форме (I.27) позволяет найти эквивалентные напряжения при непрерывном изменении во времени напряжений в детали. Используя зависимость (I.22), найдем, что

$$t_p(\sigma) = t_p^* (\sigma_{\text{э.кв}}^*)^\lambda / \sigma^\lambda, \quad (I.28)$$

где $\sigma_{\text{э.кв}}^*$ — эквивалентное напряжение — постоянное напряжение, которое за время t_p^* вызывает такую же относительную повреждаемость, как и переменные напряжения σ .

Подставляя (I.28) в (I.27), получим

$$\sigma_{\text{э.кв}}^* \left[\frac{1}{t_p^*} \int_0^{t_p^*} \sigma^\lambda dt \right]^{1/\lambda}. \quad (I.29)$$

Эту величину постоянного напряжения и нужно принимать при оценке прочности детали.

В стационарных паровых турбинах лопатки и роторы большую часть времени работают при практически постоянных напряжениях (стадия установившейся ползучести). Однако в начальный период эксплуатации детали работают при непрерывно изменяющихся во времени напряжениях. Зависимость (I.29) позволяет выяснить, насколько эквивалентные напряжения $\sigma_{\text{э.кв}}^*$ отличаются от постоянных напряжений установившегося состояния ползучести при общем ресурсе эксплуатации турбины. Проведенные оценки показывают, что для применяемых в паротурбостроении жаропрочных лопаточных и роторных сталей различия в этих напряжениях весьма малы и ими практически можно пренебречь. Это важный вывод, который позволяет считать, что для оценки прочности лопаток и роторов стационарных паровых турбин достаточно знать напряжения в них при установившейся ползучести, пренебрегая их изменением в начальной стадии неустановившейся ползучести материала.

2. Как уже указывалось выше (см. п. I.3), многократное превышение предела текучести материала действующими в детали напряжениями приводит к так называемому малоциклового разрушению. В зависимости от уровня напряжений, степени стесненности деформированного состояния и пластических свойств металла при циклическом деформировании разрушение может иметь либо квазистатический характер, либо усталостный.

Малоцикловое усталостное разрушение в паровых турбинах наиболее часто встречается в роторах высокого и среднего давления, имеет место в зонах концентрации напряжений и связано с возникновением в этих зонах высоких термических напряжений при переменных режимах работы турбины (пуски, остановки, сбросы нагрузки). В рабочих лопатках паровых турбин это разрушение может иметь место в случаях соединения их в жесткие пакеты (см. п. I.1).

Работоспособность детали при малоцикловом разрушении оценивается запасом по циклической долговечности, который определяется отношением числа циклов до разрушения N (прогнозируемая долговечность) к возможному числу циклов в эксплуатации N_3

$$n_N = N/N_3.$$

Циклическая долговечность оценивается с помощью зависимостей между размахом напряжений или деформаций и числом циклов до разрушения. Эти зависимости определяются экспериментальным путем при одноосном растяжении — сжатии или изгибе образцов и представляются в виде кривых усталости $\Delta\sigma-N$ или $\Delta\varepsilon-N$ [157], где $\Delta\sigma$ и $\Delta\varepsilon$ — соответственно размах напряжений и деформаций в цикле.

Получаемые экспериментально характеристики малоциклового усталости носят вероятностный характер и соответствующие кривые строятся в определенном доверительном интервале, что должно учитываться при назначении запаса по циклической долговечности.

Кривые малоциклового усталости в некоторых случаях могут быть построены по приближенным расчетным зависимостям. Наиболее широкое распространение получила эмпирическая зависимость Мэнсона [123], которая связывает размах полной деформации $\Delta\varepsilon$ в цикле с числом циклов до разрушения

$$\Delta\varepsilon = 3,5 \frac{\sigma_B}{E} N^a + \left(\frac{N}{D}\right)^b,$$

где σ_B — предел прочности материала; E — модуль упругости; $D = \ln [1/(1 - \psi)]$; ψ — относительное сужение; a и b — постоянные, которые для большинства турбинных сталей могут быть приняты равными $a = -0,12$ и $b = -0,6$.

Может быть использована также зависимость Коффина [157]

$$\Delta\varepsilon_p N^{0,5} = \varepsilon_K/2,$$

где $\Delta\varepsilon_p$ — размах пластической деформации в цикле; ε_K — истинное удлинение при разрыве.

Достаточно хорошее описание экспериментов дает зависимость [169]

$$\Delta\varepsilon N^{0,7} = 3,5 (D^{0,6} + \sigma_B/E).$$

Размахи напряжений $\Delta\sigma$ или деформаций $\Delta\varepsilon$ принимаются как разность между максимальными и минимальными их значениями в установившемся цикле. Например, $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 2\sigma_a$, где σ_a — амплитудное значение напряжений в цикле, а среднее напряжение цикла определяется так: $\sigma_m = 0,5 (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})$.

Напряженно-деформированное состояние, возникающее в роторах и лопатках и, в частности, в зонах концентрации, как правило, отличается от одноосного. Поэтому, как и при оценке статической прочности, при определении числа циклов до разрушения необходимо перейти к эквивалентному напряжению, устанавливающему соответствие между сложным и одноосным напряженным состоянием. В качестве эквивалентных напряжений обычно принимают размахи интенсивности напряжений или размахи, определяемые максимальными главными напряжениями $\Delta\sigma_{\max}$. Размахи интенсивности напряжений можно вычислить по формулам, аналогичным (I.17) и (I.20). Для лопаток и роторов, работающих при ползучести, где при длительных сроках эксплуатации значение длительной пластичности материала может быть невысоким, в качестве эквивалентных напряжений принимают $\Delta\sigma_{\max}$, если $\Delta\sigma_{\max} \geq \Delta\sigma$.

При использовании деформационных критериев оценки циклической долговечности необходимо вычислять эквивалентные значения размахов деформаций. В качестве эквивалентных значений принимают интенсивность полных размахов деформаций, которая, например, для ротора может быть вычислена по формуле

$$\Delta\varepsilon_{\text{экр}} = \Delta\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\Delta\varepsilon_r - \Delta\varepsilon_\varphi)^2 + (\Delta\varepsilon_\varphi - \Delta\varepsilon_z)^2 + (\Delta\varepsilon_z - \Delta\varepsilon_r)^2},$$

или размах максимальных полных деформаций в цикле

$$\Delta\varepsilon_{\text{экр}} = \Delta\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}.$$

При оценке циклической долговечности в местах концентрации напряжений размахи напряжений или деформаций необходимо определять с учетом эффективного коэффициента концентрации. При работе материала за пределом упругости или при ползучести максимальные напряжения и деформации в зонах концентрации могут быть вычислены с использованием приближенной зависимости Нейбера (см. п. X.5).

На циклическую долговечность лопаток и роторов, работающих при высокой температуре, будет оказывать влияние ползучесть материала, вносящая соответствующую долю статических повреждений. Приблизительно это влияние можно учесть с помощью так называемого «правила 10%» [15; 123]. В соответствии с этим правилом фактическая расчетная прогнозируемая долговечность N составляет 0,1 долговечности, определенной по кривым малоцик-

ловой усталости. Однако это правило является приближенным и не учитывает многих факторов, таких, как частоту нагружения, выдержку при максимальной нагрузке, характер ползучести и пр.

Несмотря на длительные сроки эксплуатации стационарных паровых турбин и на относительно малую работу при переменных режимах по сравнению, например, с авиационными двигателями или с газотурбинными установками, повреждения от малоцикло-вой усталости, особенно в роторах, являются более вероятными, чем повреждения, связанные с истощением длительной прочности материала. С учетом большого разброса характеристик малоцикло-вой усталости и приближенности расчетных методов запасы по циклической долговечности принимаются существенно большими, чем запасы по напряжениям или по несущей способности.

3. Для рабочих лопаток, испытывающих воздействие переменных динамических напряжений, которые возникают при их колебаниях, помимо условий статической прочности должно быть обеспечено условие динамической прочности. Условие динамической прочности обеспечивается соответствующим запасом прочности, который рассматривается как отношение предельных значений напряжений на стадии возникновения разрушения к действующим переменным напряжениям. Этот запас должен учитывать возможные систематические или случайные отклонения действующих напряжений и характеристик прочности материала. Уровень действующих в лопатках переменных напряжений зависит от многих факторов и изменяется даже в пределах одного типа турбин, что связано в основном с технологическими отклонениями, различиями в возмущающих и демпфирующих силах. Все эти изменения носят случайный характер.

В качестве предельных значений напряжений для рабочих лопаток принимается их конструктивный предел выносливости (см. п. II.10), который также зависит от целого ряда факторов. Наиболее надежным способом оценки конструктивного предела выносливости лопаток являются их усталостные натурные испытания в условиях, близких к эксплуатационным. Однако такие испытания не всегда возможно осуществить, особенно на стадии проектирования турбины. Приближенно для расчетных оценок конструктивный предел выносливости при симметричном цикле можно определить по формуле [13]

$$(\sigma_{-1})_д = \frac{\varepsilon_\sigma \beta_\sigma}{k_\sigma} \sigma_{-1},$$

где σ_{-1} — предел выносливости гладкого образца при симметричном цикле; k_σ — эффективный коэффициент концентрации напряжений (I.5); ε_σ — коэффициент, учитывающий масштабный фактор; β_σ — коэффициент, характеризующий состояние поверхности детали по отношению к поверхности стандартного образца.

Действующие в лопатке напряжения при асимметричном цикле приводятся к эквивалентным переменным напряжениям [13]

$$\sigma_{э\text{кв}} = \sigma_a + \psi_{\sigma\text{д}} \sigma_m,$$

где σ_a и σ_m — амплитуда переменных напряжений и постоянное напряжение в цикле; $\psi_{\sigma\text{д}} = \psi_\sigma (\varepsilon_\sigma \beta_\sigma / k_\sigma)$ — коэффициент влияния постоянных напряжений для детали; ψ_σ — коэффициент влияния постоянных напряжений для материала. При линейном характере диаграммы предельных амплитуд коэффициент ψ_σ может быть приближенно вычислен по формуле

$$\psi_\sigma = (2\sigma_{-1} - \sigma_0) / \sigma_0,$$

где σ_0 — предел выносливости при пульсирующем цикле.

Учитывая, что в рабочей лопатке кроме нормальных напряжений будут иметь место еще и касательные напряжения (напряжения кручения), при оценке динамической прочности следует перейти к интенсивности эквивалентных напряжений

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{(\sigma_a + \psi_{\sigma\text{д}} \sigma_m)^2 + 3(\tau_a + \psi_{\tau\text{д}} \tau_m)^2},$$

где τ_a и τ_m — амплитуда переменных касательных напряжений и постоянное касательное напряжение в цикле; $\psi_{\tau\text{д}} = \psi_\tau (\varepsilon_\tau \beta_\tau / k_\tau)$ — коэффициент влияния постоянных касательных напряжений для детали.

Тогда условие динамической прочности для лопаток может быть представлено в виде

$$n_{\text{э}} = \frac{(\sigma_{-1})_д}{\sigma_{\text{экв}}} = \frac{(\sigma_{-1})_д}{\sqrt{(\sigma_a + \psi_{\sigma\text{д}} \sigma_m)^2 + 3(\tau_a + \psi_{\tau\text{д}} \tau_m)^2}} \geq [n_y],$$

где $[n_y]$ — нормативное значение запаса динамической прочности.

В п. I.4 было показано, что сведения о величине переменных возмущающих сил в работающей турбине недостаточны и поэтому динамические напряжения, возникающие в рабочих лопатках, могут быть определены только путем тензометрических испытаний облопачивания в условиях эксплуатации. Ввиду этого указанную выше оценку динамической прочности рабочих лопаток при проектировании произвести не удастся. Поэтому для сравнительных оценок обычно пользуются тем обстоятельством, что возмущающие силы в турбине приблизительно пропорциональны средней величине статической паровой нагрузки, т. е. динамические напряжения приблизительно пропорциональны статическим напряжениям парового изгиба (см. формулу III.26). Однако коэффициент пропорциональности между этими напряжениями, зависящий от многих факторов, может изменяться от ступени к ступени, как и величина самих возмущающих сил. Специальные оценки (см. п. II.7) указывают, что он может быть весьма большим, если лопатки не связаны в пакеты и динамиче-

ские напряжения не уменьшаются за счет пакетного множителя (см. п. II.8) и конструкционного демпфирования (см. п. II.6).

Исходя из статистических данных о работе большого числа облопаченных колес, статические напряжения парового изгиба при проектировании ограничивают относительно невысокими численными значениями. Для рабочих лопаток непарциальных ступеней, изготовленных из высокохромистых сталей с пределом текучести 500—700 МПа, эти значения напряжений обычно составляют 30—40 МПа. Для ступеней с парциальным подводом пара напряжения парового изгиба допускаются меньшими и не превышают 15—20 МПа. В случае использования материалов с другими механическими свойствами (более высокими или более низкими) эти значения напряжений должны быть соответствующим образом скорректированы. Коэффициент корреляции, связывающий допускаемые статические напряжения парового изгиба с усталостными характеристиками материала, можно найти, используя диаграмму предельных амплитуд напряжений с учетом положительного опыта эксплуатации рабочих лопаток с принятыми ранее значениями напряжений.

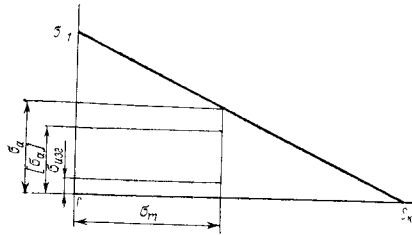


Рис. 1.49. Упрощенная диаграмма предельных амплитуд напряжений

С учетом высоких значений напряжений в зонах концентрации для этой оценки целесообразнее использовать диаграмму предельных амплитуд в истинных напряжениях [150], т. е. значения предела прочности и предела выносливости материала принимать с учетом изменения площади поперечного сечения образца. Ввиду того что при усталостных испытаниях площадь поперечного сечения изменяется незначительно, ее уменьшение можно не учитывать и в качестве предела выносливости принимать его условное значение. Истинный предел прочности может быть определен по приближенной формуле [199]

$$S_k = \sigma_b (1 + 1,35\psi_k),$$

где σ_b — условный предел прочности материала; ψ_k — относительное сужение поперечного сечения образца при разрушении.

Будем использовать упрощенную диаграмму предельных амплитуд, принимая линейную зависимость между переменными σ_a и постоянными σ_m напряжениями в цикле (рис. 1.49). Откладывая на оси абсцисс статические суммарные напряжения в лопатке, вызванные действием центробежных сил и сил парового потока, с учетом концентрации напряжений¹ находим предельную амплитуду переменных напряжений σ_a .

¹ Коэффициент концентрации должен быть определен с учетом упругопластических деформаций или ползучести материала (см. п. X 5).

Учитывая теперь эффективный коэффициент концентрации напряжений k_σ , коэффициент, учитывающий масштабный фактор ε_σ , и коэффициент, характеризующий состояние поверхности лопатки по отношению к поверхности стандартного образца β_σ , найдем допускаемые значения динамических напряжений в лопатке для данного материала

$$[\sigma_a] = \sigma_a \frac{\varepsilon_\sigma \beta_\sigma}{k_\sigma}.$$

Искомый коэффициент корреляции определим как отношение этих допускаемых динамических напряжений к принятым статическим напряжениям парового изгиба $\sigma_{изг}$:

$$K = [\sigma_a] \sigma_{изг}$$

При наличии большого количества данных о работе облопаченных колес можно произвести статистическую обработку коэффициентов корреляции, полученных для различных лопаток при рабочей температуре. Определенный таким образом коэффициент корреляции может оказаться полезным для ориентировочного назначения допускаемых напряжений статического парового изгиба в лопатках, изготовленных, например, из сталей или сплавов с более высокими прочностными свойствами. Безусловно, в каждом конкретном случае нужно учитывать условия работы лопаток данной ступени, снижение конструктивного предела выносливости в процессе эксплуатации и многие другие факторы.

Учитывая относительно тяжелые последствия усталостного разрушения рабочих лопаток, материал для них должен иметь высокую сопротивляемость распространению трещин (высокую трещиностойкость), чтобы возникшие усталостные трещины имели медленное развитие и могли быть обнаружены во время ревизий лопаточного аппарата и ликвидированы.

Глава II

КОЛЕБАНИЯ РАБОЧИХ ЛОПАТОК И ДИСКОВ

II.1. КОЛЕБАНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ЛОПАТОК

Колебания отдельной лопатки можно легко наблюдать в лабораторных условиях, закрепив хвост лопатки в тисках и приложив к ней возмущающую силу, частоту которой можно регулировать от нескольких герц до нескольких тысяч герц¹. Источником возмущающей силы может быть электромагнит (для лопаток, изготовленных из магнитного материала); электродинамический или

¹ Частота f , равная числу колебаний в секунду (пер/с или Гц), связана с круговой частотой p и периодом колебаний T , т. е. временем, за которое происходит одно полное колебание, равенствами: $p = 2\pi f$ 1/с, $T = 1/f = 2\pi/p$ с.

воздушный вибратор; закрепленный на лопатке пьезокристалл, к которому подводится переменное напряжение с регулируемой частотой и т. д.

Рассмотрим колебания незакрученной лопатки постоянного сечения. Будем считать, что сечения имеют ось симметрии, перпендикулярную оси минимального момента инерции, на которой лежат центр тяжести и центр изгиба (т. е. точка, при приложении в которой перерезывающей силы изгиб лопатки не сопровождается ее кручением). Возбуждая колебания лопатки сначала силой с низкой частотой, а затем повышая ее, можно заметить следующее

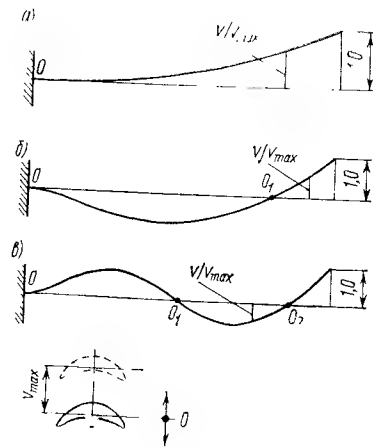


Рис. 11.1 Формы изгибных колебаний лопатки, зашеченной в корневом сечении и свободной на вершине

явлению резонанса. При изменении величины возмущающей силы изменяется только амплитуда резонансных колебаний, но не их частота.

Наблюдать кривую прогиба при колебаниях можно с помощью стробоскопической лампы, которая дает весьма кратковременные вспышки с устанавливаемой по желанию частотой, или скоростной киносъемки. Задав частоту освещения стробоскопической лампой несколько ниже частоты колебаний лопатки, увидим медленно колеблющуюся лопатку и сможем отчетливо наблюдать ее кривую прогиба (собственную форму, соответствующую данной частоте колебаний). Экспериментальное определение собственных форм может быть с большой точностью осуществлено также с помощью голографических методов. Кривая прогиба, соответствующая низшей частоте, изображена на рис. 11.1, а, где максимальный прогиб на вершине условно принят за единичный. При этой частоте колебания происходят перпендикулярно минимальной оси инерции и называются первым тоном тангенциальных колеба-

ние. При приближении частоты f возмущающей силы к некоторому определенному значению амплитуда колебаний лопатки начинает быстро возрастать, достигает некоторого максимума и затем, при последующем увеличении частоты всего на несколько процентов, столь же быстро падает. При дальнейшем повышении частоты возмущающей силы амплитуда может уменьшиться вплоть до нуля, однако затем опять резко возрастет при достижении новой, вполне определенной частоты, после чего процесс полностью повторится. Максимальные колебания соответствуют совпадению частоты возмущающей силы с частотой собственных колебаний лопатки, т. е.

на лопатки. Кривые прогиба, соответствующие второй и третьей частоте колебаний в направлении, перпендикулярном минимальной оси инерции, изображены на рис. 11.1, б и в. Эти колебания называются соответственно вторым и третьим тонами тангенциальных колебаний лопатки. Рассматривая форму прогиба, соответствующую этим колебаниям, можно обнаружить, что по высоте лопатки имеются сечения, остающиеся неподвижными при колебаниях (сечения, соответствующие точке O_1 на рис. 11.1, б и точкам O_1 и O_2 на рис. 11.1, в), а прогиб при переходе через эти сечения меняет знак, т. е. изменяется фаза колебаний.

Точки лопатки, остающиеся неподвижными при колебаниях, образуют на ее поверхности узловую линию, в рассматриваемом случае перпендикулярную к оси лопатки. Положение узловой линии можно определить и без стробоскопического освещения, посыпая поверхность колеблющейся лопатки песком или порошком мела и наблюдая скопление порошка в районе узловых линий, который находит применение и при изучении колебаний закрученных лопаток переменного сечения, является метод их нахождения с помощью пьезощупа. При приложении пьезощупа к произвольной точке лопатки, совершающей резонансные колебания, на экране осциллографа, на который подаются сигналы с пьезощупа и возбуждающего колебания генератора, можно наблюдать эллипс, вырождающийся в прямую при подходе к узловой линии.

Изменяя частоту возмущающей силы, можно заметить, что лопатка совершает резонансные колебания не только в направлении, перпендикулярно минимальной оси инерции, но и в направлении, с ней совпадающем. При этом изгиб лопатки происходит относительно максимальной оси инерции, а колебания называются аксиальными. Собственная форма, соответствующая низшей частоте аксиальных колебаний, совпадает с формой, изображенной на рис. 11.1, а, и называется первым тоном аксиальных колебаний. Частота первого тона аксиальных колебаний лопатки, жестко зашеченной в корневом сечении, будет всегда выше частоты первого тона тангенциальных колебаний, но обычно ниже частоты второго тона тангенциальных колебаний. Это легко показать, учитывая, что частоты первого и второго тона изгибных колебаний отдельной лопатки постоянного сечения, жестко зашеченной в корневом сечении и свободной на вершине, определяются следующими формулами (см. п. XI 3):

$$f_1 = \frac{0,56}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{F\gamma}}; \quad (11.1)$$

$$f_2 = \frac{3,51}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{F\gamma}}; \quad (11.2)$$

где l — длина лопатки; F — площадь поперечного сечения; γ/g — плотность материала лопатки (γ — удельный вес; g — ускорение

свободного падения); J — момент инерции поперечного сечения (минимальный или максимальный).

Из формул (II.1) и (II.2) получим, что

$$f_{1a} = f_{1t} \sqrt{J_{\max}/J_{\min}}; \quad (II.3)$$

$$f_{1a} = 0,16 f_{2t} \sqrt{J_{\max}/J_{\min}}, \quad (II.4)$$

где f_{1t} и f_{1a} — частоты первого тона тангенциальных и аксиальных колебаний отдельной лопатки; f_{2t} — частота второго тона тангенциальных колебаний.

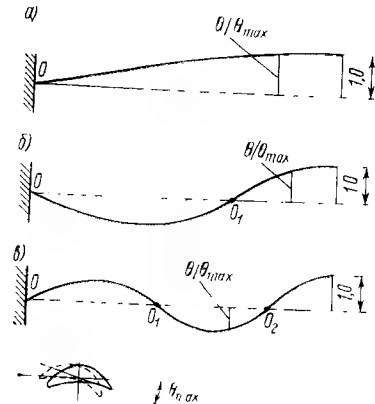


Рис. II.2. Формы крутильных колебаний лопатки, зашпеченной в корневом сечении и свободной на вершине

Таким образом, для того чтобы частота первого тона аксиальных колебаний была выше частоты второго тона тангенциальных колебаний, должно выполняться неравенство $J_{\max} \geq 39J_{\min}$, которое для лопаток постоянного сечения, как правило, не соблюдается. При дальнейшем повышении частоты возмущающей силы можно обнаружить частоты второго и третьего тонов аксиальных колебаний, соответственно с одной и двумя узловыми линиями, перпендикулярными оси лопатки (рис. II.1, б и в), а также более высокие частоты аксиальных колебаний.

Помимо тангенциальных и аксиальных изгибных колебаний незакрученная лопатка постоянного сечения может совершать крутильные колебания, при которых поперечные сечения поворачиваются относительно некоторой точки, называемой центром кручения. При частоте, соответствующей первому тону крутильных колебаний, поворот всех сечений происходит в одну и ту же сторону, а узловая линия оказывается параллельной оси лопатки (рис. II.2, а). При втором тоне крутильных колебаний дополнительно появляется узловая линия, перпендикулярная оси лопатки (точка O_1 на рис. II.2, б), при третьем тоне крутильных колебаний — две узловые линии, перпендикулярные оси лопатки (точки O_1 и O_2 на рис. II.2, в) и т. д.

Как показано в п. XII.1, частоты i -го тона крутильных колебаний отдельной лопатки постоянного сечения определяются по формуле

$$f_{i,kr} = \frac{(2i-1)}{4l} \sqrt{\frac{GT_0 g}{J_p \gamma}}, \quad (II.5)$$

где G — модуль упругости второго рода (модуль сдвига); T_0 — геометрическая жесткость на кручение; J_p — полярный момент инерции поперечного сечения.

Таким образом, помимо спектра частот тангенциальных и аксиальных изгибных колебаний лопатка имеет и спектр частот крутильных колебаний. Порядок следования частот зависит от соотношения геометрических характеристик ($J_{\min}$, $J_{\max}$, T_0 , J_p , l) в соответствии с формулами (II.2), (II.3) и (II.5) и для данной лопатки является вполне определенным. Лопатка может совершать также продольные колебания, однако их частоты, как правило, слишком высоки и чисто продольные колебания не представляют практического интереса.

Результаты, приведенные в п. XI.3 и п. XII.1, показывают, что для незакрученной лопатки постоянного сечения существуют определенные соотношения между различными собственными частотами изгибных и крутильных колебаний. Так, отношение последовательных собственных частот изгибных колебаний (тангенциальных и аксиальных) равно

$$1 : 6,27 : 17,6 : 34,4 : 56,8 \dots, \quad (II.6)$$

а отношение последовательных собственных частот крутильных колебаний, как следует из приведенной выше формулы (II.5), составляет

$$1 : 3 : 5 : 7 \dots \quad (II.7)$$

Изменение геометрических характеристик по высоте лопатки меняет указанные выше соотношения. Например, в п. XIV.1 приведены результаты вычислений собственных частот незакрученной клиновидной лопатки, у которой $F(1)/F_0 = 0,564$, где $F(1)$ и F_0 — соответственно площади периферийного и корневого сечения лопатки. Оказалось, что отношение последовательных собственных частот тангенциальных колебаний составляет $1 : 4,59 : 11,8 : 22,7 : 36,7$, т. е. частотный спектр оказывается более густым, чем частотный спектр лопатки постоянного сечения, определяемый соотношениями (II.6).

В пп. XI.6 и XII.1 показано, что наличие бандажной полки на вершине лопатки постоянного сечения также изменяет соотношения (II.6) и (II.7), а несовпадение центра тяжести и центра изгиба лопатки постоянного сечения приводит к связанности изгибных и крутильных колебаний и относительному изменению их собственных частот. Значительно более сложными являются колебания закрученных лопаток переменного сечения. В п. XV.1 показано, что в самом общем случае колебания будут связанными изгибно-крутильно-продольными, однако в большинстве случаев можно ограничиться рассмотрением изгибно-крутильных колебаний. Спектры тангенциальных, аксиальных или крутильных колебаний для закрученных лопаток переменного сечения не будут проявляться раздельно, хотя для определенных собственных форм будут являться преобладающими, например, или изгиб относительно минимальной оси инерции, или кручение поперечных сечений. Собственная форма колебаний закрученной лопатки

переменного сечения определяется заданием перемещений центров изгиба различных поперечных сечений лопатки. Эти перемещения задаются проекциями в плоскости диска u и в плоскости, ей перпендикулярной v т. е. заданием тангенциальной и аксиальной составляющих прогиба, а также заданием углов поворота различных сечений θ относительно центров изгиба (см. гл. XV). Узловые линии для закрученных лопаток переменного сечения не будут параллельны или перпендикулярны оси лопатки, как для рассмотренных выше частных случаев колебаний, а будут составлять с осью лопатки различные углы.

Приведенная в настоящем параграфе классификация различных групп колебаний лопаток оказывается применимой не только к лопаткам постоянного сечения. Для слабо закрученных лопаток переменного сечения взаимное влияние тангенциальных и аксиальных а также изгибных и крутильных колебаний в ряде случаев оказывается относительно слабым, поэтому полученные выше закономерности частотного спектра для лопатки постоянного сечения остаются более или менее справедливыми и в этом случае. Даже для закрученных лопаток переменного поперечного сечения упрощенная классификация оказывается в ряде случаев полезной, позволяя указать геометрические характеристики лопатки, воздействие на которые в наибольшей степени повлияет на ту или иную собственную частоту.

II.2. КОЛЕБАНИЯ ПАКЕТОВ ЛОПАТОК

Рабочие лопатки паровых турбин, как правило, соединяются друг с другом в пакеты с помощью различных по конструкции связей. Вследствие этого практический интерес представляет изучение особенностей колебаний пакетов лопаток.

Экспериментально частоты колебаний пакетов могут быть определены непосредственно на облопаченном диске или роторе, однако еще до изготовления вновь проектируемой турбины частоты пакетов лопаток определяются на специально изготовленных оправках (рис. II 3), имитирующих часть диска или ротора. Оправка крепится к массивной плите с помощью болтов, а частоты колебаний возбуждаются таким же образом, как и частоты отдельных лопаток. В некоторых случаях принимают специальные меры по виброизоляции оправки от фундамента [218] с тем чтобы не исказить результатов испытаний.

Как и ранее, начнем анализ различных форм колебаний пакета лопаток с наиболее простого случая — колебаний незакрученных лопаток постоянного сечения, у которых центры тяжести поперечных сечений совпадают с центрами изгиба. Будем считать, что соединение лопаток в пакеты осуществляется с помощью банджа или установленных в промежуточных сечениях проволочных паяных связей. Возбуждая пакет возмущающей силой с переменной частотой, как и при изучении колебаний отдельных лопаток

обнаружим появление резонансов при вполне определенных значениях частот возмущающей силы. Низшая частота, при которой наступает резонанс, будет сравнительно близка к частоте первого тона тангенциальных колебаний отдельной лопатки, заземленной по хвосту и свободной на вершине. Все лопатки пакета при этой форме колеблются в фазе, а их амплитуды практически совпадают друг с другом. Колебания такого типа формы которых изображены на рис. II 4, называются первым тоном тангенциальных колебаний пакета и обозначаются колебаниями типа A_0 . Так как амплитуды колебаний лопаток практически не отличаются друг от друга, то в связях (бандже или проволоке) при колебаниях возникают только изгибные напряжения и не возникают напряжения растяжения — сжатия. Изгибная жесткость связей повышает частоты колебаний типа A_0 , а масса связей их снижает, в результате чего частоты пакета сравнительно мало отличаются от частот отдельных лопаток. Частоты колебаний типа A_0 мало зависят от числа лопаток в пакете, они лишь несколько повышаются при увеличении их числа.



Рис. II 3 Пакет лопаток набранный в оправке

Начиная с пяти-шести лопаток в пакете, зависимость частот колебаний типа A_0 от числа лопаток практически отсутствует.

Частота собственных колебаний пакета лопаток постоянного сечения может быть вычислена по формуле

$$f_n = \varphi f,$$

где φ — коэффициент учитывающий наличие связей, f — частота отдельной лопатки.

С учетом формулы (II 1) для первой собственной частоты отдельной лопатки для частоты колебаний пакета типа A_0 получим

$$f_n = \varphi \frac{0,56}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{F\gamma}} \quad (II 8)$$

Значения коэффициента φ для первого тона колебаний лопаток, связанных банджом, даны на рис. II 4, где по оси абсцисс отложен коэффициент k_g — отношение изгибной жесткости

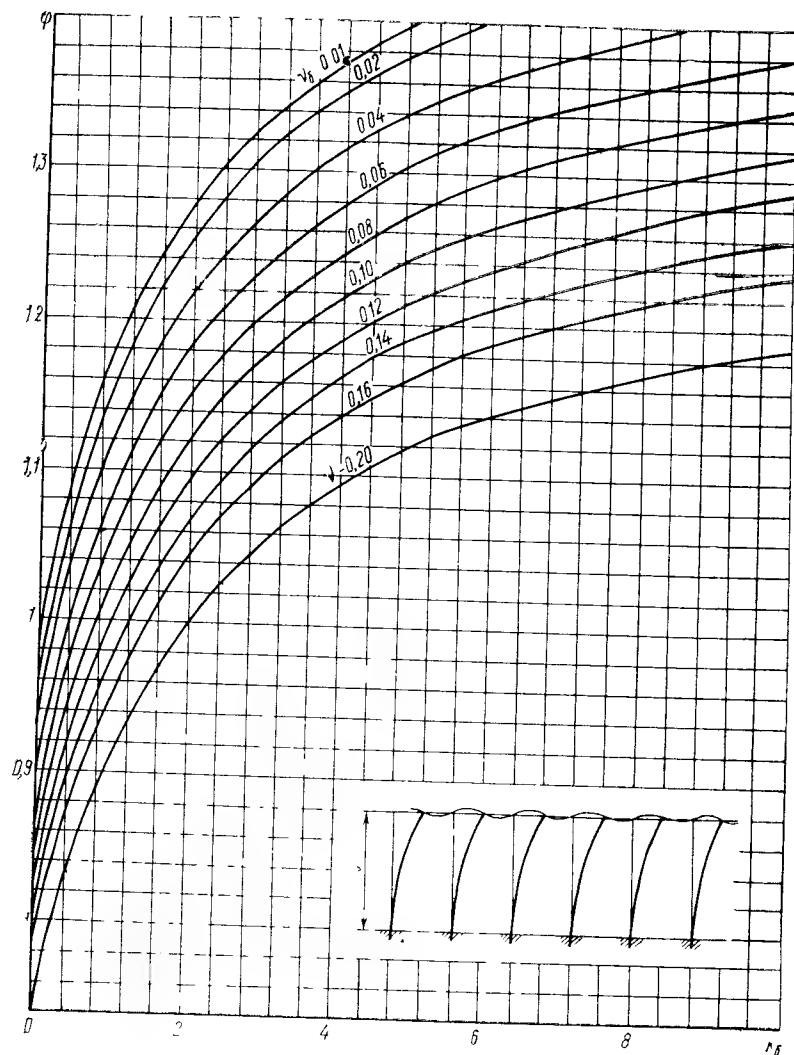


Рис. II 4 Влияние массы и жесткости бандажа на частоты колебаний типа Λ_0

бандажа к жесткости лопатки. Для более общего случая, когда минимальная ось инерции поперечного сечения не параллельна оси вращения, а составляет с ней угол β , имеем (см. п. XI 7)

$$k_6 = \frac{12(m-1)H_6 J_6 l \cos^2 \beta}{m J t_6},$$

где m — число лопаток в пакете; J_6 — минимальный момент инерции бандажа; t_6 — шаг бандажа; H_6 — поправочный коэффициент, представляющий отношение фактической величины мо-

мента, действующего от бандажа на лопатку, к расчетной его величине. Значения H_6 зависят от способа соединения лопаток с бандажом, угла установки лопатки β , а также отношения шага бандажа к хорде лопатки и к максимальной толщине периферийного сечения. Например, ориентировочные значения коэффициента H_6 для бандажа, приклепанного к лопатке, составляет $H_6 \approx 0,1 \div 0,3$; для бандажа, приклепанного и припаянного, $H_6 \approx 0,6 \div 1$, а для пакета, состоящего из бандажированных лопаток, сваренных по бандажным полкам, может оказаться $H_6 > 1,0$. Значение H_6 в последнем случае может быть больше единицы потому, что фактически деформируемая длина бандажа меньше шага t_6 , как это поясняется в п. IV.2.

Кривые для коэффициента ϕ на рис. II.4 построены для различных значений параметра ν_6 — отношения массы шага бандажа к массе профильной части одной лопатки:

$$\nu_6 = m_6/m_l = V_6/V_l = V_6/F_l.$$

Как видно, значения ϕ , характеризующие отношение частоты колебаний типа A_0 к частоте колебаний отдельной лопатки, могут быть как больше, так и меньше единицы. Значения возрастают по мере увеличения жесткости бандажа, т. е. коэффициента k_6 , и уменьшаются по мере увеличения массы бандажа, т. е. коэффициента ν_6 . В п. XI. 8 показано, что максимальное значение коэффициента ϕ , достигаемое при условии $\nu_6 = 0$ и $k_6 \rightarrow \infty$, для колебаний типа A_0 составляет 1,59.

При дальнейшем повышении частоты возмущающей силы возникают резонансные колебания, не свойственные отдельным лопаткам. При освещении стробоскопом видно, что узловые линии по высоте лопаток при этих колебаниях отсутствуют, максимальные амплитуды имеют место в средней части лопаток, а их вершины остаются почти неподвижными. В узком частотном диапазоне заключено несколько собственных форм, которым соответствуют почти неизменные формы прогиба по высоте лопаток. Указанные собственные формы отличаются числом узлов (числом перемен знака по длине пакета), т. е. числом перемен фазы колебаний соседних лопаток. Эту группу собственных форм будем называть колебаниями типа B_0 .

На рис. II.5 показано распределение амплитуд по высоте лопаток и длине пакета при различных собственных формах колебаний типа A_0 и B_0 пакета из десяти лопаток; там же указано расположение узлов по длине пакета для различных форм колебаний. В п. XI.9 показано, что существует $m-1$ различных собственных колебаний типа B_0 при m лопатках в пакете. Поскольку амплитуды различных лопаток в пакете при колебаниях типа B_0 отличаются друг от друга, то связи (бандаж, проволока и т. д.) испытывают не только напряжения изгиба, но и напряжения растяжения—сжатия. По этой причине на частоты колебаний типа B_0 влияет не только относительная изгибная

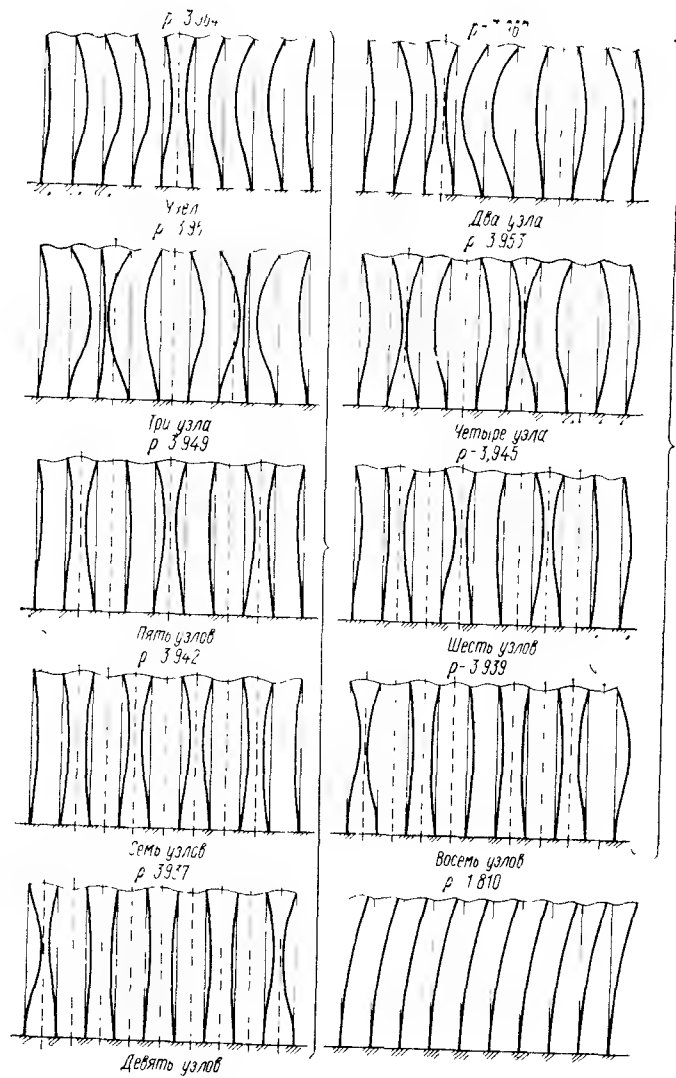


Рис. 11.5 Формы и частоты колебаний типа A_0 и B_0 пакета из десяти лопаток, связанных бандажом

жесткость бандаж, характеризуемая коэффициентом k_6 , но и относительная жесткость бандаж на растяжение или обратная ей величина — относительная податливость. В п. XI.9 показано, что относительная податливость бандаж на растяжение μ_6 определяется формулой

$$\mu_6 = \frac{Jt_6}{4F_6 l^3 \sin^2[k\pi(2m)]} = \mu_6' \frac{1}{4 \sin^2[k\pi(2m)]},$$

F_6 — площадь поперечного сечения бандаж; k — число узлов по длине пакета.

Как видно, относительная податливость на растяжение зависит не только от геометрических размеров лопаток и бандаж, но и от числа лопаток в пакете, а также от числа узлов по длине пакета, возрастая при уменьшении числа узлов.

Верхний предел частот колебаний типа B_0 , который достигается при условии $\mu_6 = 0$, $\nu_6 = 0$, $k_6 \rightarrow \infty$, соответствует частоте колебаний лопатки с заделанной вершиной и в 6,36 раза превышает частоту колебаний отдельной консольной лопатки. Во многих практических случаях выполняются соотношения: $k_6 \approx 1$, $\mu_6 \ll 1$. При этих условиях частоты колебаний типа B_0 оказываются близкими к частоте колебаний отдельной лопатки с опертой, а не с заделанной вершиной. В п. XI.9 показано, что при условии $\mu_6 = 0$ и $k_6 = 0$ частоты колебаний типа B_0 , совпадающие в этом случае с частотой отдельной лопатки с опертой вершиной, всего в 4,39 раза превышают частоту первого тона отдельной консольной лопатки T_0 , что эта оценка может быть достаточно близкой к действительности, подтверждается в [173], где указывается, что частоты колебаний типа B_0 рабочих лопаток турбин обычно в 4,4—5 раз превышают частоты первого тона отдельных лопаток.

При вычислениях, результаты которых приведены на рис. 11.5, было принято, что бандаж нерастяжим, т. е. $\mu_6 = 0$, а относительная изгибная жесткость и масса бандаж определялись следующими значениями: $k_6 = 0,313$; $\nu_6 = 0,0851$. На рис. 11.5 использованы следующие обозначения: $\rho = 1/p/a$; $p = 2\pi f_n$; $a^2 = EJg/(Fl^4\gamma)$.

Учитывая выражения (11.1) и (11.8), найдем, что связь между величинами φ и ρ определяется следующей формулой:

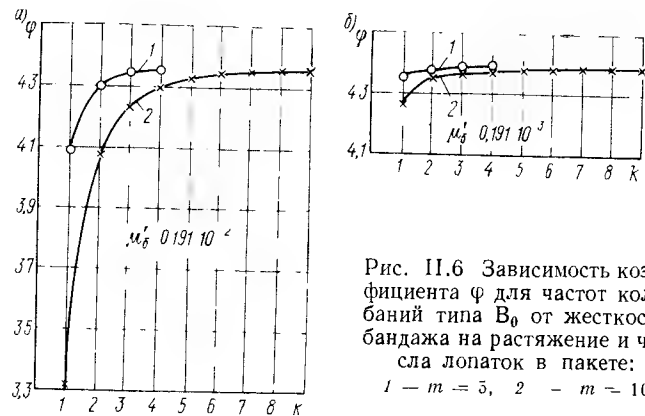
$$\varphi = (\rho 1,875)^2.$$

Как следует из приведенных на рис. 11.5 данных, в рассматриваемом примере для всех частот колебаний типа B_0 коэффициент φ находится в диапазоне $4,47 > \varphi > 4,41$, т. е. частоты действительно оказались близкими к частоте колебаний лопатки с опертой вершиной, а влияние изгибной жесткости бандаж оказалось незначительным. Так как относительная величина прогиба вершин лопаток при колебаниях типа B_0 близка к нулю, то влияние массы бандаж на частоты этих колебаний оказывается пренебрежимо малым.

Если принять $k_6 = \nu_6 = 0$, то легко показать аналитически влияние на собственные частоты колебаний типа B_0 относительной жесткости бандаж на растяжение, а также числа лопаток в пакете, т. е. выяснить влияние величин μ_6' и m (см. п. XI.9). На рис. 11, 6, а приведена зависимость коэффициента φ для собственных частот колебаний типа B_0 от числа узлов по длине пакета k при $m = 5$ и $m = 10$ (величина μ_6' подсчитана в соот-

ветствии с геометрическими размерами лопаток и бандажей и равна $\mu'_6 = 0,191 \cdot 10^{-2}$). На рис. II.6, б приведена подобная же зависимость при условии уменьшения относительной податливости бандажа на растяжение в 10 раз.

Результаты, указанные на рис. II.6, свидетельствуют о том, что диапазон частот колебаний типа B_0 расширяется по мере увеличения податливости бандажа на растяжение и числа лопаток в пакете. Последнее обстоятельство имеет следующее физическое объяснение: если число лопаток в пакете достаточно велико, то при внутрипакетных колебаниях с малым числом узлов по длине пакета фазы колебаний нескольких соседних лопаток



оказываются одинаковыми, а силы, действующие от этих лопаток на бандаж, суммируются, вследствие чего деформация бандажа возрастает.

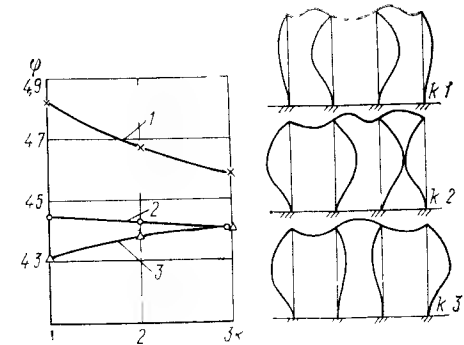
Определение собственных частот колебаний лопаток типа B_0 при одновременном учете величин μ_6 , ν_6 и k_6 требует увеличения объема вычислений, однако не приводит к каким-либо качественным изменениям в частотном спектре колебаний типа B_0 . Единственное отличие в этом случае заключается в порядке следования различных частот колебаний. Если без учета податливости бандажа на растяжение ($\mu_6 = 0$; $k_6 \neq 0$) наивысшая частота, как это следует из рис. II.5, соответствует форме с одним узлом по длине пакета, то при учете податливости бандажа и пренебрежения его изгибной жесткостью ($\mu_6 \neq 0$; $k_6 = 0$) наивысшей оказывается частота, соответствующая форме с $m - 1$ числом узлов — рис. II.6. В общем случае порядок следования частот будет определяться соотношением величин μ_6 и k_6 . Это подтверждается результатами расчетов, приведенными на рис. II.7, где показана зависимость коэффициента φ для частот колебаний типа B_0 от числа узлов по длине пакета, состоящего из четырех лопаток, при различных соотношениях между k_6 и μ_6 . Там же приведены формы колебаний лопаток в пакете для

случая $k_6 = 0,313$; $\mu'_6 = 0,99 \cdot 10^{-4}$. Аналогичные данные получены в [236] для пакета из шести лопаток, соединенных бандажом ($k_6 = 0,0997$; $\mu'_6 = 0,737 \cdot 10^{-3}$; $\nu_6 = 0,101$). Диапазон частот колебаний типа B_0 , определяемый как $(f_{\max} - f_{\min})/f_{\min}$, оказался равным примерно 4%, причем низшая собственная частота соответствовала форме с одним узлом по длине пакета.

Если повышать частоту возмущающей силы далее, то возникнут резонансные колебания, сравнительно близкие ко второму тону тангенциальных колебаний отдельной лопатки. Амплитуды всех лопаток при этой форме будут практически равны друг другу, а по высоте лопатки появится узел аналогично тому, как появился узел при втором тоне тангенциальных колебаний отдельной лопатки. Колебания подобного типа будем называть колебаниями типа A_1 .

В связи с равенством амплитуд лопаток в пакете растяжимость бандажа не влияет на собственные частоты этих колебаний, являющихся функцией только k_6 и ν_6 . Зависимость коэффициента φ для частот колебания типа A_1 от значений k_6 и ν_6 изображена на рис. II.8; там же указаны формы колебаний лопаток в пакете. Как следует из рисунка, частоты колебаний типа A_1 сравнительно мало отличаются от частоты второго тона тангенциальных колебаний отдельной лопатки, которому соответствует значение $\varphi = 6,27$. В п. XI.8 показано, что влияние бандажа на собственные частоты колебаний типа A_1 оказывается даже меньше, чем на частоты типа A_0 . Наивысшего значения частоты колебаний типа A_1 достигают при условии $\nu_6 = 0$, $k_6 \rightarrow \infty$. Это значение оказывается всего на 37,5% выше частоты второго тона тангенциальных колебаний отдельной лопатки. Значение $\varphi = 6,27 \cdot 1,375 = 8,62$ является предельным для этой формы колебаний.

При дальнейшем повышении частоты возмущающей силы будет возбуждаться группа $m - 1$ собственных форм, при которых вершины лопаток почти неподвижны, амплитуды различных лопаток отличаются как по величине, так и по знаку, а в средней части лопаток появляется узел. Эти колебания назовем колебаниями типа B_1 . Затем возбудится форма, при которой все лопатки



пакета колеблются в фазе, но имеется два узла по высоте лопатки (колебания типа A_2) и т.д. В дальнейшем колебания типа А будем называть синфазными, а колебания типа В — внутрипакетными колебаниями пакета лопаток

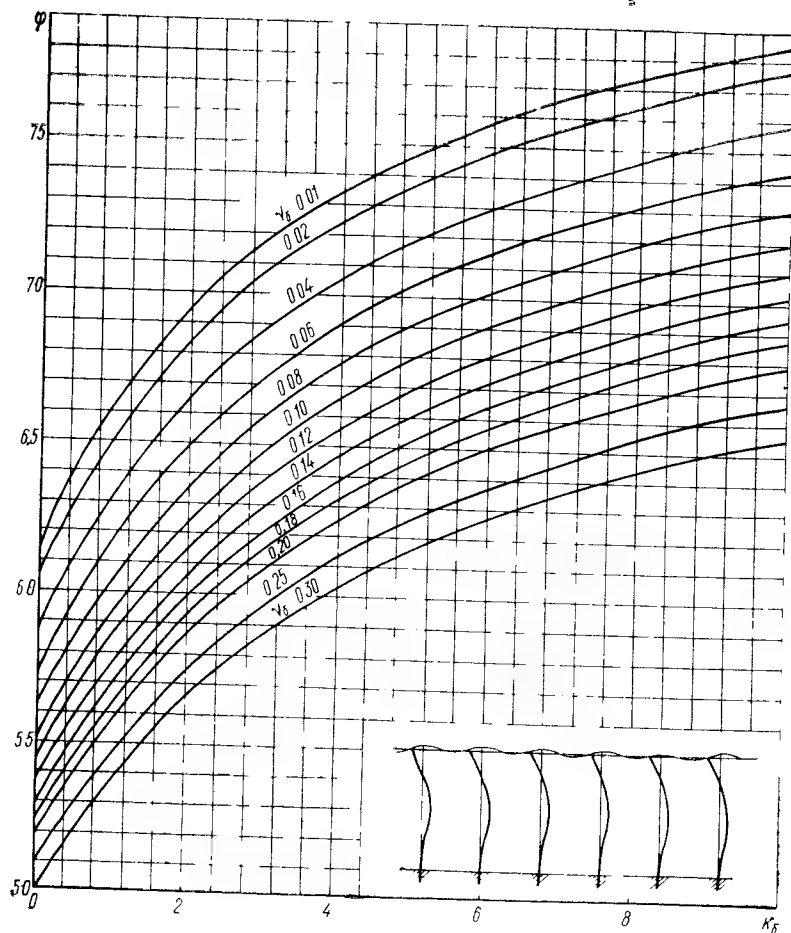


Рис II 8 Влияние массы и жесткости бандажа на частоты колебаний типа A_1

Колебания типа A_0 , A_1 , A_2 чередуются с колебаниями типа B_0 , B_1 , B_2 . На рис II 9 показана зависимость собственных частот колебаний типа A_0 , B_0 и A_1 от относительной жесткости и массы бандажа (k_6 и ν_6) при условии, что растяжимостью бандажа можно пренебречь ($\mu_0 = 0$). Как видно, в этом случае величина ν_6 вообще не влияет на колебания типа B_0 , а различия в частотах этих колебаний определяются только величиной k_6 .

Физически это объясняется тем, что при условии $\mu_0 = 0$ вершины лопаток при внутрипакетных колебаниях остаются почти неподвижными, и изменение массы бандажа не оказывает влияния на частоты этих колебаний

Зная геометрические размеры лопаток и бандажа, можно вычислить величины k_6 и ν_6 и по графику II 9 определить коэффициент ϕ для собственных частот колебаний A_0 , B_0 и A_1 . Для колебаний типа B_0 не необходимо в соответствии с результатами п. XI 9 убедиться, что при заданных значениях μ_6 , k и t влиянием растяжимости бандажа можно пренебречь

Выше были рассмотрены колебания типа А и В при соединении лопаток связями, расположенными на вершине. Естественно, что кроме бандажей или вместо них лопатки могут соединяться в пакеты, например проволочными связями, расположенными в промежуточных сечениях по высоте. Качественные особенности колебаний пакетов лопаток в этом случае полностью совпадают с рассмотренными выше особенностями колебаний пакетов лопаток, соединенных бандажом. Например, на рис II 10 и II 11 показана зависимость частот колебаний типа A_0 и A_1 от относительной величины массы (ν_6) и изгибной жесткости паяной проволоки ($k_{п}$) при различном расположении проволоки по высоте лопатки

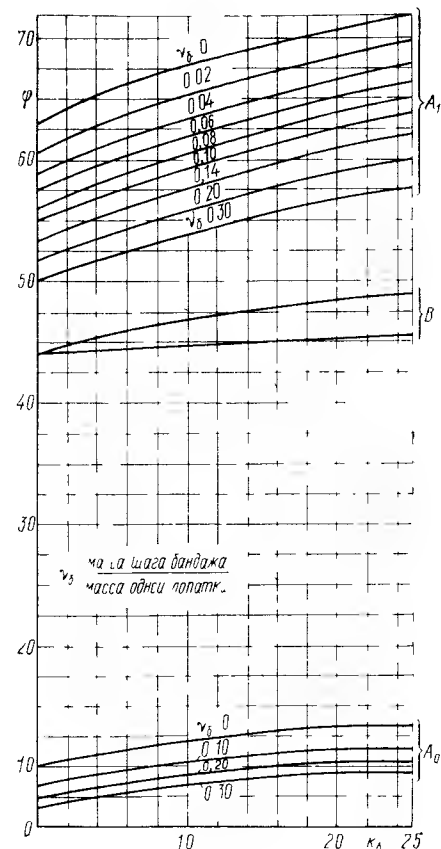


Рис II 9 Влияние массы и жесткости бандажа на частоты колебаний типа A_0 и A_1

Как видно, максимальное повышение частот колебаний типа A_0 возможно при расположении проволоки вблизи сечения с координатой $\xi_1 = 0,6$, а колебаний типа A_1 — при расположении проволоки вблизи сечения с координатой $\xi_{11} = 0,8$. Указанные на рис II 10 и II 11 зависимости объясняются тем, что при расположении проволоки вблизи вершины лопатки в случае колебаний типа A_0 влияние массы проволоки оказывается более

существенным, чем влияние ее жесткости, и частоты, как правило, снижаются при $\zeta_n > 0,6$. Для колебаний типа A_1 вблизи сечения с координатой $\zeta_n = 0,8$ имеется узел (см рис II.1, б), что сводит к минимуму влияние массы проволоки при ее располо-

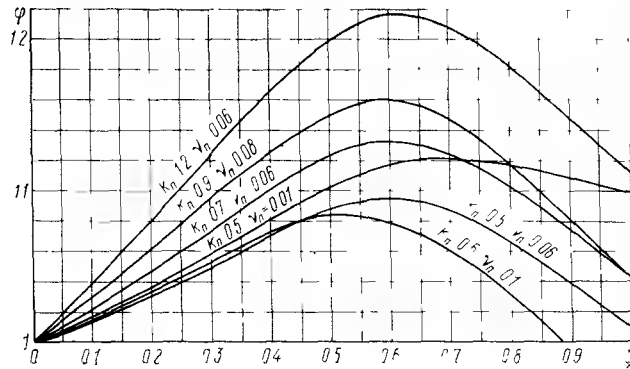


Рис II 10 Зависимость коэффициента φ для частот колебаний типа A_0 от места расположения проволоки по высоте лопатки

жении в этом сечении и обеспечивает максимальное возрастание собственных частот. В целом из рис II 10 и II 11 следует, что изменение места расположения проволоки по высоте лопатки не

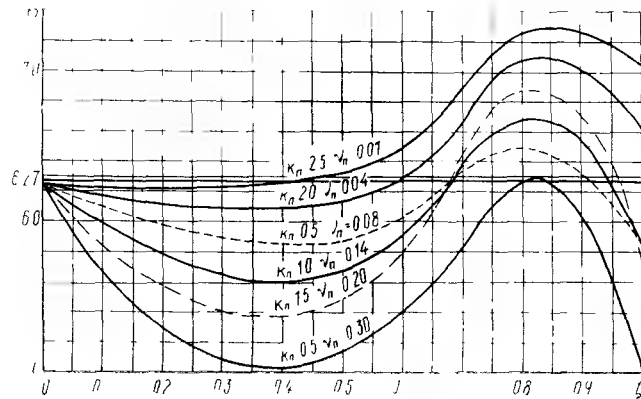


Рис. II 11 Зависимость коэффициента φ для частот колебаний типа A_1 от места расположения проволоки по высоте лопатки

очень сильно изменяет собственные частоты колебаний типа A_0 и A_1 (по сравнению с частотами внутрипакетных колебаний). Результаты расчетов показывают, что частоты этих колебаний не очень существенно зависят и от числа проволок, соединяющих лопатки в пакеты.

Значительно сильнее зависят от места расположения паяных проволок или других связей по высоте лопатки и их числа колебания типа В. В этом случае амплитуды и фазы колебаний разных лопаток в пакете отличаются друг от друга, и установка дополнительной, достаточно жесткой на растяжение связи ($\mu_c \approx 0$), например, в сечении, где при отсутствии дополнительной связи была пучность, вызовет изменение собственной формы. В месте расположения дополнительной связи возможно возникновение узла и вследствие этого значительное возрастание собственных частот внутрипакетных колебаний.

В п. XII 11 получена зависимость собственных частот колебаний типа В от места расположения связи (например, проволочной) по высоте лопатки. При расположении связи ближе к корневому сечению лопатки влияние податливости связи на растяжение возрастает и при вычислении частот внутрипакетных колебаний необходимо использовать условие $\mu_c = 0$. На рис II.12 представлена зависимость коэффициента φ , а следовательно, и частот колебаний типа B_0 от места расположения связи по высоте лопатки и числа узлов по длине пакета. При построении этой зависимости использовались следующие исходные данные: $m = 10$; $\mu'_c = J t_c / (F_c l^3) = 0,492 \cdot 10^{-3}$; $k_c = 0$; $\nu_c = 0$. Подсчитывались минимальные и максимальные значения частот внутрипакетных колебаний, которым соответствовали формы с одним и девятью узлами по длине пакета ($k = 1$ и $k = 9$). Как следует из рисунка, при соединении лопаток достаточно жесткими на растяжение связями частоты колебаний типа B_0 могут быть изменены в очень широких пределах за счет изменения места расположения связей по высоте лопатки. Например, при установке связан на расстоянии $\zeta = 0,78$ величина φ при $k = 9$ оказывается равной 6,25, т.е. весьма близкой к частоте колебаний типа A_1 , а при $\zeta_c \rightarrow 0$ значение $\varphi \rightarrow 1$, т.е. частота колебаний типа B_0 стремится к частоте A_0 . Еще большего повышения частот, естественно, можно добиться при соединении лопаток двумя связями. Например, если жесткость связей на растяжение достаточно велика, то частоты колебаний типа B_0 могут оказаться близкими к частоте A_2 , если расположение связей совпадает с узлами при этой собственной форме синфазных колебаний. В целом частоты внутрипакетных колебаний (типа В) в значи-

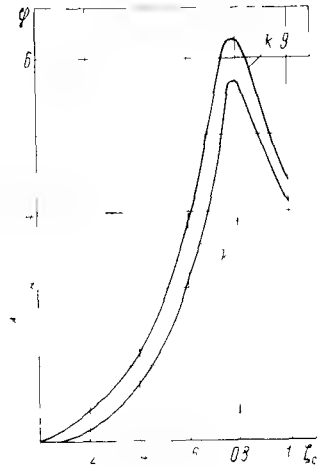


Рис II 12 Зависимость коэффициента φ для частот колебаний типа B_0 от места расположения связи по высоте лопатки при различном числе узлов по длине пакета

тельно большей степени зависят от места расположения и числа связей, чем частоты синфазных колебаний (типа А).

Для пакета лопаток, так же как и для отдельной лопатки, существуют аксиальные изгибные и крутильные формы колебаний. При аксиальных колебаниях все лопатки колеблются практически с одинаковыми амплитудами, не деформируя связи, соединяющие лопатки (рис. II.13). По этой причине коэффициент q для частоты аксиальных колебаний лопаток, связанных, например, бандажом, может быть найден по графику рис. II.9 для колебаний типа А при условии $k_6 = 0$. При аксиальных колебаниях первого тона отсутствуют узлы по высоте лопатки, при аксиальных колебаниях второго тона имеется один узел и т. д.

При внутриапакетных крутильных колебаниях, как и при внутриапакетных изгибных, существует несколько собственных

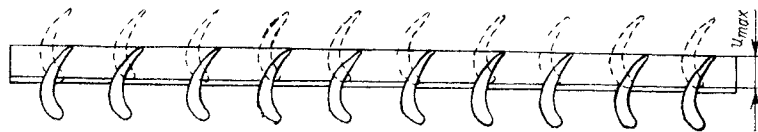


Рис. II.13 Собственная форма аксиальных колебаний пакета лопаток

форм, отличающихся числом перемен знака угла закручивания по длине пакета. При первом тоне внутриапакетных крутильных колебаний имеются узлы только по длине пакета, а по высоте лопатки узловые линии, перпендикулярные ее оси, отсутствуют. При втором тоне появляется одна узловая линия по высоте лопатки, перпендикулярная ее оси; при третьем тоне — две узловые линии и т. д.

На рис. II.14 приведены зависимости распределения углов закручивания по высоте лопатки и длине пакета при первом тоне внутриапакетных крутильных колебаний лопаток, соединенных двумя паяными проволоками; там же указаны частоты, соответствующие этим собственным формам колебаний [108]. Видно, что существует довольно широкий диапазон частот внутриапакетных крутильных колебаний, достигающий для первого тона рассматриваемого пакета 56%. Это объясняется тем, что повышение частот внутриапакетных крутильных колебаний по сравнению с крутильными колебаниями отдельной лопатки происходит из-за изгиба в аксиальном направлении паяных проволок, соединяющих лопатки. В п. XII.3 показано, что крутящий момент, действующий на лопатку от проволоки при колебаниях лопаток в противофазе, оказывается в 3 раза меньше, чем при синфазных колебаниях, если углы поворота лопаток в обоих случаях равны. Так как изгибная жесткость проволок, вообще говоря, соизмерима с крутильной жесткостью лопаток, то изменение жесткости проволок приводит к значительному изменению частот

внутриапакетных крутильных колебаний. По этой причине имеются существенные различия в ширине диапазона частот внутриапакетных крутильных колебаний и изгибных колебаний типа В. В последнем случае жесткость связей на растяжение обычно оказывается значительно больше жесткости лопатки на изгиб и ее изменение при различных формах внутриапакетных колебаний оказывает малое влияние на частоты внутриапакетных колебаний. В п. XII.3 показано, что при внутриапакетных крутильных колебаниях на лопатки от проволок или бандажа помимо сосредото-

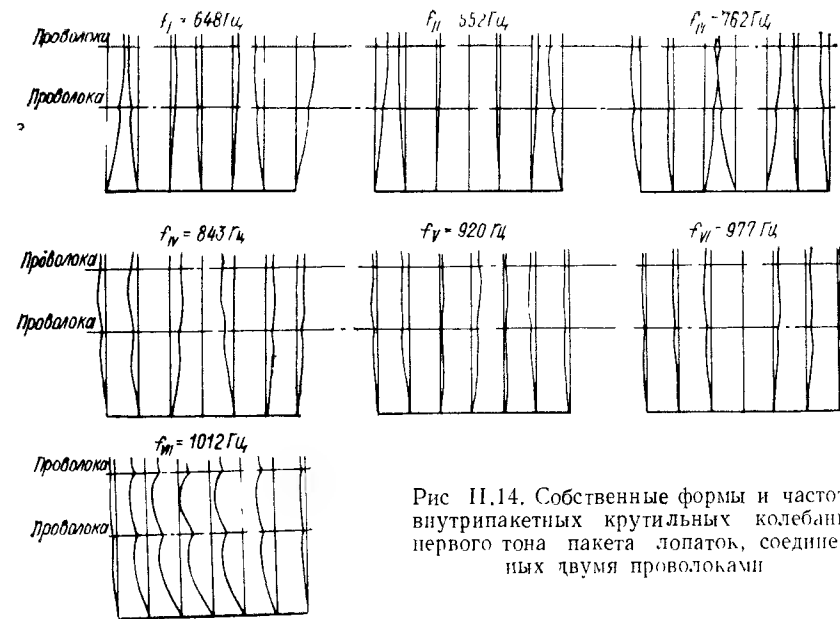


Рис. II.14. Собственные формы и частоты внутриапакетных крутильных колебаний первого тона пакета лопаток, соединенных двумя проволоками

ченного крутящего момента действует и перерезывающая сила, что вызывает связь крутильных и изгибных колебаний лопаток в аксиальном направлении даже для незакрученных лопаток постоянного сечения.

Связь изгибных и крутильных колебаний имеет место и при так называемых аксиально-крутильных колебаниях (изгибно-крутильных колебаниях пакета с узлами по его длине), формы которых изображены на рис. II.15. Как и при тангенциальных колебаниях типа В, при m лопатках в пакете имеются группы из $m-1$ различных собственных форм колебаний с одинаковым числом узлов по длине лопатки, но различным числом узлов по длине пакета. Низшей собственной частоте соответствуют колебания без узлов по длине лопатки и с одним узлом по длине пакета, следующей частоте — с двумя узлами по длине пакета и т. д. Частоты аксиально-крутильных колебаний зависят от числа лопаток в пакете, возрастая по мере уменьшения их числа.

Поскольку бандаж или проволока, соединяющие лопатки, при аксиально-крутильных колебаниях изгибаются в аксиальном направлении, на лопатки от них будет передаваться не только перерезывающая сила, но и сосредоточенный крутящий момент. Это обстоятельство и вызывает связь аксиальных изгибных и крутильных колебаний, имеющую место даже для незакрученных лопаток постоянного сечения.

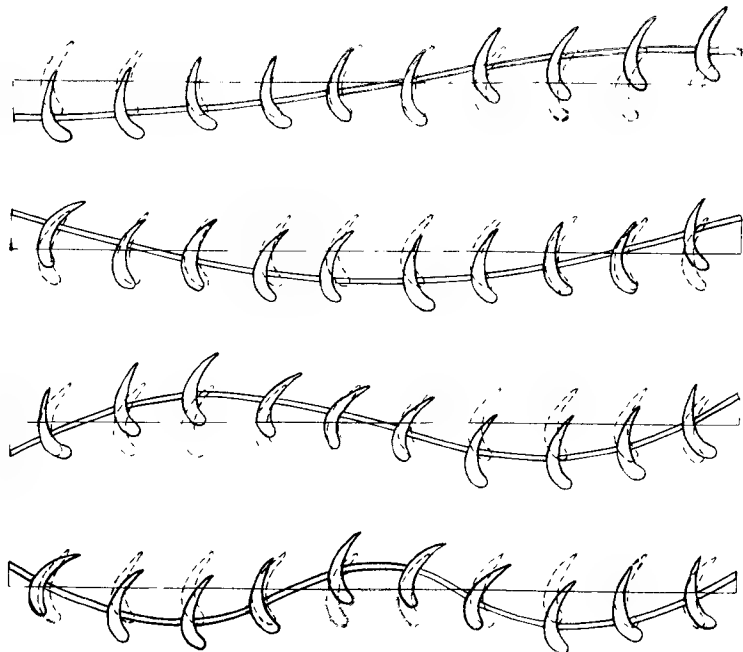


Рис. II 15. Собственные формы аксиально-крутильных колебаний пакета лопаток, соединенных проволокой

Для пакетов закрученных лопаток переменного сечения, как и для отдельных закрученных лопаток, будут иметь место связанные изгибно-крутильно-продольные колебания. В настоящее время разработаны методы расчета частот синфазных и внутривибрационных колебаний пакетов закрученных лопаток, отличающиеся учетом различных факторов, влияющих на колебания [44]. Результаты расчетов для конкретных ступеней позволяют определить собственные частоты и места максимальных динамических напряжений в лопатках и связях, а также оценить влияние конструкции связей и числа лопаток в пакете на собственные частоты.

Приведенная выше упрощенная классификация колебаний остается, однако, достаточно полезной и для закрученных лопаток. Так, для пакетов слабо закрученных лопаток взаимное влия-

ние различных типов колебаний является относительно небольшим, а для пакетов сильно закрученных лопаток оказываются более ясными возможности воздействия на ту или иную собственную форму рациональным выбором конструкции связи.

II.3. КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК, СОЕДИНЕННЫХ ЗАМКНУТЫМИ НА КРУГ СВЯЗЯМИ

Различные по конструкции кольцевые связи, соединяющие все лопатки ступени, находят все более широкое применение как в цилиндрах высокого и среднего давления, так и в цилиндрах низкого давления мощных турбин¹. Рассмотрение особенностей колебаний, которые имеют место при использовании подобных связей, начнем с изучения колебаний незакрученных лопаток постоянного сечения.

Как и в случае колебаний пакетов незакрученных лопаток постоянного сечения, при соединении лопаток замкнутыми на круг связями также имеют место синфазные и внутривибрационные тангенциальные изгибные колебания. Синфазные колебания типа A_0 , A_1 , A_2 и т. д. практически ничем не отличаются от синфазных колебаний пакетов, хотя, как будет показано в п. II.8, опасность этих колебаний при соединении лопаток замкнутыми на круг связями в условиях эксплуатации резко уменьшается.

Определение собственных частот внутривибрационных колебаний при установке замкнутых на круг связей значительно облегчается тем, что образующаяся в этом случае система обладает циклической симметрией, т. е. ее упругие и инерционные свойства повторяются через определенные промежутки (в данном случае через шаг лопаток). Для подобных систем форма прогиба по длине окружности при внутривибрационных колебаниях изменяется по синусоидальному закону, т. е. имеет вид (см. п. XI.10)

$$v_n = v_{\max} \sin \left(\frac{2k\pi n}{z_1} + \alpha \right), \quad (\text{II.9})$$

где v_n — амплитуда колебаний n -й лопатки; z_1 — число лопаток в ступени; k — число узловых диаметров ($2k$ число перемен знака по длине замкнутого на круг «пакета»), $1 \leq k \leq z_1/2$; α — начальный фазовый угол.

В п. XI.10 будет показано, что коэффициенты k_c и μ_c , характеризующие относительную изгибную жесткость связи и относительную податливость связи на растяжение, при внутривибра-

¹ Обычно используются упругофрикционные связи, исключающие возникновение значительных температурных напряжений в лопатках и связях и напряжений растяжения в связях в поле центробежных сил (см. п. XVI.1). При рассмотрении колебаний с малыми амплитудами будем пренебрегать возможностью проскальзывания по контактным поверхностям и считать взаимодействие лопаток и связей чисто упругим.

ных колебаниях лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, определяются следующими формулами:

$$k_c = \frac{H_c J_c l \cos^2 \beta}{J t_c} \left(8 + 4 \cos \frac{2k\pi}{z_1} \right); \quad (II.10)$$

$$\mu_c = \frac{J t_c}{F_c l^3} \frac{1}{4 \sin^2 (k\pi/z_1)} = \mu'_c \frac{1}{4 \sin^2 (k\pi/z_1)}. \quad (II.11)$$

Из формулы (II.10) следует, что численное значение коэффициента k_c при внутрипакетных колебаниях может уменьшаться в 3 раза:

$$\text{при } k \ll z_1 \quad k_c = 12 H_c J_c l \cos^2 \beta / (J t_c); \quad (II.10a)$$

$$\text{при } k = z_1/2 \quad k_c = 4 H_c J_c l \cos^2 \beta / (J t_c), \quad (II.10b)$$

т. е. диапазон изменения изгибной жесткости связей оказывается таким же, как и диапазон изменения изгибной жесткости связей при внутрипакетных крутильных колебаниях.

Из формулы (II.11) следует, что относительная податливость связей на растяжение в замкнутых на круг «пакетах» может резко возрасти по сравнению с относительной податливостью на растяжение связей в обычных пакетах. Действительно, при одинаковых геометрических размерах лопаток и связей в обычном и замкнутом на круг «пакете» в последнем случае при $k \ll z_1$ выполняется условие $\sin (k\pi/z_1) \ll 1$, т. е. $\mu_c \gg \mu'_c$, что и доказывает высказанное утверждение. Физически возрастание податливости связей на растяжение объясняется суммированием усилий, действующих на связи от достаточно большого числа лопаток, колеблющихся при $k \ll z_1$ с относительно близкими амплитудами и одинаковыми фазами.

Имеются различные группы форм внутрипакетных изгибных колебаний, при которых амплитуды по окружности изменяются по синусоидальному закону (II.9), но отличаются числом узлов по длине лопатки. При первой группе форм внутрипакетных колебаний узлы по высоте лопатки отсутствуют или приближенно совпадают с местами установки связей; при второй группе форм появляется дополнительно один узел по высоте лопатки; при третьей группе форм — два узла и т. д. Эти группы форм являются аналогами колебаний типа $B_0, B_1, B_2 \dots$ при соединении лопаток в обычные пакеты.

Для выяснения необходимости учета растяжимости связей рассмотрим зависимость частот первой группы форм внутрипакетных тангенциальных колебаний от числа узловых диаметров k для лопаток, соединенных установленными в периферийных сечениях связями с теми же геометрическими характеристиками, которые были рассмотрены выше, в п. II.2. Будем считать, что $\mu'_c = 0,191 \cdot 10^{-2}$, но примем $z_1 = 100$, т. е. рассмотрим случай, когда замкнутыми на круг связями соединены все 100 лопаток ступени. Результаты вычислений коэффициента φ , определяющего

соответствии с формулой (II.8) собственные частоты колебаний, приведены на рис. II.16, а, там же указаны формы прогиба по высоте лопатки при колебаниях с одним и пятьюдесятью узловыми диаметрами. На рис. II.16, б подобные же результаты получены при условии $\mu'_c = 0,191 \cdot 10^{-3}$. Из сопоставления с данными, приведенными на рис. II.6, следует, что даже в том случае, когда при колебаниях обычных пакетов связь можно было бы считать практически нерастяжимой (см. рис. II.6, б), при внутрипакетных колебаниях лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, растяжимость последних существенно снижает частоты, соответствующие формам с малым числом узловых

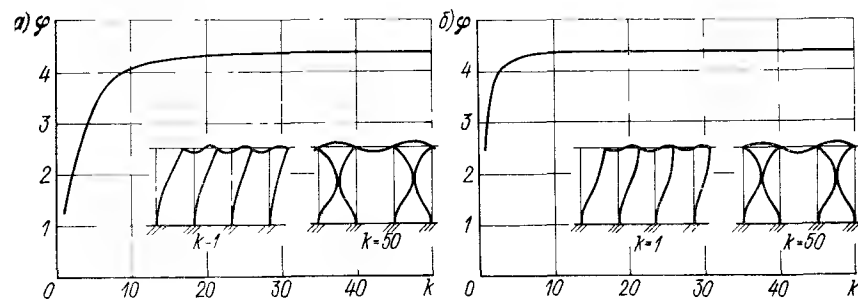


Рис. II.16. Зависимость собственных частот и форм внутрипакетных колебаний лопаток, замкнутых на круг, от числа узловых диаметров

диаметров. Поэтому кривые прогиба по высоте лопатки, соответствующие одной и той же группе форм внутрипакетных колебаний, значительно отличаются друг от друга в зависимости от числа узловых диаметров. Если при $k = 50$ форма прогиба, изображенная на рис. II.16, практически не отличается от собственной формы при колебаниях типа B_0 (рис. II.5 и II.7), то при колебаниях с $k = 1$ форма прогиба, изображенная на рис. II.16, а, так же как и соответствующая собственная частота, оказываются сравнительно близкими к собственной форме и частоте колебаний типа A_0 (рис. II.4).

Одной из особенностей внутрипакетных колебаний лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, которая свойственна вообще системам с циклической симметрией, является неопределенность в расположении узлов по длине окружности, характеризуемая наличием произвольного фазового угла α в формуле (II.9). Например, при колебаниях с k узловыми диаметрами и приложении возмущающей силы к n -й лопатке амплитуда ее будет максимальной¹ (лопатка будет находиться в пучности), а амплитуда лопатки с номером $n + z_1/4k$ равна нулю (лопатка будет

¹ Т. е. величина угла α в формуле (II.9) должна быть выбрана из условия: $\sin (2k\pi n/z_1 + \alpha) = 1$ или $2k\pi n/z_1 + \alpha = \pi/2$ и равна $\alpha = (\pi/2) (1 - 4kn/z_1)$.

находиться в узле). Наоборот, при приложении возмущающей силы к лопатке с номером $n + z_1/4k$ эта лопатка окажется в пучности, а n -я лопатка — в узле. Подобное явление не имело места при колебаниях отдельных лопаток или пакетов лопаток: независимо от места приложения возмущающей силы положение узлов по высоте лопатки и длине пакета соответствовало той собственной форме колебаний, частота которой совпадала с частотой возмущающей силы.

Неопределенность положения узлов по длине окружности является следствием равенства двух собственных частот с одинаковым числом узловых диаметров, в результате чего общее число различных собственных частот внутрипакетных колебаний сокращается примерно в 2 раза.

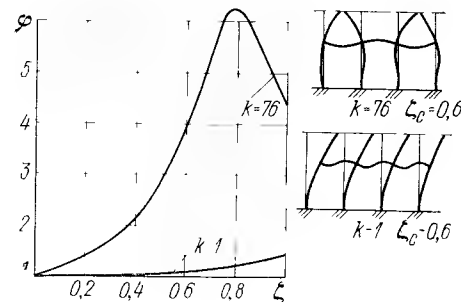


Рис. 11.17. Зависимость собственных частот и форм внутрипакетных колебаний лопаток, замкнутых на круг, от места расположения связи по высоте лопатки и числа узловых диаметров

числе лопаток в ступени ли $(z_1 - 1)/2$ при нечетном числе лопаток в ступени¹.

При соединении лопаток замкнутыми на круг связями, расположенными не в периферийных, а в промежуточных по высоте сечениях лопаток, растяжимость связей оказывает еще большее влияние на диапазон частот внутрипакетных колебаний. На рис. 11.17 построена зависимость диапазона частот первой группы форм внутрипакетных колебаний лопаток от относительной координаты места расположения связи ξ_c и числа узловых диаметров k . При вычислениях использовались те же геометрические характеристики лопаток и связей, что и при построении графика на рис. 11.12; $\mu'_c = 0,492 \cdot 10^{-3}$; $k_c = 0$; $v'_c = 0$. В соответствии с данными п. XI.11 принято, что $z_1 = 152$. На рис. 11.17 приведены также собственные формы, соответствующие колебаниям лопаток при $k = 1$ и $k = 76$ в случае расположения связи в сечении с координатой $\xi_c = 0,6$.

¹ При наличии разброса в частотах лопаток, составляющих комплект, после соединения их замкнутыми на круг связями положение узлов по длине окружности при внутрипакетных колебаниях оказывается вполне определенным, а две собственные частоты с одинаковым числом узлов по окружности становятся реально различными (см. п. XI.12).

При сопоставлении данных рис. 11.12 и 11.17 следует, что при установке связей в промежуточных по высоте лопатки сечениях растяжимость связей приведет к еще более заметному расширению диапазона частот внутрипакетных колебаний, чем при их установке на вершине лопаток. Форма прогиба по высоте лопатки при внутрипакетных колебаниях для случая $\xi_c = 0,6$; $k = 1$ оказалась близкой к форме прогиба при колебаниях типа A_0 , а для случая $\xi_c = 0,6$; $k = 76$ — к форме прогиба лопатки, опертой в месте установки связей.

Аксиальные колебания лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, так же как и синфазные тангенциальные колебания, практически не отличаются от соответствующих форм пакетов лопаток, однако, как будет показано в п. 11.8, опасность подобных колебаний резко уменьшается.

При внутрипакетных крутильных колебаниях закон изменения угла закручивания θ по длине окружности имеет вид

$$\theta_n = \theta_{\max} \sin \left(\frac{2k\pi n}{z_1} + \alpha \right).$$

Диапазон изменения относительной изгибной жесткости связей для различных форм внутрипакетных крутильных колебаний, как и при внутрипакетных крутильных колебаниях обычных пакетов, определяется формулами (11.10а) и (11.10б), т. е. наибольшая жесткость соответствует синфазным колебаниям, а наименьшая — колебаниям лопаток в противофазе при $k = z_1/2$ или $k = (z_1 - 1)/2$. При внутрипакетных крутильных колебаниях даже незакрученных лопаток постоянного сечения возникает взаимодействие крутильных и изгибных колебаний из-за того, что на лопатку от связи действует не только сосредоточенный крутящий момент, но и перерезывающая сила (см. п. XII.3). Существуют различные группы форм внутрипакетных крутильных колебаний (первая, вторая и т. д.), при которых распределение амплитуд по длине окружности описывается синусоидальным законом, но которые отличаются друг от друга числом узлов по длине лопатки.

При аксиально-крутильных колебаниях форма прогиба по длине окружности имеет вид

$$u_n = u_{\max} \sin \left(\frac{2k\pi n}{z_1} + \alpha \right),$$

где u_n — перемещение n -й лопатки в аксиальном направлении.

Усилия, действующие от связей на лопатки при этих колебаниях, зависят не только от геометрических размеров связей, но и от числа узловых диаметров (см. п. XVI.2). Существуют различные группы форм аксиально-крутильных колебаний, отличающиеся числом узлов по длине лопатки при сохранении синусоидального закона изменения прогиба по длине окружности. Изгиб лопатки в аксиальном направлении сопровождается ее

кручением даже в случае соединения замкнутыми на круг связями незакрученных лопаток постоянного поперечного сечения подобно тому, как это было и при аксиально-крутильных колебаниях обычных пакетов.

Закрученные лопатки переменного сечения, соединенные замкнутыми на круг связями, совершают совместные изгибно-крутильно-продольные колебания, при которых одновременно имеют место перемещения в аксиальном u и тангенциальном v направлениях, углы закручивания θ и радиальные перемещения w . Тем не менее, большинство отмеченных выше особенностей частотного спектра сохраняются справедливыми и в этом случае. Имеются синфазные колебания лопаток, опасность которых резко уменьшается, и группы форм внутривибрационных колебаний, при которых различные компоненты напряжений и перемещений изменяются вдоль окружности по закону $\sin(2k\pi n/z_1)$, хотя и могут иметь определенный фазовый сдвиг по отношению друг к другу (см. п. XVI.2).

II.4. ВЛИЯНИЕ СДВИГА, ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ И ПОДАТЛИВОСТИ ЗАДЕЛКИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ЛОПАТОК

В настоящем параграфе рассмотрим влияние сдвига, инерции вращения и податливости заделки на собственные частоты лопаток и покажем, при каких условиях роль этих факторов должна учитываться.

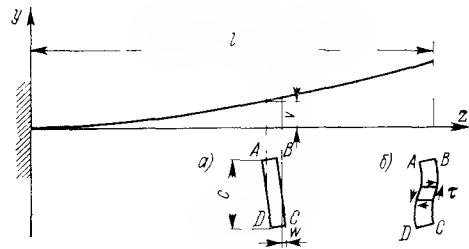


Рис. II.18. Перемещения различных точек поперечного сечения стержня при колебаниях: а — без учета деформаций, вызванных касательными напряжениями; б — деформация сечения под действием касательных напряжений

и нормальные напряжения — τ и σ . Для проведения качественной оценки будем в первом приближении считать лопатку нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q (в гл. XIV будет показано, что форма прогиба лопатки под действием равномерно распределенной нагрузки будет весьма близка к форме прогиба при первом тоне изгибных колебаний).

Если пренебречь деформациями, вызванными касательными напряжениями, то легко получить соотношения, связывающие

напряжения и перемещения с геометрическими характеристиками лопатки. В рассматриваемом случае будут выполняться следующие соотношения для максимальных значений σ , τ , v и w :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W} \sim \frac{ql^2}{bc^2}; & \tau_{\max} &\sim \frac{Q_{\max}}{F} \sim \frac{ql}{bc}; \\ v_{\max} &\sim \frac{ql^3}{EJ}; & v'_{\max} &= \frac{dv}{dz} \sim \frac{ql^2}{EJ}; & w_{\max} &\sim v'_{\max} c, \end{aligned} \right\} \quad (II.12)$$

где $M_{\max}$ и $Q_{\max}$ — максимальные значения изгибающего момента и поперечной силы; b и c — соответственно хорда и максимальная толщина профиля.

При получении приближенных соотношений (II.12) пренебрегалось изогнутостью профиля, т. е. принималось, что момент сопротивления поперечного сечения $W \sim bc^2$. Из соотношений (II.12) непосредственно вытекает:

$$\sigma_{\max}/\tau_{\max} \sim lc; \quad v_{\max}/w_{\max} \sim lc. \quad (II.13)$$

При условии $lc \gg 1$ следует, что $\sigma_{\max} \gg \tau_{\max}$, а тогда оказывается справедливым и принятое выше предположение об относительной малости деформаций, вызванных касательными напряжениями. Таким образом, в этом случае можно считать, что поперечные сечения лопатки в деформированном состоянии остаются плоскими. Кроме того, при $lc \gg 1$ выполняется неравенство $v_{\max} \gg w_{\max}$ и поворотом элемента $ABCD$ на рис. II.18 можно пренебречь по сравнению с его перемещением в вертикальном направлении, т. е. можно пренебречь возникающими при колебаниях лопатки силами инерции в направлении оси z .

Соотношения (II.13) были получены при условии действия на лопатку равномерно распределенной нагрузки. Подобное предположение может быть оправдано для первого тона колебаний консольной лопатки, но оказывается совершенно несправедливым для высших собственных форм, поскольку в п. XI.1 показано, что при изгибных колебаниях лопатки постоянного сечения распределенная инерционная нагрузка в каждом из сечений лопатки пропорциональна его прогибу. В п. XI.2 показано, что в одинаковых максимальных значениях прогиба лопатки при различных собственных формах максимальные значения высших изводных резко возрастают при усложнении собственных форм. Увеличение этих максимальных значений по сравнению с максимальными значениями аналогичных производных при первом тоне оказывается тем более существенным, чем выше порядок изводной. Так как изгибающий момент и перерезывающая сила пропорциональны соответственно второй и третьей производным от прогиба лопатки, то из сказанного вытекает, что для высших собственных форм будут справедливы следующие соотношения: $Q_{\max}l \gg M_{\max}$, $v'_{\max}l \gg v_{\max}$. Из полученных соотношений следует, что для высших собственных форм будут справедливы неравенства: $\sigma_{\max}/\tau_{\max} \ll lc$; $v_{\max}/w_{\max} \ll lc$.

Таким образом, при высших собственных формах изгибных колебаний, даже при выполнении условия $l/c \gg 1$, силами инерции в направлении оси z и деформацией поперечного сечения лопатки под действием касательных напряжений, изображенной на рис II 18, б, пренебречь нельзя, т. е. нельзя пренебречь, как принято говорить, влиянием сдвига и инерции вращения. В еще большей степени эти соображения будут справедливы при рассмотрении аксиальных колебаний, так как в данном случае отношением характерных размеров лопатки будет не l/c , а l/b , и не учит сдвига и инерции вращения может привести к еще большей ошибке.

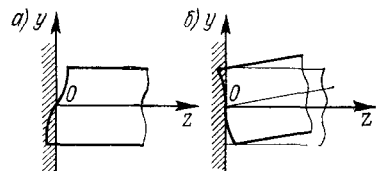


Рис II 19 Перемещение различных точек корневого сечения при учете сдвига и инерции вращения, а — граничные условия (II 14), б — граничные условия (II 15)

При получении соотношений (II.12) и (II 13) пренебрегалось изогнутостью профиля. Можно отказаться от этого допущения, если за характерный линейный размер поперечного сечения взять не максимальную толщину профиля c , а радиус инерции $i = i_{\min} = \sqrt{J_{\min}/F}$. В дальнейшем за меру «гибкости» лопатки,

определяющую возможность неучета сдвига и инерции вращения, будем принимать величину $l/i_{\min}$ при рассмотрении тангенциальных колебаний и $l/i_{\max}$ (где $i_{\max} = \sqrt{J_{\max}/F}$) при рассмотрении аксиальных колебаний. Влияние сдвига и инерции вращения на собственные частоты колебаний лопаток будет подробно исследовано в п. XI 4.

Необходимо отметить, что при определении частот колебаний консольной лопатки с учетом сдвига и инерции вращения имеет место некоторая неопределенность в граничных условиях в месте заделки. Так как в этом случае поперечные сечения не остаются плоскими, то в корневом сечении невозможно обеспечить равенство нулю перемещений w для всех точек поперечного сечения. Два типа граничных условий, возможных в этом случае [172], изображены на рис. II.19. На рис. II 19, а зафиксированы перемещения горизонтального элемента, расположенного на оси лопатки в корневом сечении, на рис II.19, б — перемещения вертикального элемента в точке О. Первый тип граничных условий можно представить в виде:

$$v = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad y = 0. \quad (\text{II.14})$$

Второй тип граничных условий эквивалентен выполнению следующих соотношений:

$$v = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad y = 0. \quad (\text{II.15})$$

Как следует из рисунка, и в первом, и во втором случаях различные точки корневого сечения лопатки должны получить различные перемещения в направлении оси z . Фактические перемещения точек корневого сечения будут определяться податливостью заделки и отличаться от закона распределения перемещений, показанного на рис II 19

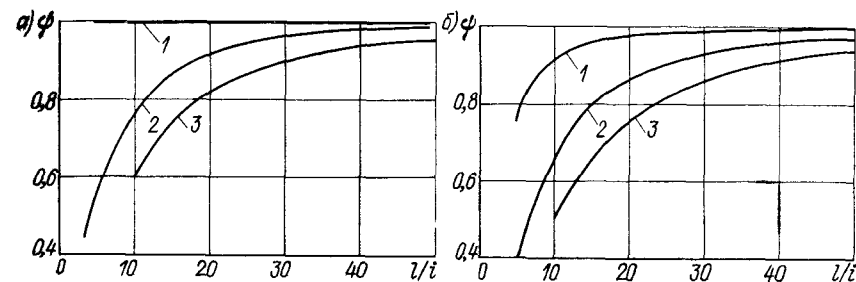


Рис II 20 Влияние сдвига и инерции вращения на снижение собственных частот консольных лопаток при использовании граничных условий (II 14) — а и (II 15) — б

1 — 3 частоты соответственно первого — третьего тона

На рис II 20 приведены результаты вычисления собственных частот стержня прямоугольного поперечного сечения с учетом влияния сдвига и инерции вращения: $\psi = p_i/p_{i0}$, где p_i и p_{i0} — частоты i -й собственной формы колебаний соответственно при учете сдвига и инерции вращения и без их учета. II в случае граничных условий (II 14), и в случае условий (II 15) влияние сдвига и инерции вращения на первую собственную частоту оказывается значительно меньше, чем на вторую и, особенно, на третью

Т а б л и ц а II 1

Мощность турбины МВт	l мм	l/b	l/i
300	47—104	1,53—2,50	10,9—20,4
800	94—206	1,15—2,10	9,9—15,8
1200	86—212	0,99—1,88	7,3—16,3

Необходимо учесть, что рост мощности турбин сопровождается увеличением длины лопаток, но может сопровождаться даже уменьшением гибкости лопаток, характеризуемой отношением l/i , так как при увеличении длин одновременно происходит столь же быстрое или даже более быстрое увеличение хорд лопаток. Табл II 1 показано изменение длины лопаток, а также отношений l/b и l/i для ступеней цилиндра высокого давления турбин мощностью 300, 800 и 1200 МВт (данные приведены без учета гудерулирующих ступеней, отношения l/b и l/i указаны для корневых сечений лопаток)

Из сопоставления данных табл II 1 и рис II 20 следует, что влияние только сдвига и инерции вращения не может привести к существенному снижению частот первого тона тангенциальных колебаний лопаток цилиндра высокого давления мощных турбин. Об этом же свидетельствуют и результаты расчетов собственных частот лопаток с учетом и без учета влияния сдвига. При определении высших собственных форм колебаний лопаток цилиндра высокого давления учет влияния сдвига и инерции вращения является необходимым.

Таблица II 2

l , мм	l , м	$f_{\text{кп}}$	$f_{\text{рп}}$	$\frac{f_{\text{расч}} - f_{\text{эксп}}}{f_{\text{расч}}}$, %
61	7,4	5400	6330	46,2
70	9,0	1280	2008	36,3
93	15,0	1600	2070	22,7
102	19,7	1160	1437	19,3
136	26,2	700	806	12,5
390	70,0	139	143	2,8
432	77,0	128	131	2,3
576	144,0	77,5	78,7	1,5

условии жесткой заделки лопаток в корневом сечении. Как следует из табличных данных, для самых жестких лопаток наблюдается снижение первой собственной частоты на 35—45 %, причем выше было показано, что подобное снижение не может быть объяснено только влиянием сдвига и инерции вращения.

Экспериментальные исследования показали, что частоты лопаток зависят от усилия зажима и качества обработки поверхностей, по которым осуществляется зажим хвоста. На рис II 21 приведена зависимость первой собственной частоты лопаток от усилия зажима хвоста P . Видно, что по мере роста усилия зажима частоты повышаются, стремясь к определенному пределу, который не зависит от дальнейшего увеличения усилия. Более низкие собственные частоты лопаток большой длины обычно перестают зависеть от величины усилия зажима при меньшем его значении (лопатка № 1 на рис II 21). Предельные значения частот, на которые не влияет дальнейшее повышение усилия, оказываются для жестких лопаток все же гораздо ниже их расчетных значений. Это расхождение сохраняется даже при приварке лопаток к массивному основанию или изготовлении исследуемого образца «заодно с заделкой».

На рис II 22 указаны размеры образцов, которые использовались А. З. Шемтовым для специального методического экс-

Влияние податливости заделки. Для «гибких» лопаток с большим отношением l/l_0 наблюдается достаточно хорошее совпадение экспериментальных и расчетных частот, полученных при условии жесткой заделки лопаток в корневом сечении. В то же время по мере уменьшения отношения l/l_0 совпадение эксперимента с расчетом существенно ухудшается. В табл II 2 приведено сравнение экспериментальных частот с расчетными частотами первого тона тангенциальных ко-

лебаний, вычисленными при

Эксперимента по выяснению влияния податливости заделки на собственные частоты. Первый образец (рис. II 22, а) прямоугольного поперечного сечения

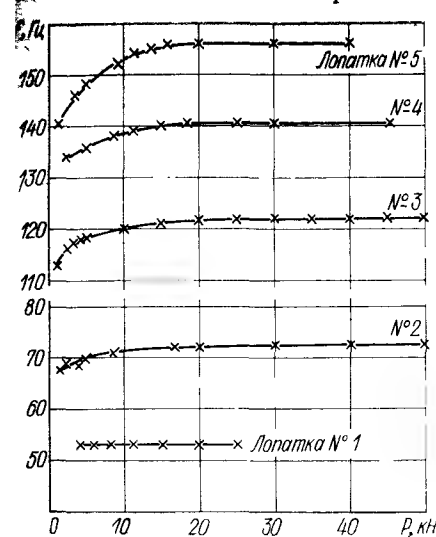


Рис II 21 Зависимость первой собственной частоты колебаний лопаток от усилия зажима хвоста

изготавливался «заодно с заделкой» и крепился к плите с помощью пяти болтов. Второй образец (рис II 22, б) имел такие же размеры профильной части, но

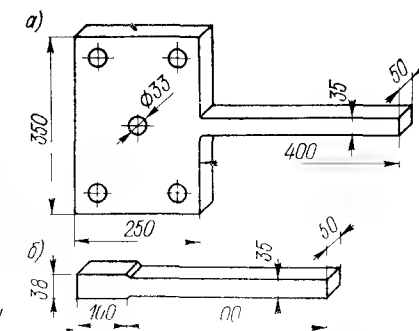


Рис II 22 Образцы для определения влияния податливости заделки

изготавливался «отдельно от заделки» и зажимался в тиски таким образом, чтобы дальнейшее увеличение усилия зажима не влияло на собственные частоты.

В процессе испытаний определялись частоты колебаний образцов при постепенном уменьшении их длины, что дало возможность построить зависимость $\psi = (f_1/f_{10})^2$. Результаты испытаний приведены на рис II 23. Как видно, частоты первого образца оказались несколько выше во всем обследованном диапазоне l/l_0 , однако различия между частотами первого и второго образцов оказались намного меньшими, чем разница между экспериментальными и расчетными частотами, полученными без учета

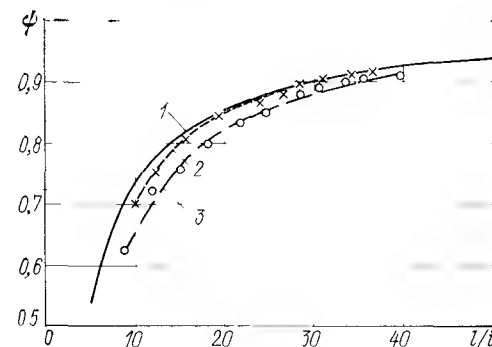


Рис II 23 Влияние податливости заделки на собственные частоты образцов прямоугольного поперечного сечения

1 — расчет с учетом податливости заделки; 2 — образец «заодно с заделкой»; 3 — образец «отдельно от заделки».

$\psi = f_1/f_{10}$, где f_1 и f_{10} — частоты лопатки соответственно с учетом и без учета податливости заделки.

податливости заделки, т. е. при условии $\psi = 1$. Таким образом, снижение собственных частот при малых отношениях l/i объясняется не плохим качеством закрепления образца в тисках, а податливостью собственно заделки.

На рис. II.24 приведено сопоставление экспериментальных и расчетных частот первого тона тангенциальных колебаний рабочих лопаток ряда турбин [200]. Большинство экспериментальных точек получено на основании испытаний нескольких десятков лопаток и определяется средним арифметическим значением их частот. На рис. II.24 кривая I зависимости ψ от l/i построена для лопаток с плоским хвостом, выполненных заодно с промежуточными телами, а кривая II — для ранее широко использовавшихся лопаток из светлокатаного профиля с отдельными промежуточными телами.

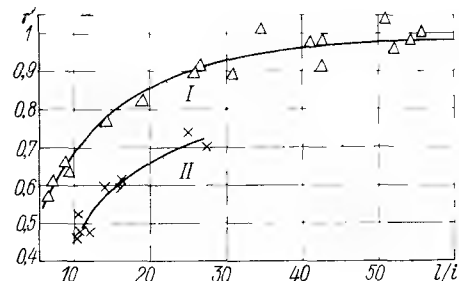


Рис. II.24 Сопоставление экспериментальных и расчетных частот первого тона тангенциальных колебаний лопаток

В п. XI.5 исследовано влияние податливости заделки на собственные частоты колебаний лопаток. Хвост лопатки и обод диска, в котором закреплен хвост, рассматривались как упругое полупространство или упругая полуплоскость. Определялась связь между моментом и перерезывающей силой, приложенными к этому полупространству от лопатки, с одной стороны, и прогибом и углом поворота корневого сечения лопатки, с другой.

Было получено, что искомая зависимость имеет вид:

$$v(0) = -c_{11}Q(0) + c_{12}M(0); \quad dv(0)/dz = c_{21}Q(0) - c_{22}M(0), \quad (\text{II.16})$$

где $Q(0)$, $M(0)$ — перерезывающая сила и изгибающий момент, действующие в корневом сечении лопатки; $v(0)$ и $dv(0)/dz$ — прогиб и угол поворота корневого сечения; c_{ij} — коэффициенты, зависящие от формы поперечного сечения и отношения хорды лопатки к ширине обода диска.

При использовании граничных условий (II.16) в п. XI.5 определено влияние податливости заделки на частоты различных собственных форм консольных лопаток, а также лопаток с опертой или заделанной в упругое полупространство вершиной.

Выяснено, что на первую собственную частоту консольной лопатки наибольшее влияние оказывает коэффициент c_{22} , определяющий связь изгибающего момента с углом поворота корневого сечения лопатки. Приближенная оценка, приведенная в п. XI.5, свидетельствует о том, что величина коэффициента c_{22} для стержня прямоугольного поперечного сечения не очень сильно отличается от значений этого коэффициента для типичных лопаточных профилей. Именно это обстоятельство и объясняет экспериментально обнаруженную близость зависимости ψ от l/i для рабочих лопаток и стержней прямоугольного поперечного сечения (рис. II.23 и II.24).

На рис. II.23 нанесена расчетная кривая по влиянию податливости заделки на частоты стержня прямоугольного поперечного сечения, полученная в п. XI.5. Как видно, имеется весьма хорошее совпадение экспериментальных и расчетных результатов.

На рис. II.25 проведено сопоставление экспериментальной кривой I (см. рис. II.24), — экспериментальная кривая I (см. рис. II.24), — расчетные кривые для стержня прямоугольного поперечного сечения, X — результаты испытаний комплектов лопаток турбины мощностью 800 МВт. На рисунке нанесены также экспериментальные точки, полученные при испытаниях комплектов лопаток среднего и низкого давления турбины мощностью 800 МВт [33]. Экспериментальные частоты сопоставлялись с расчетными, полученными без учета податливости заделки. Значения l/i для лопаток различных ступеней определялись с учетом изменения их геометрических характеристик по высоте (с учетом клиновидности лопаток) методом, изложенным в п. XIV.5. Как видно, достаточно надежная оценка влияния податливости заделки на первую собственную частоту лопаток может быть осуществлена даже с помощью кривых, полученных для стержня прямоугольного поперечного сечения. Более точно влияние податливости заделки может быть учтено при условии вычисления коэффициентов c_{ij} , входящих в формулу (II.16), в соответствии с формой корневого сечения лопатки (см. п. XI.5) или при использовании метода конечных элементов. В п. XI.5 показано, что при совместном учете влияния сдвига, инерции вращения и податливости заделки значения первой собственной частоты почти не отлича-

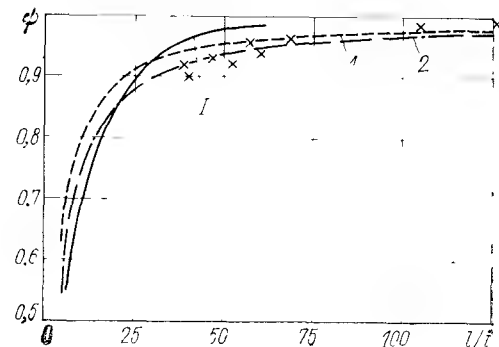


Рис. II.25. Сопоставление расчетных и экспериментальных значений коэффициента ψ : — экспериментальная кривая I (см. рис. II.24), — расчетные кривые для стержня прямоугольного поперечного сечения, X — результаты испытаний комплектов лопаток турбины мощностью 800 МВт

лись от значений, полученных только при учете податливости заделки, т. е. доказано определяющее влияние податливости заделки.

Относительное влияние коэффициентов, входящих в формулу (II 16), оказывается различным для первой и высших собственных форм, а также зависит от граничных условий на вершине лопатки.

На рис II 26, а приведены результаты вычисления коэффициента ψ при первой собственной частоте для стержня прямоугольного поперечного сечения с отношением ширины к толщине, равным 2 ($b/a = 2$), при условии $c_{22} \neq 0$, $c_{11} \neq 0$, $c_{12} \neq 0$ (кривая 1) и при условии $c_{22} \neq 0$, $c_{11} = c_{12} = 0$ (кривая 2). Результаты аналогичных вычислений для второй собственной частоты приведены на рис II 26, б. Как видно, влияние коэффициента c_{11} на вторую собственную частоту оказывается значительно большим, чем на первую.

Рис II 26 Влияние податливости заделки на первую (а) и вторую (б) собственные частоты колебаний консольного стержня прямоугольного поперечного сечения

коэффициента c_{12} остается малым).

Еще большее влияние податливость заделки оказывает на частоты лопаток, с обеих сторон заделанных в упругое полупространство (направляющие лопатки турбин). Для иллюстрации на рис II 27 приведены результаты вычислений для стержня прямоугольного поперечного сечения с отношением $b/a = 2$ при условии $c_{22} \neq 0$, $c_{11} \neq 0$ (кривая 1) и при условии $c_{22} \neq 0$, $c_{11} = 0$ (кривая 2). Как видно, при малых l/l_1 влияние коэффициентов c_{11} и c_{22} оказывается соизмеримым, при больших значениях l/l_1 влияние коэффициента c_{22} становится преобладающим.

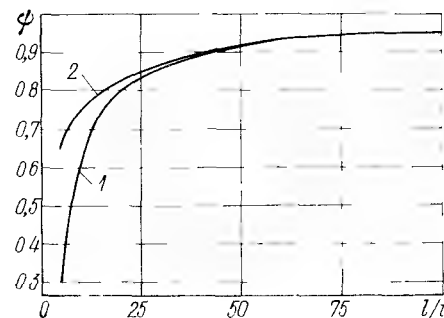


Рис II 27 Влияние податливости заделки на первую собственную частоту стержня, вершина которого заделана в упругое полупространство

Влияние податливости заделки на частоты аксиальных колебаний оказывается большим (см. п. XI 5), чем на частоты тангенциальных колебаний, так как $l/l_{\max} < l/l_{\min}$. Кроме того, ограниченность осевых размеров обода диска может привести к относительно большему снижению собственных частот аксиальных колебаний, чем тангенциальных. Из приведенных результатов следует, что влияние податливости заделки необходимо учитывать при расчетном определении даже первой собственной частоты колебаний лопаток цилиндров высокого и среднего давления мощных турбин.

Влияние сдвига, инерции вращения и податливости заделки оказывается различным для разных собственных частот и не может быть учтено с помощью одного, общего для всех частот коэффициента.

II.5. ВЛИЯНИЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ И ТЕМПЕРАТУРЫ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ЛОПАТОК

Влияние центробежных сил. При отклонении или закручивании вращающейся лопатки возникают дополнительные силы, стремящиеся вернуть лопатку в положение равновесия. Эти силы суммируются с силами упругости лопатки и таким образом как бы увеличивают ее изгибную и крутильную жесткость.

Таблица II 3

Рассмотрим влияние центробежных сил на изгибные или, точнее говоря, преимущественно изгибные колебания закрученных лопаток.

В табл II 3 приведены значения первой собственной частоты для лопаток ряда ступеней цилиндров высокого, среднего и низкого давления мощных турбин. Частоты вычислялись как с учетом центробежных сил ($f_{\text{дин}}$), так и без их учета ($f_{\text{ст}}$). Как видно, для сравнительно коротких лопаток цилиндров высокого и среднего давления влияние центробежных сил на собственные частоты пренебрежимо мало, однако для наиболее длинных лопаток последних ступеней цилиндров низкого давления динамические частоты $f_{\text{дин}}$ могут оказаться в 1,5—2,5 раза выше статических частот лопаток. При использовании вычислительной техники динамические частоты могут быть определены с той же точностью, что и статические частоты. В настоящем параграфе, однако, мы получим хотя и менее точные, но более общие соотношения, дающие возможность оценить влияние центробежных сил на частоты различных лопаток или показать, что это влияние пренебрежимо мало.

$f_{\text{ст}}$	$f_{\text{дин}}$	$f_{\text{дин}}/f_{\text{ст}}$
ГЦ		
1990	1994	1,002
1004	1012	1,008
711	725	1,020
335	356	1,063
163	183	1,123
107	133	1,243
59	94	1,593
33	80	2,424

Если не учитывать изменения собственной формы лопатки в поле центробежных сил, то, как показано в п. XIV.5, динамическую частоту можно представить в виде

$$f_{\text{дин}}^2 = f_{\text{ст}}^2 + Bn^2, \quad (\text{II.17})$$

где n — частота вращения турбины (в об/с), B — постоянный коэффициент¹, зависящий от геометрических характеристик лопатки, радиуса ее корневого сечения R_0 и формы колебаний. Величина коэффициента B зависит также от угла установки лопатки β , т. е. от угла между хордой лопатки и прямой, параллельной оси вращения. В п. XIV.5 показано, что при колебаниях лопатки в аксиальном направлении центробежная сила имеет только одну радиальную составляющую, стремящуюся вернуть лопатку в положение равновесия, т. е. повысить ее собственную частоту. При колебаниях лопатки в тангенциальном направлении имеется как радиальная составляющая центробежной силы, стремящаяся вернуть лопатку в положение равновесия, так и тангенциальная составляющая, стремящаяся еще больше отклонить лопатку от положения равновесия. Влияние радиальной составляющей оказывается сильнее, поэтому коэффициент B всегда положительный, однако его величина для одной и той же лопатки и собственной формы будет зависеть от угла установки β . В [204] предложены приближенные оценки для величины коэффициента B при различных собственных формах колебаний лопаток. В частности, при колебаниях лопаток постоянного сечения коэффициент B может быть определен по следующим формулам [136]

для первого тона консольной лопатки

$$B_1 = 0,785 (D_{\text{ср}}/l) + 0,408 - \cos^2 \beta;$$

для второго тона консольной лопатки

$$B_2 = 4,32 (D_{\text{ср}}/l) + 2,16 - \cos^2 \beta;$$

для первой частоты лопатки с опертой вершиной

$$B_0 = 2,14 (D_{\text{ср}}/l) + 0,79 - \cos^2 \beta.$$

В [51] приведены результаты экспериментальной проверки различных формул для коэффициента B_1 при первой собственной частоте (первом тоне колебаний) консольной лопатки. На основании результатов испытаний рекомендована следующая формула:

$$B_1 = 0,69 (D_{\text{ср}}/l) + 0,7 - \cos^2 \beta.$$

Следует отметить, что в том диапазоне отношений $D_{\text{ср}}/l$, в котором проводились испытания, значения коэффициента B_1 , опре-

¹ При учете изменения формы в поле центробежных сил коэффициент B окажется зависящим от частоты вращения. Практически эта зависимость является довольно слабой.

деленные по указанным выше формулам, отличаются не более, чем на 5—7%.

В [10] вариационным методом получены приближенные значения коэффициентов B_1 и B_2 для лопаток переменного сечения при линейном законе изменения площади поперечного сечения по высоте. В частности, для коэффициента B_1 получена следующая формула:

$$B_1 = \frac{0,151\chi + 0,049}{0,206\chi + 0,051} \frac{D_{\text{ср}}}{l} + \frac{0,091\chi + 0,11}{0,206\chi + 0,051} - \cos^2 \beta,$$

где $\chi = F(l)/F(0)$, $F(l)$ и $F(0)$ — соответственно площади периферийного и корневого сечений лопатки.

При $\chi = 1$, т. е. для лопатки постоянного сечения, получим

$$B_1 = 0,778 (D_{\text{ср}}/l) + 0,397 - \cos^2 \beta,$$

а при $\chi = 0,5$

$$B_1 = 0,81 (D_{\text{ср}}/l) + 0,37 - \cos^2 \beta.$$

Коэффициенты $B'_1 = B_1 + \cos^2 \beta$ и $B'_2 = B_2 + \cos^2 \beta$ при различных значениях χ и от отношениях R_0/R_1 приведены на рис. II 28, где R_0 и R_1 — соответственно радиусы корневого и периферийного сечений лопатки. Так как коэффициент B_1 больше единицы, то динамическая частота лопатки всегда выше частоты вращения и колебания с первой кратностью невозможны.

Из формул (II 17) и рис. II 28 следует, что относительное влияние центробежных сил на высшие частоты резко падает. Обозначив $\Delta f = f_{\text{дин}} - f_{\text{ст}}$ и учитывая, что $f_{\text{дин}} + f_{\text{ст}} > 2f_{\text{ст}}$, из формулы (II 17) получим

$$\frac{\Delta f}{f_{\text{ст}}} = \frac{Bn^2}{(f_{\text{дин}} + f_{\text{ст}}) f_{\text{ст}}} < \frac{Bn^2}{f_{\text{ст}}^2}. \quad (\text{II 18})$$

Из рисунка видно, что коэффициент B'_2 может в 3—5 раз превышать коэффициент B'_1 . С другой стороны, в п. II.1 было показано, что для лопатки постоянного сечения $f_{2\text{ст}} = 6,27f_{1\text{ст}}$, где $f_{2\text{ст}}$ — статическая частота второго тона колебаний; там же было указано, что для одной из клиновидных лопаток выполнялось соотношение $f_{2,1} = 4,59f_{1\text{ст}}$. Таким образом, для лопатки постоянного сечения $f_{2\text{ст}}^2 = 39,3f_{1\text{ст}}^2$, а для клиновидной лопатки

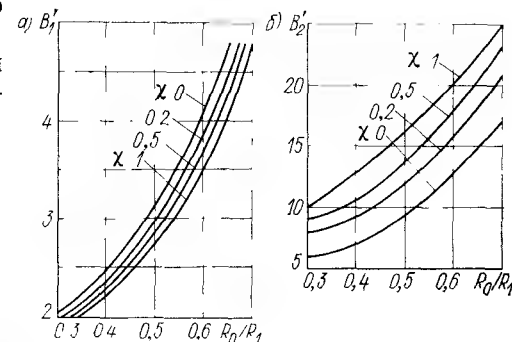


Рис. II 28 Зависимость коэффициента B для первой (а) и второй (б) собственных частот колебаний от клиновидности и удлинения лопатки

$f_{2\tau}^2 = 21f_{1\tau}^2$. Подставив эти значения в формулу (II 18), легко найти, что $\Delta f_2/f_{2\tau} \ll \Delta f_1/f_{1\tau}$. Еще в большей степени это относится к влиянию центробежных сил на более сложные собственные формы колебаний.

Действие центробежных сил сказывается не только на ужесточении лопаток при вращении, но и на изменении условий их заделки. На рис. II.21 показано, что при уменьшении величины усилия зажима хвоста частоты лопаток падают. Аналогичное явление может иметь место и при повышении частоты вращения турбины. При вращении турбины вследствие растяжения центробежными силами происходит некоторое увеличение наружного диаметра диска, а также уменьшение тангенциальных размеров хвоста лопатки в соответствии с величиной коэффициента Пуассона. В связи с этим уменьшается плотность сборки лопаток на диске при Т-образных, грибовидных или вильчатых хвостовых соединениях. Уменьшение плотности сборки может не только замедлить повышение собственных частот, которое должно иметь место в соответствии с формулой (II 17), но и привести к снижению динамических частот лопаток по сравнению со статическими. Наиболее вероятно снижение собственных частот для относительно коротких лопаток, на которых в соответствии с формулой (II 18) в меньшей степени сказывается ужесточающее влияние центробежных сил и которые более чувствительны к плотности сборки. Частоты аксиальных колебаний обычно оказываются более чувствительными к изменению плотности сборки, чем частоты тангенциальных колебаний.

Ужесточающее влияние центробежных сил приводит к повышению собственных частот не только изгибных колебаний, но также (хотя и в меньшей степени) частот крутильных колебаний.

Крутильная жесткость растянутой лопатки T , как показано в п. XIV 5, изменяется следующим образом:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\sigma J_p}{GT_0} \right),$$

где T_0 — геометрическая жесткость на кручение невращающейся лопатки; σ — напряжения растяжения, действующие в поперечном сечении лопатки; G — модуль упругости второго рода; J_p — полярный момент инерции относительно центра изгиба.

Так как квадрат частоты крутильных колебаний лопатки $f_{кр}$ пропорционален жесткости на кручение, или $f_{кр} \sim \sqrt{T}$, то сколько-нибудь заметная поправка может иметь место только для сильно нагруженных лопаток с тонким сильно вытянутым поперечным сечением, для которого выполняется соотношение $J_p/T_0 \gg 1$ [13].

Влияние температуры. Влияние температуры на собственные частоты лопаток объясняется двумя причинами. С одной стороны, как показано в п. II.1, квадрат собственной частоты обратно

пропорционален модулю упругости, т. е. выполняется следующее соотношение

$$f_T = f \sqrt{E_T/E},$$

где f_T , E_T — соответственно собственная частота и модуль упругости при рабочей температуре, а f и E — при нормальной.

На рис. II.29 приведена зависимость модуля упругости лопаточных сталей от температуры. Зависимость от температуры построена для безразмерного коэффициента $k_T = \sqrt{E_T/E}$, непосредственно указывающего на снижение собственных частот. Как видно, при температуре около 500 °С снижение собственных частот лопаток может достигать 10% по сравнению с частотами при нормальной температуре.

Второй причиной, объясняющей влияние температуры на собственные частоты лопаток, является различие в коэффициентах линейного расширения материала лопаток и ротора. Если коэффициент линейного расширения материала лопаток меньше, чем ротора, то при нагреве произойдет уменьшение усилий, действующих на хвосты лопаток в тангенциальном направлении.

Этот эффект полностью аналогичен рассмотренному выше эффекту действия центробежных сил, вызывающих уменьшение усилий зажима хвостов лопаток, однако влияние температуры может быть больше по абсолютной величине. Например, если лопатки изготовлены из стали 15X11МФ, а ротор из стали Р2М, то при корневом диаметре 800—900 мм и рабочей температуре около 500 °С удлинение хвостовиков всех лопаток ступени в окружном направлении из-за нагрева будет на 2,5—3 мм меньше удлинения обода. Естественно, что эти цифры получены при отсутствии градиента температур по радиусу ротора. Аналогичное явление может иметь место при захлаживании турбины, когда температуры пара и лопаток оказываются ниже, чем температура ротора. Вызванное этой причиной уменьшение плотности сборки лопаток может привести не только к снижению собственных частот лопаток, но и к появлению при колебаниях значительных динамических напряжений в хвостах, для которых допустимая амплитуда переменных напряжений может быть существенно меньшей из-за наличия концентраторов напряжений. Уменьшение усилий зажима по хвостам лопаток в условиях эксплуатации может быть

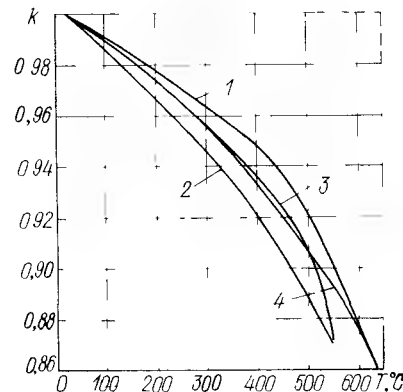


Рис. II.29 Зависимость модуля упругости сталей от температуры.

1 — 15X12ВНМФ, 2 — 15X11МФ и 18X11МФБН, 3 — 12X13, 4 — 20X13

предотвращено за счет изготовления части лопаток из материала с большим, чем у ротора, коэффициентом линейного расширения, например, из аустенитных сталей.

II.6 СИЛЫ, ДЕМПФИРУЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК

Если закрепить лопатку в тисках и возбудить резонансные колебания, а затем внезапно прекратить действие возмущающей силы, то амплитуда колебаний постепенно уменьшится до нуля, т. е. колебания будут затухающими. Это явление не может быть объяснено только сопротивлением воздуха, поскольку затухание существует даже при постановке опыта в вакууме. Таким образом, колебания сопровождаются рассеянием энергии в материале лопатки. В условиях эксплуатации помимо рассеяния энергии в материале лопаток и соединяющих их связей дополнительное рассеяние энергии может иметь место в хвостах лопаток и в зоне контакта лопаток с уруго-фрикционными связями. Кроме того, часть энергии колеблющейся лопатки может передаваться обтекающему ее потоку пара, т. е. может иметь место так называемое аэродемпфирование. Ниже все эти источники рассеяния энергии будут рассмотрены более подробно, а здесь оценим влияние величин демпфирующих сил на амплитуды колебаний.

В общем случае могут существовать достаточно сложные зависимости между демпфирующими силами (силами сопротивления) и амплитудами колебаний. Поскольку эти зависимости, как правило, точно не известны, ограничимся упрощенным описанием сил сопротивления, считая их пропорциональными скорости колебаний. Предположение о пропорциональности сил сопротивления скорости колебаний обладает тем преимуществом, что дифференциальные уравнения колебаний лопаток в этом случае остаются линейными и могут быть легко решены (см. п. XI.2). Учитывая сказанное, запишем выражение для интенсивности сил сопротивления, приходящихся на единицу длины лопатки, в следующем виде:

$$q = 2h \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial V(z, t)}{\partial t}, \quad (II.19)$$

где $(\gamma/g)F$ — масса единицы длины лопатки; $V(z, t)$ — прогиб при колебаниях, зависящий от координаты сечения z и времени t ; h — коэффициент пропорциональности между скоростью колебаний и интенсивностью сил сопротивления (коэффициент затухания). Величину коэффициента h выбираем таким образом, чтобы энергия, рассеянная за цикл при использовании выражения (II.19) для сил сопротивления, фактически равнялась рассеянной за цикл энергии.

При выполнении равенства (II.19) нетрудно показать, что зависимость прогиба лопатки от времени при свободных колеба-

ниях (при отсутствии возмущающих сил) имеет следующий вид (см. п. XI.3):

$$V(z, t) = A \exp(-ht) Z(z) \sin(pt + \alpha), \quad (II.20)$$

где A — коэффициент, определяющий начальную амплитуду колебаний; $Z(z)$ — функция, определяющая форму колебаний лопатки; p — частота колебаний.

Из-за наличия множителя $\exp(-ht)$ свободные колебания лопатки являются затухающими. Изменение с течением времени амплитуды любой точки лопатки показано на рис. II.30. Демпфирующую способность обычно характеризуют уменьшением амплитуды за время $T = 2\pi/p$, равное одному периоду колебаний. Если в какой-либо момент времени прогиб произвольной точки лопатки определяется выражением (II.20), то через промежуток времени, равный периоду колебаний, он окажется следующим:

$$V(z, t + T) = A \exp(-hT) \exp(-ht) Z(z) \sin(pt + \alpha),$$

и, следовательно, за время, равное периоду колебаний, амплитуда уменьшится в $\exp(hT)$ раз. Произведение hT , равное натуральному логарифму отношения прогибов в моменты времени t и $t+T$, называют логарифмическим декрементом колебаний

$$\delta = hT = \ln \frac{V(z, t)}{V(z, t+T)}. \quad (II.21)$$

Выражение (II.21) может быть использовано для экспериментального определения декремента по виброграмме свободных затухающих колебаний. Замерив амплитуды колебаний в моменты времени, отличающиеся на период T , по формуле (II.21) можем найти δ . Так как соседние амплитуды (V_0 и V_1 на рис. II.30) близки друг к другу, а точность определения амплитуд ограничена, то лучшие результаты могут быть получены при сравнении амплитуд колебаний через n периодов.

Если процесс затухания колебаний определяется формулой (II.20), то:

$$\delta = \ln(V_0/V_1) = \ln(V_1/V_2) = \dots = \ln(V_{n-1}/V_n);$$

$$V_0/V_1 = V_1/V_2 = \dots = V_{n-1}/V_n = \exp \delta.$$

Отсюда

$$V_0/V_n = (V_0/V_1)(V_1/V_2) \dots (V_{n-1}/V_n) = \exp(n\delta)$$

и, следовательно,

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{V_0}{V_n}. \quad (II.22)$$

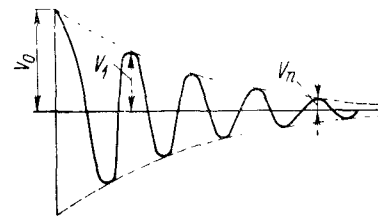


Рис. II.30. Затухающие колебания лопатки

Поскольку декремент обычно зависит от напряжений, т. е. от амплитуды колебаний, и условия (II.19) и (II.20) в точности не выполняются, то выражение (II.22) определяет усредненное значение декремента для диапазона напряжений, заданного амплитудами V_0 и V_n . Логарифмический декремент колебаний можно экспериментально определить, используя не только свободные, но и вынужденные колебания. Рассмотрим, например, установившиеся резонансные изгибные колебания лопатки под действием возмущающей силы, при которых прогиб лопатки имеет вид

$$V(z, t) = AZ(z) \sin(pt + \alpha).$$

Так как колебания являются установившимися, т. е. амплитуда колебаний не зависит от времени, то работа R_1 , совершаемая возмущающей силой за цикл колебаний, равна энергии R_2 , рассеянной за это же время.

Таким образом, при установившихся колебаниях можно записать

$$R_1 = R_2. \quad (II.23)$$

В соответствии с формулой (II.19) интенсивность сил сопротивления равна

$$q = 2h \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial V}{\partial t} = 2h \frac{\gamma}{g} F p A Z(z) \cos(pt + \alpha).$$

Элементарная работа этих сил, распределенных на участке лопатки длиной dz , является следующей:

$$dR_2 = q dz \frac{\partial V}{\partial t} dt.$$

Так как $\frac{\partial V}{\partial t} = p A Z(z) \cos(pt + \alpha)$, то

$$dR_2 = 2h \frac{\gamma}{g} F p^2 A^2 Z^2(z) \cos^2(pt + \alpha) dt dz.$$

Работа сил сопротивления, распределенных по всей длине лопатки, за период колебаний

$$R_2 = 2 \frac{\gamma}{g} h p^2 A^2 \int_0^l F Z^2(z) dz \int_0^T \cos^2(pt + \alpha) dt,$$

но $\int_0^T \cos^2(pt + \alpha) dt = \frac{\pi}{p}$, откуда

$$R_2 = 2 \frac{\gamma}{g} \pi h p A^2 \int_0^l F(z) Z^2(z) dz.$$

Перейдя к относительной координате $\xi = z/l$, для которой выполняется соотношение $0 \leq \xi \leq 1$ при $0 \leq z \leq l$, найдем

$$R_2 = 2 \frac{\gamma}{g} \pi h l p A^2 \int_0^1 F(\xi) Z^2(\xi) d\xi.$$

В п. XIV.1 показано, что функция $Z(\xi)$, определяющая собственную форму колебаний отдельной лопатки, удовлетворяет соотношению:

$$\frac{\gamma}{g} l p^2 \int_0^1 F(\xi) Z^2(\xi) d\xi = \frac{F}{l^3} \int_0^1 J(\xi) \left(\frac{d^2 Z}{d\xi^2} \right)^2 d\xi. \quad (II.24)$$

Подставив (II.24) в выражение для R_2 и имея в виду, что

$$\delta = hT = 2\pi h/p,$$

получим

$$R_2 = \frac{2\pi h}{p} \int_0^1 \frac{E J(\xi)}{l^3} A^2 |Z''(\xi)|^2 d\xi = 2\delta \int_0^1 \frac{E J(\xi)}{2l^3} A^2 |Z''(\xi)|^2 d\xi.$$

Интеграл

$$\int_0^1 \frac{E J(\xi)}{2l^3} A^2 |Z'(\xi)|^2 d\xi = \Pi$$

представляет собой максимальное значение потенциальной энергии колеблющейся лопатки при $\sin(pt + \alpha) = 1$. Окончательно имеем

$$R_2 = 2\delta \Pi.$$

Таким образом, энергия, рассеиваемая за один цикл, равна максимальному значению потенциальной энергии изгиба лопатки, умноженному на удвоенный логарифмический декремент колебаний. Заменив в (II.23) R_2 найденным для него выражением, получим

$$R_1 = 2\delta \Pi. \quad (II.25)$$

Следовательно, при установившихся резонансных колебаниях работа возмущающей силы за один цикл равна максимальному значению потенциальной энергии изгиба лопатки, умноженному на удвоенный логарифмический декремент колебаний. Соотношение (II.25) открывает другой путь определения декремента колебаний: найдя экспериментально работу R_1 , необходимую для поддержания определенной амплитуды колебаний, из выражения (II.25) найдем

$$\delta = R_1 / (2\Pi). \quad (II.25a)$$

При экспериментальном определении рассеяния энергии в материале существуют и другие способы нахождения декремента, описанные в специальной литературе [133]: термический, при котором значение декремента определяется по нагреву исследуемого образца или охладителя, поддерживающего температуру образца постоянной; с помощью непосредственного определения параметров петли гистерезиса в координатах сила - перемещение (или напряжение - деформация); по ширине резонансной кривой при изменении частоты возмущающей силы и т. д.

Величина декремента является весьма важной характеристикой конструкции, определяющей уровень динамических напряжений при резонансных колебаниях. В п. XIII.1 показано, что при изгибных колебаниях лопатки постоянного сечения, вызванных равномерно распределенным по длине лопатки возмущающим усилием интенсивности $q \cos \lambda t$, прогиб определяется следующей формулой:

$$V(\xi, t) = \beta (N/p^2) Z(\xi) \cos(\lambda t + \varepsilon),$$

где

$$N = \frac{ag}{F\gamma} \frac{\int_0^1 Z(\xi) d\xi}{\int_0^1 Z^2(\xi) d\xi};$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{2h\lambda}{p^2 - \lambda^2};$$

$\xi = z/l$ — относительная текущая координата ($0 \leq \xi \leq 1$), β — так называемый коэффициент динамичности, или коэффициент усиления колебаний.

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2)^2 + \mu^2\chi^2}}; \quad \mu = \frac{\lambda}{p}; \quad \chi = \frac{2h}{p} - \frac{\delta}{\pi}.$$

Коэффициент β показывает, во сколько раз динамический прогиб лопатки, вызываемый периодической силой, больше прогиба, создаваемого при статическом приложении той же силы. На рис. II.31 представлено изменение β в зависимости от отношения частоты возмущающей силы к собственной частоте колебаний и от величины χ , равной логарифмическому декременту колебаний δ , деленному на π . Как следует из приведенных на рис. II.31 кривых, в непосредственной близости к резонансу величина β , а следовательно, и амплитуда колебаний, существенно зависят от величины декремента, возрастая при его уменьшении. В области, сравнительно далекой от резонанса, величина декремента практически не оказывает влияния на амплитуду вынужденных колебаний. При совпадении частоты возмущающей силы с собственной частотой колебаний лопатки, т. е. в условиях резонанса, имеют место следующие соотношения:

$$\mu = 1; \quad \beta = \pi/\delta; \quad \varepsilon = \pi/2; \quad V(\xi, t) = \frac{\pi N}{\delta p^2} Z(\xi) \sin pt.$$

Таким образом, при резонансе амплитуда колебаний лопатки обратно пропорциональна декременту колебаний, т. е. увеличение декремента является весьма полезным для снижения уровня резонансных динамических напряжений.

Рассмотрим более подробно перечисленные в начале параграфа факторы, от которых зависит величина рассеиваемой при колебаниях энергии, пропорциональная декременту колебаний, а также возможные способы увеличения декремента.

Рассеяние энергии в материале лопатки. Имеется несколько причин, вызывающих рассеяние энергии в материале при колебаниях, из которых основными являются следующие [133]: пластические деформации микрообъемов материала, сопровождающиеся рассеянием энергии, имеют место даже при деформировании всего тела в пределах упругости в обычном смысле; при колебаниях возникает термоупругое рассеяние энергии, обусловленное

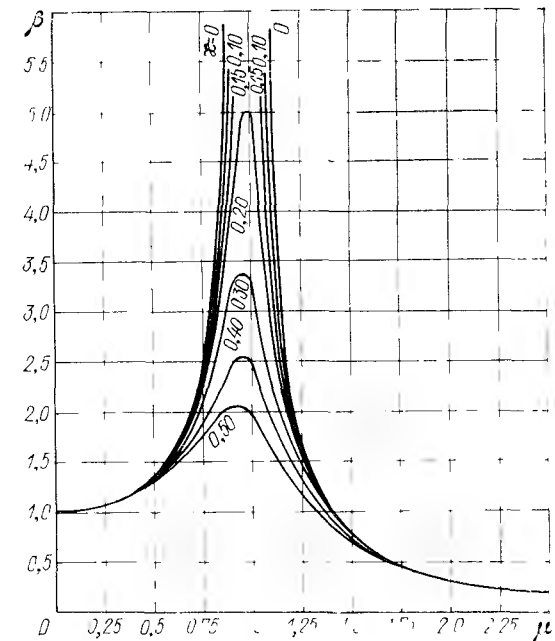


Рис. II.31. Зависимость амплитуды колебаний лопатки от отношения частоты возмущающей силы к собственной частоте и декремента колебаний

тепловыми потоками между различными объемами колеблющегося тела, которые подвергаются различным напряжениям и имеют вследствие этого разные температуры [71]; при колебаниях ферромагнитных материалов дополнительное рассеяние энергии вызывается магнитомеханическим гистерезисом, связанным с процессом смещений границ доменов под действием механических напряжений. Как относительное влияние указанных выше факторов, так и величина рассеиваемой при колебаниях энергии зависят от материала колеблющегося тела, режима его термообработки, температуры испытаний и т. д. Для лопаточных материалов в рабочем диапазоне частот и динамических напряжений обычно наблюдается зависимость декремента от уровня напряжений и практически отсутствует зависимость от частоты колебаний.

Выше отмечалось, что представление сил демпфирования в виде (II.19) не учитывает зависимости декремента от напряжений и поэтому является приближенным. Поскольку связь между декрементом и уровнем динамических напряжений существует, то величина декремента зависит от напряженного состояния колеблющегося тела. Для получения «истинной» зависимости декремента колебаний от напряжений исследуемые образцы должны находиться в однородном напряженном состоянии, что может быть обеспечено, например, при продольных колебаниях или крутильных колебаниях тонкостенных трубчатых образцов под действием сосредоточенных сил или моментов, приложенных на торцах образцов. Необходимо, однако, учитывать, что при переносе полученных при подобных испытаниях данных на изгибные колебания лопаток необходимо определять энергию, рассеянную за цикл, с учетом неоднородности напряженного состояния как по сечению, так и высоте лопатки. В случае, если декремент колебаний увеличивается с ростом напряжений, то величина декремента при изгибных колебаниях консольных образцов или лопаток может оказаться значительно меньше, чем при колебаниях образцов из того же материала в условиях однородного напряженного состояния. Это объясняется тем, что при изгибных колебаниях относительный объем материала, подвергающегося близким к максимальным динамическим напряжениям, весьма мал, а декремент оказывается тем выше, чем большая доля материала подвергается относительно высоким циклическим напряжениям [133]. В п. XIII.8 приведены данные об отношении потенциальной энергии при i -й собственной форме изгибных колебаний консольной лопатки постоянного сечения (P_i) к потенциальной энергии лопатки, находящейся в условиях однородного напряженного состояния ($P_{\max}$), при условии равенства максимальных динамических напряжений в обоих случаях. Оказалось, что независимо от номера собственной формы имеет место следующая формула:

$$P_i/P_{\max} = W^2/(4JF), \quad (\text{II.26})$$

где W — момент сопротивления поперечного сечения.

Используя формулу (II.26), нетрудно показать, что при изгибных колебаниях стержня прямоугольного поперечного сечения толщиной a и шириной b , для которого $F = ab$, $W = a^2b/6$, $J = a^3b/12$, справедливо соотношение:

$$P_i/P_{\max} = 1/12.$$

Аналогично для стержня круглого поперечного сечения $F = \pi d^2/4$; $W = \pi d^3/32$, $J = \pi d^4/64$, откуда¹

$$P_i/P_{\max} = 1/16.$$

¹ При чистом изгибе стержня прямоугольного поперечного сечения его потенциальная энергия составляет 1/3 от величины $P_{\max}$, при чистом изгибе стержня круглого поперечного сечения — 1/4.

Еще меньшим является отношение $P_i/P_{\max}$ при колебаниях лопаток. В работе [13] приведены приближенные формулы для геометрических характеристик лопаточных профилей. В частности, если для профиля, хорда которого равна b , максимальная толщина c и максимальный подъем средней линии профиля h , выполняется условие $h = c$, то имеют место следующие соотношения: $J = 0,08bc^3$; $W = 0,094bc^2$; $F = 0,7bc$. Подставив эти значения в формулу (II.26), получим:

$$P_i/P_{\max} = 0,0395,$$

независимо от номера собственной формы i .

Из этой формулы следует, что при изгибных колебаниях лопаток объем материала, подвергающегося напряжениям, близким к максимальным, относительно мал.

Учитывая относительно малое значение потенциальной энергии при изгибных колебаниях лопатки по сравнению со случаем однородного напряженного состояния и меньшее значение декремента, можно найти, что и величина рассеянной за цикл энергии при изгибных колебаниях также будет значительно меньше, чем при однородном напряженном состоянии. Особенно малым может быть рассеяние энергии в материале лопатки при условии, что максимальные динамические напряжения имеют место только в ограниченном объеме в зоне концентрации напряжений, а в остальном материале лопатки уровень динамических напряжений значительно ниже.

При определении энергии, рассеиваемой в материале, необходимо принять специальные меры для сведения к минимуму рассеяния энергии в местах крепления исследуемого образца [133], а также рассеяния энергии в окружающую среду. Следует учитывать, что при проведении испытаний при атмосферном давлении колебания образца передаются окружающему его воздуху, что может привести к определенному возрастанию декремента, особенно при колебаниях с низкими частотами. В [177] приведены экспериментальные данные о возможности существенного уменьшения декремента при испытаниях в вакууме по сравнению с испытаниями на воздухе для низкочастотных колебаний. Причина этого явления заключается в том, что максимальная скорость колебаний периферийного сечения консольной лопатки постоянного сечения или образца, как показано в п. XIII.8, не зависит от частоты, т. е. не зависит от номера собственной формы при условии, что максимальные динамические напряжения в корневом сечении сохраняются постоянными. Связь между скоростью колебаний и динамическими напряжениями более универсальна и сохраняется также для различных лопаток или образцов, отличающихся размерами поперечных сечений и длиной, при условии, что форма поперечного сечения сохраняется неизменной или, по крайней мере, остается постоянным отношение JF/W^2 . Энергия, рассеиваемая за период колебаний в окружающую среду,

зависит от скорости колебаний образца и пропорциональна плотности среды и периоду колебаний. Так как для различных собственных форм при одинаковых максимальных динамических

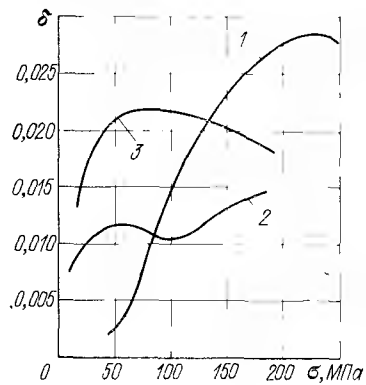


Рис. 11.32. Зависимость декремента колебаний для стали 15X11МФ от напряжений и температуры: 1 — 20 °C; 2 — 500 °C; 3 — 550 °C

напряжениях максимальные скорости колебаний сохраняются постоянными, то при увеличении периода колебаний (т. е. при уменьшении частоты колебаний) отношение энергии, рассеиваемой в окружающей среде, к энергии, рассеиваемой в материале, увеличивается. В связи с этим в ряде случаев необходимо принимать специальные меры, например проводить испытания в вакууме, чтобы определить рассеяние энергии в материале с достаточной точностью.

Величина декремента в значительной степени зависит от структуры материала, обусловленной, в частности, термообработкой. Обычно отжиг повышает, а закалка понижает демпфирующие свойства сталей. На величину декремента оказывает существенное влияние температура, асимметрия цикла, предварительная пластическая деформация, длительное воздействие циклических напряжений и ряд других факторов. Например, в [47] приведены экспериментальные данные о возможности существенного уменьшения декремента колебаний турбинных лопаток в процессе эксплуатации. Температура в большинстве случаев повышает, а асимметрия цикла, как правило, понижает декремент колебаний. Особенно значительное снижение декремента может иметь место при приложении к лопаткам из нержавеющей сталей статических растягивающих напряжений, вызывающих уменьшение магнитомеханического гистерезиса при колебаниях. На рис. 11.32 показана зависимость декремента стали 15X11МФ от температуры, а на рис. 11.33 — зависимость декремента стали 20X13 от асимметрии цикла [193]. На рис. 11.34 показано изменение величины декремента с ростом напряжений для лопаточных

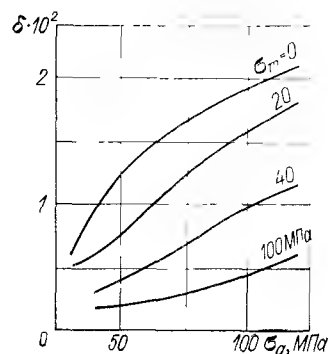


Рис. 11.33. Зависимость декремента колебаний стали 20X13 от асимметрии цикла: σ_a — переменные напряжения; σ_t — статические растягивающие напряжения

сталей и титановых сплавов, применяемых при изготовлении рабочих лопаток. В [155] приведены данные о декременте колебаний для различных сталей и сплавов, из которых следует, что лопаточные стали обладают наибольшей демпфирующей способностью. Необходимо, однако, учитывать, что для вращающихся турбинных лопаток с учетом асимметрии цикла и весьма неравномерного распределения напряжений по сечению и высоте, величина декремента, определяемого рассеиванием энергии в материале лопатки, может быть значительно меньше значений, указанных на рис. 11.34, особенно при колебаниях по высшим собственным формам.

Декремент колебаний для титановых сплавов оказывается значительно ниже, чем для лопаточных сталей. Тем не менее, в дальнейшем будет показано, что для лопаток последних ступеней цилиндра низкого давления, где чаще всего применяются эти сплавы, влияние конструкционного демпфирования оказывается, как правило, значительно большим, чем рассеяние в материале лопатки. В связи с этим замена стали титаном не вызывает сколько-нибудь существенного возрастания динамических напряжений в условиях эксплуатации. Более того, уменьшение плотности материала лопатки, как следует из приведенных ниже соотношений, сопровождается увеличением аэродемпфирования и может привести к снижению уровня резонансных динамических напряжений.

Конструкционное демпфирование. Во многих случаях наибольший вклад в суммарное рассеяние энергии при колебаниях вносит конструкционное демпфирование. Конструкционное демпфирование имеет место в хвостовых соединениях, а также в местах соединения лопаток и связей. Особенно большой величины, как показано в п. XVI.5, может достигнуть конструкционное демпфирование при использовании упругофрикционных связей, соединяющих на круг все лопатки ступени.

На рис. 11.35 показана зависимость декремента и частоты колебаний отдельной лопатки от силы зажима ее хвоста в тисках. Рабочая длина лопатки, изготовленной из стали 20X13, составляла 180 мм. Определение декремента производилось путем записи свободных затухающих колебаний при начальных напряжениях в корневом сечении лопатки, равных 300 МПа. Как

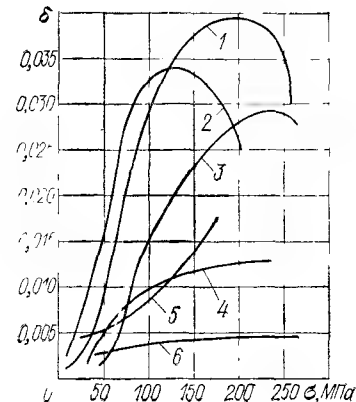


Рис. 11.34. Зависимость декремента колебаний от уровня напряжений для лопаточных материалов при 20 °C:

1 — 12X13; 2 — 20X13; 3 — 15X11МФ; 4 — 15X12ВНМФ; 5 — сплав титана BT-5; 6 — сплав титана TC-5

следует из приведенных на рисунке данных, увеличение силы зажима свыше 150 кН уже не изменяет ни частоту колебаний, ни декремент, определяемый в этом случае, главным образом, рассеянием энергии в материале.

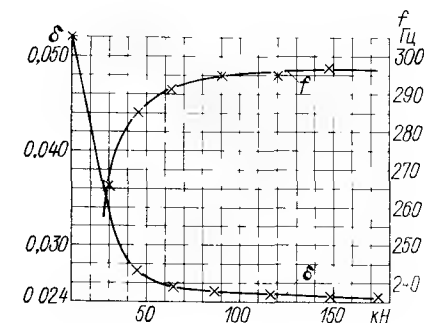


Рис II 35 Влияние силы зажима на частоту собственных колебаний лопатки и декремент колебаний

При силе зажима в 10 кН рассеяние энергии в заделке увеличивается декремент более чем в 2 раза при одновременном значительном снижении частоты колебаний. Качественно подобное явление может иметь место и при недостаточно плотной сборке лопаток на роторе. Существует большое число расчетных и экспериментальных работ, посвященных изысканию возможности увеличения рассеяния энергии в хвостовых соединениях лопаток. Например, было показано, что существенное увеличение рассеяния энергии в елочном хвостовом соединении возможно при разгрузке верхнего зуба хвоста. Необходимо, однако, учесть, что выполнение рекомендации по увеличению демпфирования предполагает соблюдение столь жестких требований к системе допусков при изготовлении и сборке лопаток, которые на практике часто не могут быть удовлетворены. Кроме того, для лопаток мощных турбин нагрузки по опорным поверхностям хвостов оказываются столь значительными, что заметного возрастания демпфирования, во всяком случае при рабочей частоте вращения, не происходит.

При качественной, обеспечивающей постоянство собственных частот лопаток, сборке не происходит сколько-нибудь заметного увеличения рассеяния энергии и при использовании Т-образного или вильчатого хвостовых соединений. Для подтверждения этих соображений приведем некоторые данные по величине декремента, полученные при испытаниях отдельных вращающихся лопаток в вакуумной камере при давлении 3—4 кПа.

На рис. II 36 приведены результаты испытаний лопаток с $D_{cp}/l = 4,27$, изготовленных из сплава на никелевой основе,

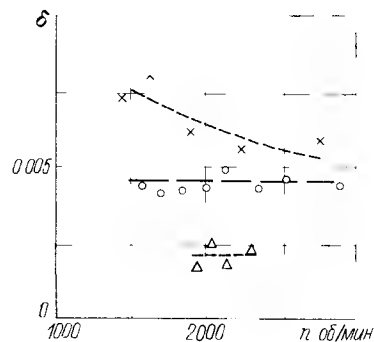


Рис II 36 Зависимость декремента колебаний от частоты вращения и номера собственной формы отдельной лопатки с $D_{cp}/l = 4,27$
 × — первая форма ($\sigma_{max} = 55$ МПа),
 ○ — вторая форма ($\sigma_{max} = 24$ МПа),
 △ — четвертая форма ($\sigma_{max} = 28$ МПа)

которые крепятся на диске с помощью трехопорного елочного хвоста, а на рис II 37 — результаты испытаний лопаток с $D_{cp}/l = 2,58$, изготовленных из нержавеющей стали, которые крепятся на диске с помощью вильчатого хвоста с пятью вилками [28], на рис II 36 и II 37 указаны также значения динамических напряжений при различных собственных формах колебаний. Как следует из приведенных на рис II 36 результатов, значения декремента оказались весьма малыми ($\delta \leq 0,008$) для всех зарегистрированных собственных форм. При второй собственной форме декремент колебаний даже при снижении частоты вращения в 2 раза, т. е. при уменьшении давления по опорным поверхностям елочного хвоста в 4 раза против номинального, остался практически неизменным. Результаты, приведенные на рис II 37, указывают на то, что определенное возрастание декремента имеет место только при снижении частоты вращения в 3 раза против номинальной, т. е. при уменьшении центробежных сил на порядок. В целом приведенные результаты указывают на малое рассеяние энергии в хвостовом соединении и материале лопаток мощных турбин, во всяком случае, при номинальных статических нагрузках.

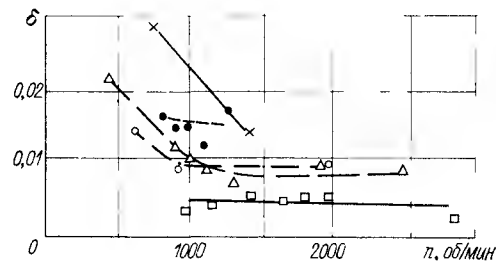


Рис II 37 Зависимость декремента колебаний от частоты вращения и собственной формы отдельной лопатки с $D_{cp}/l = 2,58$:
 × — первая форма ($\sigma_{max} = 116$ МПа), ○ — вторая форма ($\sigma_{max} = 37$ МПа), △ — третья форма ($\sigma_{max} = 56$ МПа), ● — четвертая форма ($\sigma_{max} = 79$ МПа), □ — шестая форма ($\sigma_{max} = 44$ МПа)

В [67] приведены экспериментальные данные, указывающие на возможность увеличения декремента при соединении лопаток в пакеты с помощью паяных проволок и клепаных бандажей. Испытания, проводившиеся в отсутствие вращения, показали, что декремент колебаний может быть значительно увеличен, как правило, за счет относительного возрастания динамических напряжений в проволоках и бандажах. Необходимо учесть, что дополнительная нагрузка проволок и бандажей в большинстве случаев не может быть рекомендована не только потому, что относительные динамические напряжения в них часто и так являются максимальными, но и в связи со сравнительно невысоким уровнем их усталостной прочности. В [67] приведены также данные об изменении декремента колебаний пакетов лопаток, соединенных клепаными бандажами или паяными проволоками, при длительных сроках эксплуатации. Декремент колебаний пакетов определялся по виброграмме затухающих колебаний. Испытания проводились по единой методике и повторялись

в течение нескольких лет во время останова турбин. Результаты испытаний свидетельствуют о том, что в среднем декременты колебаний пакетов лопаток с вильчатыми и Т-образными хвостами с течением времени несколько уменьшаются, а собственные частоты пакетов — незначительно возрастают. По всей вероятности, это связано с увеличением плотности посадки лопаток из-за коррозии, отложения солей и т. п.

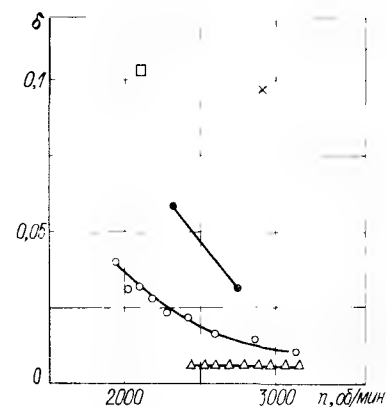


Рис. II.38. Зависимость декремента колебаний от частоты вращения и группы внутрипакетных колебаний:

$$D_{cp}/l = 2,58 \begin{cases} \square - \text{первая группа} \\ (\sigma_{\max} = 10 \text{ МПа}) \\ \bullet - \text{вторая группа} \\ (\sigma_{\max} = 30 \text{ МПа}) \end{cases}$$

$$D_{cp}/l = 4,27 \begin{cases} \triangle - \text{первая группа} \\ (\sigma_{\max} = 5 \text{ МПа}) \\ \circ - \text{вторая группа} \\ (\sigma_{\max} = 30 \text{ МПа}) \\ \triangle - \text{четвертая группа} \\ (\sigma_{\max} = 18 \text{ МПа}) \end{cases}$$

Особенно существенным может быть рассеяние энергии при соединении лопаток упругофрикционными связями, поскольку в этом случае при внутрипакетных колебаниях возможно проскальзывание по контактным поверхностям лопаток и связей при весьма низком уровне динамических напряжений (см. п. XVI.5). На рис. II.38 приведена зависимость декремента от частоты вращения для различных групп форм внутрипакетных колебаний лопаток с $D_{cp}/l = 4,27$ и $D_{cp}/l = 2,58$, соединенных замкнутыми на круг упругофрикционными связями. На рисунке показан также уровень динамических напряжений в лопатках при различных группах собственных форм. Из сравнения с результатами, представленными на рис. II.36 и II.37, где указаны значения декремента, полученные при аналогичных по методике

испытаниях отдельных вращающихся лопаток этих ступеней, видно, что декремент при первой группе форм внутрипакетных колебаний лопаток, соединенных упругофрикционными связями, оказался на порядок выше, чем декремент колебаний отдельных лопаток, несмотря на значительно меньший уровень динамических напряжений в лопатках, соединенных упругофрикционными связями. По мере усложнения собственных форм внутрипакетных колебаний и при увеличении частоты вращения турбины декремент резко падает, хотя все еще значительно превосходит величину декремента при «соответствующих» собственных формах колебаний отдельной лопатки. Одной из причин уменьшения декремента при высших группах форм внутрипакетных колебаний является то, что при фиксированных значениях динамических напряжений в лопатках амплитуда колебаний при этих формах

и связанная с ней величина взаимных смещений лопаток и связей по контактным поверхностям уменьшаются, что и приводит к уменьшению рассеяния энергии в зоне контакта за цикл (выше отмечалось, что существует универсальная связь между динамическими напряжениями и скоростями колебаний, поэтому при равенстве напряжений меньшим частотам соответствуют большие амплитуды колебаний).

Необходимо иметь в виду, что декремент колебаний при использовании упругофрикционных связей возрастает при увеличении уровня динамических напряжений, поскольку рассеяние энергии в зоне контакта зависит от отношения динамических напряжений к статическим напряжениям, действующим по контактным поверхностям (см. п. XIII.10, XVI.5). Увеличение декремента при II группе собственных форм по мере уменьшения частоты вращения, показанное на рис. II.38, свидетельствует о том, что аналогичное возрастание декремента вблизи рабочих оборотов могло бы иметь место при более высоком уровне динамических напряжений. Следует, однако, отметить, что наибольший практический интерес представляет возможность повышения декремента именно при сравнительно небольшом уровне динамических напряжений в лопатках, поскольку допустимые переменные напряжения в них с учетом асимметрии цикла, эрозии, упрочнения входных кромок, наличия концентраторов, влияния паровой среды и т. д. могут быть почти на порядок ниже предела выносливости при симметричном цикле стандартных образцов из данного материала (см. п. II.10). Испытанные конструкции упругофрикционных связей как раз и обеспечили существенное увеличение декремента при первой группе форм внутрипакетных колебаний с весьма низким уровнем динамических напряжений в лопатках (рис. II.38).

Таким образом, сопоставление результатов исследований, приведенных на рис. II.36—II.38, указывает на то, что для некоторых наиболее опасных форм внутрипакетных колебаний лопаток, соединенных упругофрикционными связями, энергия, рассеиваемая в зоне контакта лопаток и связей, может больше чем на порядок превосходить энергию, рассеиваемую в материале лопатки и в хвостовом соединении.

Аэродемпфирование. Силовое взаимодействие колеблющейся лопатки с обтекающим ее потоком носит весьма сложный характер. Существует несколько причин, по которым энергия колеблющейся лопатки может передаваться потоку [153]: при колебаниях лопатки изменяется угол атаки, причем дополнительная подъемная сила находится в противофазе со скоростью колебаний, в связи с чем для поддержания установившихся колебаний необходимо затрачивать энергию; при колебаниях в сжимаемой жидкости возникают акустические волны, которые также рассеивают энергию; наконец, дополнительные потери энергии имеют место при перестройке пограничного слоя, возникающей при колебаниях.

При некоторых режимах (нерасчетное обтекание с большими углами атаки, наличие сдвига по фазе между различными компонентами перемещений одной и той же колеблющейся лопадки или различных лопаток в ступени и т. п.) энергия, отдаваемая колеблющейся лопаткой в поток, может существенно уменьшиться или, наоборот, лопатка сама может черпать энергию из потока, поддерживающего ее автоколебания. Достаточно надежное расчетное определение величины энергии, рассеиваемой колеблющимися гурбинными лопатками в обтекающий их вязкий сжимаемый поток пара, в настоящее время не представляется возможным. Весьма перспективными поэтому являются методы экспериментального определения величины энергии, рассеиваемой колеблющейся лопаткой в поток [153].

Оценим порядок сил, действующих на колеблющуюся лопатку от обтекающего ее потока следующим образом. Считая скорость колебаний лопатки $v_0 = \partial V / \partial t$ малой по сравнению с установившейся скоростью потока w ¹, можно на основании уравнения Бернулли найти, что переменная во времени составляющая давления на поверхности лопатки Δp пропорциональна следующей величине:

$$\Delta p \sim \rho v_0 w,$$

где ρ — плотность потока, обтекающего лопатку.

Переменная аэродинамическая сила L , действующая на всю лопатку, будет тогда пропорциональна величине $\Delta p b l$, т. е.

$$L \sim \rho v_0 w b l.$$

Между скоростью колебаний лопатки v_0 и действующей на нее от потока силой L имеется определенный сдвиг по фазе, величина которого зависит от соотношения между круговой частотой колебаний лопатки p , хордой лопатки b и скоростью потока w , образующими безразмерный комплекс — число Струхала Sh . Кроме того, сила L зависит от сдвига по фазе между колебаниями соседних лопаток α , угла установки лопаток β и относительного шага решетки t/b . Таким образом, можно записать следующее выражение:

$$L = \rho v_0 w b l \varphi(\alpha, \beta, t/b, Sh).$$

Вообще говоря, кроме указанных выше параметров, функция φ зависит также от угла атаки i , а при учете сжимаемости потока — от числа Маха (M) и геометрии проточной части, определяющей возможность возникновения акустических резонансов в потоке.

Мощность N , отдаваемая колеблющейся лопаткой потоку, пропорциональна произведению силы на скорость колебаний,

¹ В п. XIII.8 приведена связь между динамическими напряжениями и скоростью колебаний лопатки, подтверждающая это предположение при любом представляющем практический интерес уровне напряжений.

причем учитывается только составляющая силы, падающая в противофазе со скоростью. Таким образом, выражение для мощности N окажется следующим:

$$N = \rho v_0^2 w b l \varphi_1(\alpha, \beta, t/b, Sh).$$

Энергия U , отдаваемая потоку за время, равное периоду колебаний $T = 2\pi/p$, определяется следующим выражением:

$$U = \frac{2\pi \rho v_0^2 w b l}{p} \varphi_1(\alpha, \beta, t/b, Sh).$$

По аналогии с формулой (II.25а) введем понятие аэродинамического декремента колебаний δ_a , определив его как отношение энергии, рассеянной в поток за цикл колебаний, к удвоенной потенциальной Π или равной ей кинетической T_k энергии колеблющейся лопатки, т. е.

$$\delta_a = U/2\Pi \text{ или } \delta_a = U/2T_k.$$

Так как кинетическая энергия пропорциональна плотности лопатки $\rho_a = \gamma'g$, ее объему Fl и квадрату скорости v_0^2 , т. е. $T_k \sim \rho_a Fl v_0^2$, то

$$\delta_a = \frac{U}{2T_k} \sim \frac{\rho w b}{\rho_a p F} \psi, \quad (II.27)$$

где функция ψ зависит не только от $\alpha, \beta, t/b$ и Sh , но и от геометрических характеристик лопатки и закона их изменения по высоте, формы колебаний и т. д.

Не ставя задачи точного определения величины δ_a , оценим тенденции в изменении декремента как для различных собственных форм одной и той же лопатки, так и для одинаковых собственных форм лопаток различных ступеней. Рассмотрим изгибные колебания, причем первоначально будем сравнивать одни и те же собственные формы лопаток различных ступеней. В п. XI.3 приведена формула для определения собственных частот лопаток постоянного сечения

$$p = \frac{a}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{F\gamma}}.$$

Для одинаковых собственных форм различных лопаток коэффициент a сохраняет одно и то же значение. Для высших собственных форм численное значение этого коэффициента резко возрастает (например, $a = 3,516$ для первого тона колебаний отдельной лопатки, $a = 22,07$ для второго тона и т. д.). Рассматривая однотипные ступени и одинаковые собственные формы, будем пренебрегать различием в значениях функции ψ в формуле (II.27). Кроме того, при проведении последующих преобразований учтем соотношение

$$w \sim D\omega,$$

где D — средний диаметр ступени; ω — угловая скорость вращения турбины;

$$\frac{F}{b} \sim b; \quad \rho \sim \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho_l}} \sim \frac{bE}{l^2 \rho_l} \sqrt{\frac{\rho_l}{E}}.$$

Используя эти соотношения, преобразуем формулу (II.27) к виду:

$$\delta_a \sim \frac{\rho D \omega l^2}{b^2 E} \sqrt{\frac{E}{\rho_l}} \quad \text{или} \quad \delta_a \sim \frac{\rho D \omega l^2}{b^2 \rho_l} \sqrt{\frac{\rho_l}{E}}. \quad (\text{II.27a})$$

Покажем, что существует универсальная зависимость между аэродинамическим декрементом и напряжениями парового изгиба $\sigma_{изг}$, уровень которых, как указывалось выше, считается в определенной мере пропорциональным уровню динамических напряжений в лопатках. Будем считать, что напряжения парового изгиба вызваны действием распределенной по высоте лопатки нагрузки интенсивности q_u , которая определяется по формуле

$$q_u = \frac{\sum \omega_u \Delta G}{z_1},$$

где $\sum \omega_u$ — сумма проекций в окружном направлении скорости пара на входе и выходе из рабочих лопаток, ΔG — секундный расход пара через кольцевую решетку единичной высоты; z_1 — число рабочих лопаток в ступени.

Для дальнейших выкладок используем следующие соотношения, справедливые для однотипных ступеней:

$$\sum \omega_u \sim D\omega; \quad z_1 \sim D b; \quad \Delta G \sim \rho D \omega_a \sim \rho D^2 \omega,$$

где ρ — плотность потока; ω_a — осевая скорость потока, обтекающего лопатки.

Учитывая эти соотношения, найдем, что $q_u \sim \omega^2 b D^2 \rho$. Так как $\sigma_{изг} \sim q_u l^2 / W$, а $W \sim b^3$, то:

$$\sigma_{изг} \sim \omega^2 D^2 \rho l^2 b^2. \quad (\text{II.28})$$

Используя формулы (II.27a) и (II.28), получим¹:

$$\frac{\sigma_{изг}}{\delta_a} \sim \omega D E \sqrt{\frac{\rho_l}{E}} \quad \text{или} \quad \delta_a \sim \frac{\sigma_{изг}}{\omega D E} \sqrt{\frac{E}{\rho_l}} \sim \frac{\sigma_{изг}}{\omega D E} \sim \frac{\sigma_{изг}}{\omega D \rho_l}. \quad (\text{II.29})$$

Если материал лопатки и частота вращения турбины сохраняются постоянными, то

$$\sigma_{изг} / \delta_a \sim D \quad \text{или} \quad \delta_a \sim \sigma_{изг} / D.$$

Таким образом, если сравниваются одинаковые формы колебаний лопаток однотипных ступеней, то, учитывая примерное равенство напряжений парового изгиба для различных ступеней,

величину δ_a можно считать мало изменяющейся по проточной части турбины.

Величина аэродемпфирования резко уменьшается при высших собственных формах колебаний по сравнению с ее величиной при первом тоне. Как следует из формулы (II.27), величина аэродемпфирования обратно пропорциональна частоте колебаний лопатки, если пренебречь возможным некоторым изменением функции Ψ . Физически это объясняется тем, что при различных собственных формах одинаковым динамическим напряжениям соответствуют практически одинаковые скорости колебаний лопатки (см. п. XIII.8). В связи с этим сила, действующая на лопатку со стороны потока, в первом приближении (с точностью до функции Ψ) не зависит от собственной формы, если динамические напряжения сохраняются постоянными. Энергия, рассеиваемая в поток за цикл, пропорциональна силе, скорости колебаний лопатки и периоду колебаний, т. е. при сделанных предположениях оказывается обратно пропорциональной частоте колеблющейся лопатки.

Таким образом, аэродинамический декремент сохраняется примерно постоянным при одинаковых собственных формах колебаний лопаток различных ступеней и убывает с ростом длины лопаток, если сравниваются различные формы с одинаковой частотой. По этой причине аэродемпфированием практически можно пренебречь при рассмотрении, например, колебаний с частотой из лопаток последних ступеней цилиндра низкого давления.

Из формулы (II.29) следует также, что уменьшение модуля упругости (или плотности) материала лопатки при прочих равных условиях вызывает увеличение аэродинамического декремента, т. е. переход, например, от стали к титану является, с этой точки зрения, весьма целесообразным.

II.7. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ВОЗБУДИМОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ

В п. I.4 и II.6 отмечалось, что знания величин возмущающих и демпфирующих сил недостаточно для определения уровня динамических напряжений в лопатках. Поэтому большой практический интерес представляет определение сравнительной возбудимости различных собственных форм, т. е. определение относительного уровня напряжений при различных формах колебаний в случае введения упрощающих предположений относительно возмущающих и демпфирующих сил.

Как и в п. II.1—II.3, изучение вопроса начнем с рассмотрения изгибных и крутильных колебаний лопаток постоянного сечения. Рассмотрим два типа возмущающих сил: равномерно распределенную по высоте лопатки нагрузку, имитирующую, например, влияние кромочных следов и сосредоточенную на вершине лопатки силу, имитирующую влияние концевых потерь. Хотя в п. I.4 и указывалось, что интенсивность возмущающих сил зависит от

¹ Величина E/ρ_l сохраняется практически постоянной для всех материалов, используемых при изготовлении рабочих лопаток

их частоты (номера гармоники), числа Струхала, сдвига по фазе между силами, действующими на соседние лопадки и т. д., в первом приближении примем, что интенсивность возмущающих сил не зависит от частоты колебаний, т. е. будем считать возмущающую нагрузку одинаковой для различных собственных форм. Столь же существенные упрощения сделаем и относительно демпфирующих сил. В п. II.6 отмечалось, например, что при наличии уругофрикционных связей величина декремента при внутрипакетных колебаниях может на порядок превышать величину декремента при колебаниях отдельных лопадок, что аэродемпфирование обратно пропорционально частоте колебаний и т. д. Для проводимого ниже упрощенного анализа откажемся от этих уточнений и будем считать декремент колебаний постоянным, не зависящим от собственной формы и уровня напряжений.

При использовании этих упрощающих предположений в п. XIII 8 показано, что максимальные резонансные динамические напряжения при различных собственных формах изгибных колебаний консольной лопадки постоянного сечения достигаются в корневом сечении и при возбуждении равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q определяются следующей формулой:

$$\sigma_i(0) = \frac{\pi q l^2}{8W} C_i, \quad (\text{II.30})$$

где

$$C_i = \frac{\int_0^1 Z_i(\xi) d\xi}{\rho_i^2 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi};$$

$Z_i(\xi)$ — функция, определяющая i -ю собственную форму; ρ_i — параметр, имеющий определенное значение для каждой собственной формы, причем $f_i \sim \rho_i^2$; f_i — это i -я собственная частота (п. XI.3).

Так как при статическом приложении нагрузки интенсивности q напряжения в корневом сечении

$$\sigma_{ст} = q l^2 / (2W),$$

то формулу (II.30) можно представить в виде

$$\sigma_i(0) = 2\pi \sigma_{ст} C_i / \delta. \quad (\text{II.31})$$

Формула (II.31) остается справедливой не только при колебаниях консольных лопадок, но и при колебаниях лопадок с опертой вершиной, частоты которых в ряде случаев близки к частотам внутрипакетных тангенциальных колебаний (см. п. II.2).

В табл. II.4 приведены результаты вычислений для первых трех собственных форм колебаний лопадок со свободной или опертой

Вершина лопадки свободна					Вершина лопадки оперта				
Номер формы	ρ_i	$f_{отн\ i}$	C_i	$\sigma_{отн\ i}$	Номер формы	ρ_i	$f_{отн\ i}$	C_i	$\sigma_{отн\ i}$
1	1,875	1	0,4440	1	1	3,927	4,39	0,1120	0,2520
2	4,694	6,27	0,0395	0,0890	2	7,069	14,2	0,0033	0,0075
3	7,855	17,55	0,0082	0,0186	3	10,210	29,7	0,0064	0,0144

вершиной. В таблице указаны значения ρ_i , C_i , а также относительные величины собственных частот $f_{отн\ i} = f_i / f_1$ и динамических напряжений $\sigma_{отн\ i} = \sigma_i / \sigma_1$, причем за единичные приняты соответствующие значения для первого тона колебаний консольной

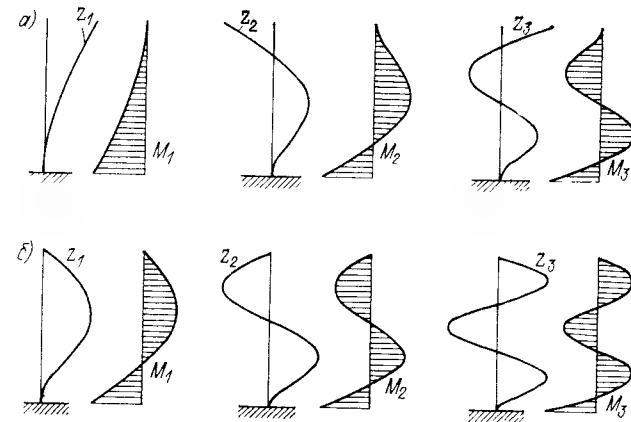


Рис. II.39. Собственные формы Z и эпюры изгибающих моментов M для первых трех собственных частот лопадок со свободной (а) и опертой (б) вершиной

лопадки. Собственные формы и соответствующие им эпюры изгибающих моментов приведены на рис. II.39. Как следует из таблицы, относительные величины динамических напряжений резко убывают для высших собственных форм.

Физически полученные результаты объясняются следующими причинами. В п. XIII.8 показано, что при изгибных колебаниях консольных лопадок постоянного сечения независимо от номера собственной формы равным максимальным динамическим напряжениям соответствуют равные значения потенциальной энергии и равные скорости колебаний вершин лопадок. Поскольку выше было принято, что декремент не зависит от уровня напряжений, то энергия, рассеиваемая за период колебаний, окажется следующей: $R_2 = 2\delta\pi \sim \sigma_{i\max}^2$. Работа возмущающих сил за период колебаний R_1 пропорциональна интенсивности возмущающей

нагрузки q , скорости колебаний (или пропорциональной ей величине динамических напряжений) и длительности периода. Так как период колебаний обратно пропорционален собственной частоте f_i , то справедливо соотношение: $R_1 \sim q \sigma_{i \max} / f_i$. Поскольку при установившихся колебаниях работа возмущающих сил равна рассеиваемой энергии, то в соответствии с формулой (II.23) $R_1 = R_2$ или, используя полученные выше соотношения, $\sigma_{i \max} \sim 1/f_i$. Из табл. II.4 следует, однако, что фактически динамические напряжения уменьшаются быстрее, чем величина $1/f_i$, обратно пропорциональная частоте колебаний. Второй причиной, дополнительно снижающей уровень напряжений при высших собственных

Таблица II 5

Номер формы	ρ_i	$f_{\text{отн } i}$	C'_i	$\sigma_{\text{отн } i} = 1/f_{\text{отн } i}$
1	1,875	1	0,569	1
2	4,694	6,27	0,091	0,1595
3	7,855	17,55	0,032	0,0568
4	10,995	34,39	0,016	0,0291
5	14,137	56,85	0,010	0,0176

формах, является то, что при этих формах равномерно распределенные по высоте лопатки возмущающие силы на одних участках могут поддерживать колебания, а на других — тормозить их.

Таким образом, по мере усложнения собственных форм $Z_i(\xi)$, т. е. по мере увеличения числа перемен знака по высоте лопатки

при высших формах колебаний, собственные формы $Z_i(\xi)$ становятся «более ортогональными» к возмущающей нагрузке q , т. е.

все в большей степени уменьшается величина $\int_0^1 Z_i(\xi) q d\xi$, пропорциональная работе возмущающих сил, по сравнению с величиной $\int_0^1 |Z_i(\xi)| q |d\xi|$.

Изменение сравнительной возбудимости различных собственных форм может быть определено и в случае возбуждения колебаний сосредоточенной на вершине лопатки силой. Естественно, что динамические напряжения для лопатки с опертой вершиной будут в этом случае равны нулю, так как равной нулю окажется работа возмущающей силы. Динамические напряжения при различных собственных формах консольной лопатки по аналогии с (II.31) могут быть представлены в виде (п. XIII.8)

$$\sigma_i = 2\pi\sigma_{\text{ст}} C'_i / \delta, \quad (\text{II.32})$$

где $C'_i = 2/\rho_i^2$.

Относительные значения динамических напряжений при различных собственных формах колебаний консольной лопатки указаны в табл. II.5. Поскольку в данном случае единственная возмущающая сила приложена в сечении с максимальной амплитудой, то относительная величина динамических напряжений оказы-

вается обратно пропорциональной частоте колебаний. Сравним величины коэффициентов C_1 и C'_1 . Из табл. II.4 и II.5 следует, что $C'_1/C_1 = 1,28$. Напомним, что при рассмотрении резонансных колебаний одномассовой системы с трением $A_{\text{дин}}/A_{\text{ст}} = \sigma_{\text{дин}}/\sigma_{\text{ст}} = \pi/\delta$, где $A_{\text{дин}}$ и $\sigma_{\text{дин}}$ — амплитуда и напряжение при резонансе, а $A_{\text{ст}}$ и $\sigma_{\text{ст}}$ — при статическом приложении силы. По аналогии с формулами (II.31) и (II.32) динамические напряжения при колебаниях одномассовой системы могут быть представлены в виде

$$\sigma_{\text{дин}} = 2\pi\sigma_{\text{ст}} C_0 / \delta,$$

где $C_0 = 0,5$.

Таким образом, выполняется неравенство $C'_1 > C_0 > C_1$, г. е. при равенстве статических напряжений динамические напряжения будут наибольшими в случае приложения сосредоточенной возмущающей силы на вершине лопатки. Физически это объясняется следующим: при приложении возмущающей силы на вершине лопатки она совершает наибольшую возможную работу, так как скорость периферийного сечения является максимальной. Работа демпфирующих сил не является максимальной, так как демпфирующие силы в соответствии с принятым предположением (см. п. II.6) действуют во всех сечениях, в том числе и в тех, где амплитуды и скорости колебаний малы. При колебаниях одномассовой системы и демпфирующие, и возмущающие силы приложены в точке с максимальной амплитудой, т. е. их работа является максимальной. Наконец, при колебаниях под действием равномерно распределенной по высоте лопатки нагрузки работа как возмущающих, так и демпфирующих сил оказывается не максимальной, причем работа возмущающих сил уменьшается в большей степени, что и приводит к неравенству $C_1 < C_0$.

Аналогичная картина уменьшения сравнительной возбудимости высших собственных форм наблюдается и при рассмотрении крутильных колебаний лопаток. В п. XIII.8 рассмотрены резонансные крутильные колебания консольных лопаток постоянного сечения при условии, что декремент колебаний не зависит от уровня напряжений. На основании проведенного анализа следует, что при действии равномерно распределенного по высоте лопатки крутящего момента максимальные напряжения кручения, возникающие в корневом сечении, могут быть представлены в виде

$$\tau_i(0) = 2\pi\tau_{\text{ст}} C_{\text{кр } i} \delta, \quad (\text{II.33})$$

где $\tau_{\text{ст}}$ — напряжения в корневом сечении при статическом приложении равномерно распределенного крутящего момента; $C_{\text{кр } i} = 4/[\pi (2i - 1)]^2$.

При возбуждении колебаний сосредоточенным на вершине лопатки крутящим моментом динамические напряжения могут быть представлены в виде

$$\tau_i(0) = 2\pi\tau_{\text{ст}} C'_{\text{кр } i} \delta, \quad (\text{II.34})$$

где $C'_{\text{кр } i} = 2/[\pi (2i - 1)]$, т. е. $(C'_{\text{кр } i})^2 = C_{\text{кр } i}$.

Результаты вычислений с использованием формул (II.33), (II.34) и закономерностей спектра частот крутильных колебаний (см. п. XIII.8) сведены в табл. II.6. В таблице указаны также относительные величины собственных частот крутильных колебаний $f_{отн\ i}$ и динамических напряжений $\tau_{отн\ i} = \tau_i(0)/\tau_1(0)$.

Как и в случае изгибных колебаний, при действии сосредоточенного момента на вершине лопатки убывание напряжений при высших собственных формах крутильных колебаний происходит медленнее, чем при действии равномерно распределенного по высоте лопатки момента. Причина заключается в том, что равномерно

Таблица II.6

Номер формы	$f_{отн}$	Равномерно распределен- ный крутя- щий момент		Сосредото- ченный на вершине крутящий момент	
		$C_{кр\ i}$	$f_{отн\ i}$	$C'_{кр\ i}$	$f'_{отн\ i}$
1	1	0,405	1	0,637	1
2	3	0,045	0,111	0,212	0,333
3	5	0,016	0,040	0,127	0,200
4	7	0,008	0,020	0,091	0,143
5	9	0,005	0,012	0,071	0,111

распределенная по высоте нагрузка по мере повышения частот оказывается все «более ортогональной» к собственным формам колебаний лопаток.

Сравнительная опасность крутильных и изгибных колебаний может быть оценена при помощи формул (II.31; II.32; II.33; II.34), из которых следует, что $\tau_i(0)/\sigma_i(0) \sim \tau_{ст} \sigma_{сг}$. Таким образом,

чем больше величина $\tau_{сг} \sigma_{сг}$, тем более опасными оказываются крутильные колебания; отношение $\tau_{сг} \sigma_{сг}$ зависит, как показано в п. XIII.8, от удлинения лопатки l/b (где b — хорда) и точки приложения возмущающих сил по профилю лопатки. В п. I.4 указывалось, что для решетки тонких слабозогнутых профилей точка приложения переменных аэродинамических сил близка к точке, расположенной на $(1/4)b$ от входной кромки. Так как для подобных профилей центр кручения расположен на расстоянии $(1/2)b$ от входной кромки, то при равномерно распределенной нагрузке интенсивности q максимальные значения изгибающего и крутящего моментов оказываются соответственно равными: $M_{изг} = ql^2/2$; $M_{кр} = qlb/4$. Считая декремент колебаний при изгибных и крутильных колебаниях одинаковым, в данном случае найдем

$$\frac{\sigma_i}{\tau_i} = \frac{2l}{b} \frac{C_i}{C_{кр\ i}}. \quad (II.35)$$

В общем случае, если расстояние между центром кручения и центром приложения переменных аэродинамических сил составляет sb , где $0 \leq s \leq 1$, то

$$\frac{\sigma}{\tau_i} = \frac{l}{2sb} \frac{C_i}{C_{кр\ i}}.$$

В работе [235] в качестве верхней оценки для динамических напряжений при крутильных колебаниях принято, что $s = 1/2$, т. е. выполняется соотношение

$$\frac{\sigma_i}{\tau_i} = \frac{l}{b} \frac{C_i}{C_{кр\ i}}.$$

Из формулы (II.35) следует, что относительная опасность крутильных колебаний уменьшается по мере увеличения отношения l/b .

Результаты настоящего параграфа получены при введении очень существенных упрощений относительно возмущающих и демпфирующих сил. Например, было принято, что декремент колебаний не зависит от номера собственных форм, а в п. II.6 было показано, что он, как правило, уменьшается при усложнении собственных форм. Максимум динамических напряжений при высших собственных формах для закрученных лопаток переменного сечения обычно не совпадает с корневым сечением, а может иметь место в сечении, где конструктивный предел выносливости оказывается существенно сниженным, например, за счет установки связей, упрочнения входных кромок, эрозии и т. д. Поэтому для закрученных лопаток переменного сечения тенденция уменьшения возбудимости высших собственных форм изгибных и крутильных колебаний под действием равных по амплитуде возмущающих сил, хотя, естественно, и остается, но проявляется далеко не так сильно и однозначно, как следует из табл. II.4–II.6. Что касается абсолютной величины динамических напряжений при резонансных колебаниях, то необходимо иметь в виду следующее: величины $\sigma_{сг}$ и $\tau_{сг}$, входящие в формулы (II.31)–(II.34), представляют собой напряжения в лопатках, вызванные статическим приложением возмущающих сил. Относительные величины возмущающих сил сравнительно невелики, и, как показано в п. I.4, обычно выполняется соотношение: $q_k^{отн} q_k q_{ст} < 0,1$, где q_k — интенсивность возмущающего усилия с кратностью k , т. е. с частотой kn ; $q_{ст}$ — интенсивность статической паровой нагрузки.

Оценим величину динамических напряжений в лопатке постоянного сечения при следующих предположениях: напряжения парового изгиба в корневом сечении лопатки под действием статической паровой нагрузки $\sigma_{изг} = 20$ МПа; $q_k^{отн} = 0,05$; $\delta = 0,01$; возмущающая нагрузка распределена по высоте лопатки равномерно. Будем считать, что имеет место резонанс с первым тоном тангенциальных колебаний. При принятых предположениях динамические напряжения в корневом сечении лопатки в соответствии с формулой (II.31) и табл. II.4 окажутся следующими:

$$\sigma_i(0) = \sigma_{изг} q_k^{отн} (2\pi/\delta) C_i = 279 \text{ МПа.}$$

т. е. будут почти в 14 раз превышать напряжения парового изгиба и достигнут уровня, опасного для усталостной прочности лопатки.

Естественно поэтому, что для обеспечения надежной работы лопаточного аппарата необходимо избегать резонанса с «наиболее возбудимыми» собственными формами.

II.8. ПАКЕТНЫЙ МНОЖИТЕЛЬ

В п. II.7 отмечалось, что возбудимость высших собственных форм под действием равномерно распределенной по высоте лопатки нагрузки уменьшается быстрее, чем под действием сосредоточенной на вершине силы. Это объясняется тем, что при высших собственных формах распределенная нагрузка на одних участках поддерживает колебания, а на других — тормозит их. Аналогичное явление может иметь место и при колебаниях лопаток, соединенных различными по конструкции связями. Так как в этом случае распределение амплитуд и фаз колебаний по длине пакета (или замкнутого на круг «пакета») определяется резонирующей собственной формой, а распределение возмущающих нагрузок по длине пакета — гармоникой, вызывающей резонансные колебания, то при колебаниях различных лопаток в пакете будет иметь место определенный сдвиг по фазе между возмущающими нагрузками и скоростями колебаний лопаток. Из-за наличия указанного сдвига по фазе работа возмущающих сил при колебаниях пакета лопаток будет меньше, чем при колебаниях отдельных лопаток, для которых гармоническая возмущающая сила при резонансе находится в фазе со скоростью колебаний и производит максимальную работу (см. п. XIII.1). Уменьшение работы возмущающих сил и вызванное этим снижение уровня динамических напряжений в лопатках пакета при резонансе является одним из главных преимуществ соединения лопаток связями.

При изучении колебаний лопаток, соединенных связями, ограничимся только рассмотрением возмущающих сил, создаваемых неравномерностью потока по окружности. Будем считать, что имеют место резонансные колебания с k -й кратностью, т. е. лопатки совершают k колебаний за оборот и круговая частота их совместных колебаний $p = k\omega$, где ω — угловая скорость вращения ротора турбины. Так как в рассматриваемом случае скорость колеблющейся лопатки изменяется по закону $\sin(k\omega t + \alpha)$, то работу может произвести только возмущающая сила с той же частотой, вызванная k -й гармоникой неравномерности поля давлений, скоростей и углов потока (см. п. I.4).

Будем считать, что прогибы различных поперечных сечений n -й лопатки в пакете при резонансе определяются следующей формулой:

$$V_n(z, t) = A_n Z(z) \sin(pt + \alpha), \quad (II.36)$$

где A_n — амплитуда колебаний n -й лопатки; $Z(z)$ — собственная форма — функция, характеризующая распределение прогибов по

высоте лопатки при колебаниях пакета с частотой $p = k\omega$ α — начальный фазовый угол.

Примем также, что возмущающая нагрузка, действующая в направлении колебаний лопатки, изменяется по радиусу и окружности следующим образом:

$$q(z, \varphi) = q(z) \cos k\varphi.$$

Так как для вращающейся лопатки угловая координата φ изменяется по закону $\varphi = \omega t$, то возмущающая нагрузка действующая, например, на первую лопатку в пакете, примет вид

$$q_1(z, t) = q(z) \cos k\omega t = q(z) \cos pt. \quad (II.37)$$

Вычислим работу возмущающей силы за период, считая, что в пакет объединено m лопаток из z_1 рабочих лопаток ступени. Работа возмущающей силы при колебаниях первой лопатки в пакете равна (см. п. XIII.4):

$$\begin{aligned} R_1 &= \int_0^{2\pi/p} \int_0^t \frac{\partial V_1(z, t)}{\partial t} q_1(z, t) dz dt = \\ &= A_1 \int_0^{2\pi/p} p \cos(pt - \alpha) \cos pt dt \int_0^t q(z) Z(z) dz. \end{aligned} \quad (II.38)$$

Обозначив $B = \int_0^t q(z) Z(z) dz$, найдем: $R_1 = A_1 \pi B \cos \alpha$.

Определяя работу возмущающей силы при колебаниях второй лопатки в пакете, учтем, что она расположена под углом $\varphi' = 2\pi'z_1$ к первой лопатке и поэтому действующая на нее возмущающая нагрузка будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} q_2(z, t) &= q(z) \cos k(\varphi - \varphi') = \\ &= q(z) \cos \left(k\omega t + \frac{2\pi k}{z_1} \right) = q(z) \cos \left(pt + \frac{2\pi k}{z_1} \right). \end{aligned} \quad (II.37a)$$

Используя формулы (II.36) и (II.37a), получим следующее выражение для работы возмущающей силы:

$$\begin{aligned} R_2 &= A_2 \int_0^{2\pi/p} p \cos(pt + \alpha) \cos \left(pt + \frac{2\pi k}{z_1} \right) dt \int_0^t q(z) Z(z) dz = \\ &= A_2 \pi B [\cos \alpha \cos(2\pi k'z_1) + \sin \alpha \sin(2\pi k'z_1)]. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления для гребней, n -й, m -й лопатки в пакете приведут к следующим выражениям:

$$\left. \begin{aligned} R_g &= A_g \pi B [\cos \alpha \cos 2(2\pi k z_1) + \sin \alpha \sin 2(2\pi k z_1)]; \\ R_n &= A_n \pi B [\cos \alpha \cos (n-1)(2\pi k z_1) + \\ &\quad + \sin \alpha \sin (n-1)(2\pi k z_1)]; \\ R_m &= A_m \pi B [\cos \alpha \cos (m-1)(2\pi k z_1) + \\ &\quad + \sin \alpha \sin (m-1)(2\pi k z_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.39})$$

В п. XII.4 указывается, что начальный фазовый угол α следует выбирать таким образом, чтобы суммарная работа возмущающих сил R_Σ оказалась максимальной. Используя это условие, получим

$$R_\Sigma = \sum_{n=1}^m R_n = \pi B \sqrt{\left[\sum_{n=1}^m A_n \cos \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^m A_n \sin \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right]^2}. \quad (\text{II.40})$$

Если бы отсутствовал сдвиг по фазе между возмущающими силами и скоростями колебаний всех лопаток в пакете, то работа возмущающих сил приняла бы максимальное значение $R_{\max}$. Выражение для $R_{\max}$ при использовании формул (II.39) примет следующий вид:

$$R_{\max} = \pi B \sum_{n=1}^m |A_n|. \quad (\text{II.41})$$

Отношение фактической суммарной работы возмущающих сил R_Σ к максимальной работе $R_{\max}$, следуя [63; 65], будем называть пакетным множителем μ

$$\mu = \frac{R_\Sigma}{R_{\max}} = \frac{\sqrt{\left[\sum_{n=1}^m A_n \cos \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^m A_n \sin \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right]^2}}{\sum_{n=1}^m |A_n|}. \quad (\text{II.42})$$

В соответствии с принятым определением пакетный множитель характеризует уменьшение работы возмущающих сил только за счет наличия сдвига по фазе между возмущающими силами и скоростями колебаний различных лопаток в пакете. Уменьшение динамических напряжений при соединении лопаток в пакет, например, за счет увеличения конструкционного демпфирования (см. п. II.6) или уменьшения возбудимости, связанной с измене-

нием собственных форм и частот лопаток в пакете по сравнению с формами и частотами отдельных лопаток (п. II.7), величиной пакетного множителя не учитывается. Из формулы (II.42) следует, что для определения пакетного множителя необходимы только данные о распределении амплитуд колебаний по длине пакета, а не о законе изменения возмущающих нагрузок $q(z)$ ¹

Так как распределение амплитуд по длине пакета может быть с достаточной точностью найдено расчетным путем, то с той же точностью может быть вычислен и пакетный множитель для различных собственных форм, характеризующий эффективность соединения лопаток в пакет. Данные о величине пакетного множителя используются при сравнении опасности различных собственных форм, при выборе числа лопаток в пакете и т. д.

Использование выражений (II.36) и (II.37) для собственных форм и возмущающих нагрузок не уменьшает общности выражения (II.42) для пакетного множителя. Если бы при колебаниях различные поперечные сечения лопаток получали перемещения в осевом направлении (U), в плоскости диска (V) и поворачивались на угол θ , а воздействие возмущающих сил сводилось бы к распределенной нагрузке $q_x(z)$, действующей в осевом направлении, к распределенной нагрузке $q_y(z)$, действующей в тангенциальном направлении, и к распределенному крутящему моменту $m(z)$, то необходимо было бы вычислить работу различных компонентов возмущающих сил и просуммировать полученные выражения. Разделив найденную сумму на максимальную величину работы, которая имела бы место при отсутствии сдвига по фазе между возмущающими силами и скоростями колебаний всех лопаток пакета, можно было бы и в этом более общем случае вычислить пакетный множитель. При вычислении пакетного множителя в этом случае необходимо иметь данные об относительной величине нагрузок $q_x(z)$, $q_y(z)$ и $m(z)$, поскольку закон изменения перемещений U , V и θ по длине пакета различен. Как правило, подобные данные отсутствуют, однако, если величина пакетного множителя, подсчитанная с использованием только одного компонента возмущающей силы $q_x(z)$, $q_y(z)$ или $m(z)$, будет мала независимо от выбранной компоненты, соединение лопаток в пакет можно считать достаточно эффективным при рассматриваемой собственной форме [из формулы (II.42) следует, что при использовании только одного компонента возмущающей силы ее величина не влияет на пакетный множитель].

Особенно простой вид формула, определяющая пакетный множитель, приобретает при синфазных колебаниях лопаток.

¹ Данные о законе изменения возмущающей нагрузки по длине лопатки могут понадобиться при условии, что собственные формы $Z(z)$ для разных лопаток в пакете разные. В этом случае коэффициенты B , входящие в формулы (II.40) и (II.41), будут различными для разных лопаток и не могут быть сокращены в формуле (II.42).

В этом случае, учитывая, что амплитуды всех лопаток A_n равны друг другу, формулу (II.42) преобразуем к следующему виду:

$$\mu = \frac{\sqrt{\left[\sum_{n=1}^m \cos \frac{2k\pi(n-1)}{z_1}\right]^2 + \left[\sum_{n=1}^m \sin \frac{2k\pi(n-1)}{z_1}\right]^2}}{m}. \quad (\text{II.43})$$

Воспользовавшись известными соотношениями для суммы тригонометрических функций [159], найдем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \cos \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} &= 1 + \cos \frac{2k\pi}{z_1} + \cos 2 \frac{2k\pi}{z_1} + \dots + \cos (m-1) \frac{2k\pi}{z_1} = \frac{\sin \frac{mk\pi}{z_1} \cos \frac{(m-1)k\pi}{z_1}}{\sin \frac{k\pi}{z_1}}; \\ \sum_{n=1}^m \sin \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} &= \sin \frac{2k\pi}{z_1} + \sin 2 \frac{2k\pi}{z_1} + \dots + \sin (m-1) \frac{2k\pi}{z_1} = \frac{\sin \frac{mk\pi}{z_1} \sin \frac{(m-1)k\pi}{z_1}}{\sin \frac{k\pi}{z_1}}. \end{aligned}$$

С учетом этих формул, получим окончательное выражение для пакетного множителя при синфазных колебаниях

$$\mu = \left| \frac{\sin (mk\pi/z_1)}{m \sin (k\pi/z_1)} \right|. \quad (\text{II.44})$$

В п. XIII.4 показано, что выражение (II.44) может быть получено и при сравнении величин возмущающих сил, действующих на лопатку в пакете и на отдельную лопатку

Легко понять, почему при синфазных колебаниях пакета лопаток пакетный множитель можно определять и как отношение фактической работы возмущающих сил к максимальной работе, и как отношение осредненного значения возмущающей силы, действующей на лопатку в пакете, к амплитудному значению возмущающей силы, действующей на лопатку без связей. Это объясняется тем, что при синфазных колебаниях суммарная работа пропорциональна величине суммарной силы, действующей на все лопатки пакета, а максимальная работа — пропорциональна амплитудному значению силы и числу лопаток в пакете. В результате пакетный множитель оказывается равным отношению осредненной нагрузки, действующей на лопатку в пакете, к амплитудному значению возмущающей силы. Этим и объясняется широко распространенное понимание величины пакетного множителя при синфазных колебаниях как меры уменьшения возмущающей силы при соединении лопаток в пакет.

Подобное определение оказывается несправедливым при рассмотрении внутрипакетных колебаний. Действительно, в этом случае равенство, например, нулю суммы возмущающих сил, действующих на все лопатки в пакете, не будет означать равенства нулю работы возмущающих сил и, следовательно, не будет характеризовать эффективности соединения лопаток в пакет. В то же время определение пакетного множителя как отношения фактической работы возмущающих сил к ее максимальному значению будет характеризовать эффективность соединения лопаток в пакет как при синфазных, так и при внутрипакетных колебаниях

При синфазных колебаниях пакетный множитель приближенно определяет и степень уменьшения динамических напряжений в лопатках при их соединении в пакет. Если декремент колебаний не зависит от уровня динамических напряжений и допустимо пренебречь изменением декремента и собственной формы колебаний лопатки при синфазных колебаниях пакета по сравнению с декрементом и собственной формой колебаний отдельной лопатки, то будет справедлива следующая формула:

$$\sigma_n = \mu \sigma_d. \quad (\text{II.45})$$

где σ_n — динамические напряжения при синфазных колебаниях пакета; σ_d — динамические напряжения при колебаниях отдельной лопатки.

В дальнейшем пакетный множитель при синфазных колебаниях будем обозначать μ , а пакетный множитель при внутрипакетных колебаниях — $\mu_{\text{вп}}$.

Рассмотрим некоторые закономерности изменения величины μ . На рис. II.40 показана зависимость μ от кратности колебаний и числа лопаток в пакете, на рис. II.41 — зависимость μ и осредненной нагрузки $q_{\text{ср}}$ от кратности колебаний для пакета из 16 лопаток. В рассматриваемых примерах принято, что $z_1 = 128$ и $k/z_1 \ll 1$. Как следует из рисунка, при увеличении k и m первоначально происходит монотонное уменьшение пакетного множителя вплоть до нуля, а затем некоторое возрастание до величины, значительно меньшей единицы. Физически равенство нулю μ означает, что по длине пакета размещается целая волна возмущающей нагрузки $q \cos kq$ и сумма сил, действующих на все лопатки в пакете, оказывается равной нулю — рис. II.41, б. Достижение

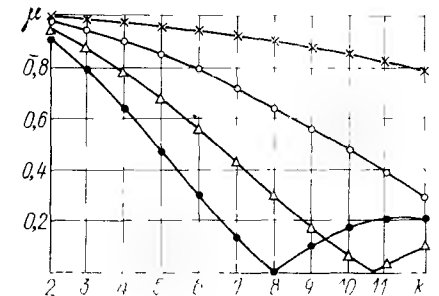


Рис. II.40. Зависимость μ от кратности колебаний k и числа лопаток в пакете при $z_1 = 128$:

$m = 8$ — $\circ$ — $m = 10$ — $\triangle$ — $m = 12$ — $\square$ — $m = 16$ — $\bullet$

максимума величиной μ при последующем возрастании произведения km указывает на размещение по длине пакета полутора волн возмущения — рис II 41, в и т. д.

Анализ формулы (II 44) показывает, что величина μ может стремиться к единице в двух предельных случаях при очень малых числах m и k по сравнению с z_1 , когда $km/z_1 \ll 1$ и

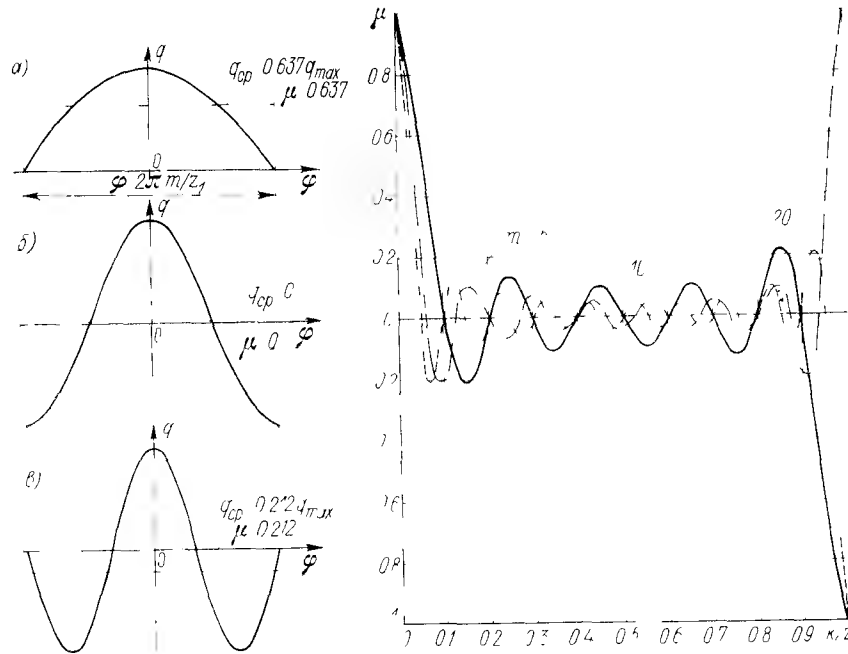


Рис II 41 Зависимость осредненной нагрузки J_{cp} и пакетного множителя μ от кратности колебаний ($m = 16$, $z_1 = 128$) а — $k = 4$, б — $k = 8$, в — $k = 12$

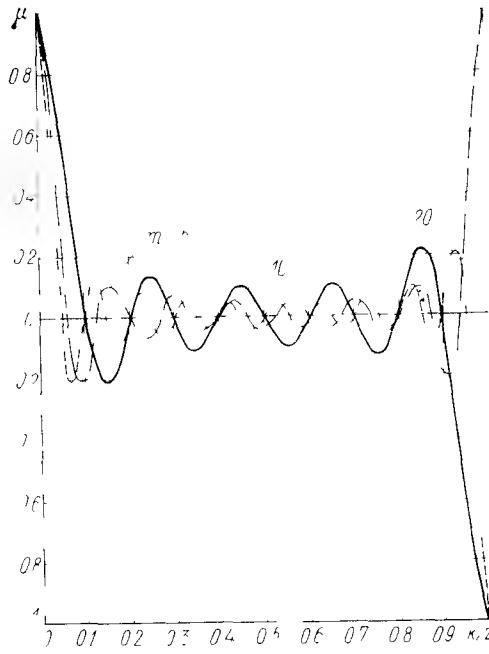


Рис II 42 Зависимость пакетного множителя μ от m и k/z_1

$\sin(mk\pi/z_1) \approx mk\pi/z_1$, а также при высокочастотных колебаниях, когда выполняется соотношение $k/z_1 \rightarrow 1$. В последнем случае, обозначив $k/z_1 = 1 - \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$, найдем, что $|\sin(mk\pi/z_1)| = |\sin m\pi\alpha| \approx |m\pi\alpha|$, $|\sin(k\pi/z_1)| \approx |\pi\alpha|$ и $\mu \rightarrow 1$. Зависимость μ от k/z_1 при различных значениях m изображена на рис II 42. Физически возрастание величины μ при $k/z_1 \approx 1$ объясняется тем, что на протяжении шага рабочих лопаток размещается целая волна возмущающей нагрузки, все лопатки по отношению к возмущающей нагрузке находятся в одинаковых условиях и поэтому их соединение в пакет оказывается неэффективным.

Как следует из приведенных на рис II 42 кривых, для интервала значений $0,2 \leq k/z_1 \leq 0,8$ пакетный множитель при $m = 10$,

$m = 15$, $m = 20$ не превосходит 0,15. В том случае, когда колебания рабочих лопаток вызываются импульсами от кромок соел, т. е. $k = z$, величина пакетного множителя определяется следующей формулой

$$\mu = \frac{\sin(m\pi z/z_1)}{m \sin(\pi z/z_1)}. \quad (\text{II } 46)$$

Из рис II 40 и II 42 следует, что при малых значениях k уменьшения пакетного множителя можно достигнуть за счет увеличения числа лопаток в пакете.

В частности, при замыкании всех лопаток ступени пакетный множитель равен

$$\mu = \frac{\sin \pi k}{z_1 \sin(\pi k/z_1)}. \quad (\text{II } 47)$$

Из формулы (II 47) следует, что пакетный множитель при замыкании всех лопаток ступени оказывается отличным от нуля только при выполнении условия $k = sz_1$, где s — целое, т. е. для очень высокочастотных колебаний. Для низкочастотных колебаний, когда $k = z_1$, пакетный множитель в точности равен нулю, если пренебречь технологическими отклонениями при изготовлении и сборке лопаток и связан, приводящими к некоторому различию в амплитудах соединенных ступеней лопаток при их синфазных колебаниях. Влияние технологических отклонений на величину пакетного множителя рассмотрено в п. XII 7.

При внутрипакетных колебаниях единиц формулы типа (II 44), естественно, уже не удастся получить в связи с изменением отношения амплитуд лопаток при различных собственных формах. Для вычисления величины μ_i при определенной форме внутрипакетных колебаний в формулу (II 42) необходимо подставить соответствующие этой форме распределение амплитуд лопаток по длине пакета. Если не только амплитуды и фазы, но и формы прогиба по высоте для разных лопаток в пакете оказываются несколько отличными, то вместо величин A_n в формулу (II 42)

следует подставить произведение $A_n B_i$, где $B_i = \int_0^1 Z_{i,n}(z) q(z) dz$, а $Z_{i,n}(z)$ — форма прогиба по высоте n -й лопатки при i -й собственной форме колебаний пакета.

В частном случае, когда внутрипакетные колебания вызываются импульсами от кромок соел ($k = z$), величина пакетного множителя определяется следующей формулой

$$\mu_{PH} = \frac{\sqrt{\left[\sum_{n=1}^m A_n \cos \frac{2z\pi(n-1)}{z_1} \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^m A_n \sin \frac{2z\pi(n-1)}{z_1} \right]^2}}{\sum_{n=1}^m |A_n|}. \quad (\text{II } 48)$$

Следует отметить, что представляющее наибольший практический интерес максимальное значение $\mu_{\text{вн}}$ не очень чувствительно к различиям в форме прогиба по длине пакета. В [27] проведено сравнение зависимости численного значения пакетного множителя для аксиально-крутильных колебаний с одним и двумя узлами по длине пакета от отношения z/z_1 . Закон изменения амплитуд лопаток по длине пакета описывается двумя различными зависимостями: формулой

$$A_n = C \cos [k\pi (n - 0,5) m] \quad (\text{II } 49)$$

(где k — число узлов по длине пакета), справедливой для внутрипакетных тангенциальных колебаний лопаток при определенных упрощающих предположениях относительно характера соединения лопаток со связями [27], а также приближенными формулами для аксиально-крутильных колебаний с одним и двумя узлами, рекомендованными в [63, 134]. На рис. II.43, а показано сопоставление величин $\mu_{\text{вн}}$, подсчитанной на основании приближенной формулы (II.49) и данных работы [63] по формуле (II.48), на рис. II.43, б — на основании приближенной формулы (II.49) и данных работы [134].

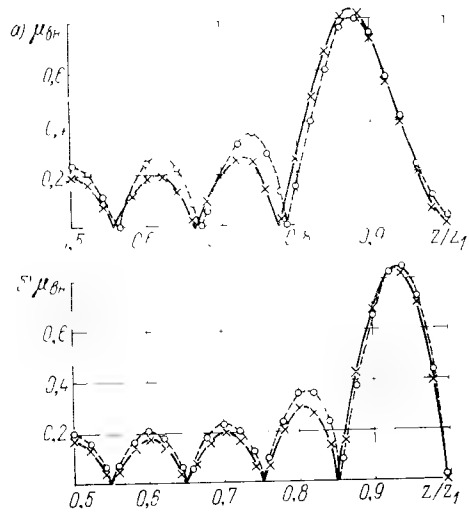


Рис. II.43 Сравнение величины пакетного множителя $\mu_{\text{вн}}$ при аксиально-крутильных колебаниях с двумя (а) и одним (б) узлом по длине пакета:

× × — при использовании формулы (II.49),
○ ○ — по работе [63] для а и работе [134] для б

по длине пакета. Более того, при одинаковом числе лопаток в пакете и числе узлов по длине пакета даже довольно существенные отличия в распределении амплитуд по длине пакета сравнительно слабо влияют на максимум $\mu_{\text{вн}}$ и отношение z/z_1 , при котором он достигается.

Для иллюстрации на рис. II.44, а представлены собственные формы с одним узлом по длине пакета при внутрипакетных тангенциальных колебаниях лопаток (см. п. XI.9) и внутрипакетных крутильных колебаниях (см. п. XII.2). На рис. II.44, б показана зависимость $\mu_{\text{вн}}$ от z/z_1 для этих двух собственных форм, подсчитанная по формуле (II.48). Как видно, несмотря на значительные

различия в законе распределения амплитуд по длине пакета максимум $\mu_{\text{вн}}$, представляющий наибольший практический интерес и отношение z/z_1 , при котором этот максимум достигается, для обеих рассмотренных собственных форм оказываются весьма близкими. Необходимо учесть, что собственные формы, соответствующие синфазным колебаниям и внутрипакетным колебаниям с различным числом узлов по длине пакета (т. е., например, колебания типа A_0 и B_0 , A_1 и B_1 и т. д.), составляя, в определенном смысле, полную систему функций и поэтому при фиксированном значении z/z_1 всегда найдется одна из форм, для которой численное значение пакетного множителя окажется достаточно большим.

Например, в табл. II.7 приведена зависимость μ от z/z_1 для пакетов из двух—десяти лопаток, а в табл. II.8 — зависимость $\mu_{\text{вн}}$ от z/z_1 для пакетов из четырех и восьми лопаток [30]. Из формул (II.46) и (II.48), по которым производилось вычисление пакетного множителя, следует, что значения μ и $\mu_{\text{вн}}$ остаются неизменными при $z/z_1 = a$ и $z/z_1 = s \pm a$, где s — целое, т. е.,

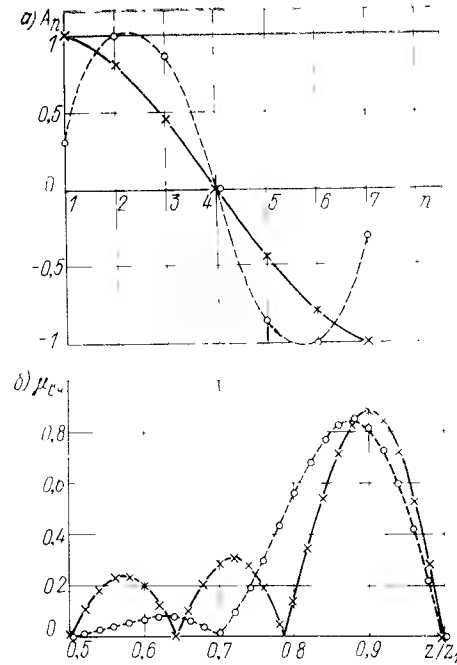


Рис. II.44 Сравнение собственных форм (а) и численных значений пакетного множителя $\mu_{\text{вн}}$ (б) при внутрипакетных изгибных (×) и внутрипакетных крутильных (○) колебаниях с одним узлом по длине пакета

Таблица II.7

m	z/z ₁						
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1
2	0	0,309	0,588	0,811	0,951	0,988	1
3	0,333	0,206	0,127	0,540	0,873	0,958	1
4	0	0,250	0,181	0,250	0,771	0,91	1
5	0,200	0	0,247	0	0,647	0,904	1
6	0	0,167	0,121	0,167	0,514	0,853	1
7	0,143	0,088	0,054	0,232	0,374	0,815	1
8	0	0,077	0,147	0,203	0,238	0,762	1
9	0,111	0,111	0,111	0,111	0,111	0,702	1
10	0	0	0	0	0	0,639	1

Таблица 118

k	z, z ₁						
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1
Пакет из четырех лопаток							
1	0,413	0,437	0,455	0,845	0,663	0,367	0
2	0	0,559	0,770	0,559	0,182	0,049	0
3	1	0,845	0,482	0,137	0,018	0,022	0
Пакет из восьми лопаток							
1	0,199	0,170	0,077	0,113	0,833	0,683	0
2	0	0,130	0,268	0,496	0,630	0,216	0
3	0,233	0,209	0,117	0,800	0,190	0,028	0
4	0	0,173	0,622	0,452	0,056	0,038	0
5	0,351	0,391	0,736	0,057	0,045	0,008	0
6	0	0,803	0,283	0,081	0,017	0,013	0
7	1	0,510	0,031	0,011	0,011	0,002	0

например, при $z/z_1 = 0,3$ и $0,7$, $0,4$ и $0,6$ и т. д. Как следует из табл. при фиксированном значении z/z_1 величина пакетного множителя для одной из форм синфазных или внутривибрирующих колебаний оказывается относительно близкой к единице, т. е. соединение лопаток в пакет для этой формы оказывается неэффективным. Если для синфазных колебаний за счет соответствующего выбора m и z/z_1 всегда можно получить достаточно малое значение μ , то при этом для одной из форм внутривибрирующих колебаний значение $\mu_{\text{вн}}$ окажется сравнительно близким к единице. Это обстоятельство увеличивает относительную опасность внутривибрирующих колебаний лопаток по сравнению, например, с колебаниями первого тона, несмотря на большую возбудимость колебаний первого тона без учета влияния пакетного множителя (см. табл. II.4).

Вычисление пакетного множителя при внутривибрирующих колебаниях лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, облегчается тем, что известна форма прогиба по длине замкнутого на круг «пакета», определяемая формулой (см. п. XIII.6)

$$A_n = C_1 \cos [2\pi m(n-1)/z_1] + C_2 \sin [2\pi m(n-1)/z_1], \quad (\text{II.50})$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные; m — число узловых диаметров, n — номер n -й лопатки.

Пакетный множитель при внутривибрирующих колебаниях определяется, по аналогии с формулой (II.48), следующим (см. п. XIII.6):

$$\mu_{\text{вн}} = \frac{\sqrt{\left\{ \sum_{n=1}^{z_1} \left[C_1 \cos \frac{2\pi m(n-1)}{z_1} + C_2 \sin \frac{2\pi m(n-1)}{z_1} \right] \cos \frac{2\pi k(n-1)}{z_1} \right\}^2 + \left\{ \sum_{n=1}^{z_1} \left[C_1 \cos \frac{2\pi m(n-1)}{z_1} + C_2 \sin \frac{2\pi m(n-1)}{z_1} \right] \sin \frac{2\pi k(n-1)}{z_1} \right\}^2}}{\sum_{n=1}^{z_1} \left| C_1 \cos \frac{2\pi m(n-1)}{z_1} + C_2 \sin \frac{2\pi m(n-1)}{z_1} \right|}, \quad (\text{II.51})$$

где k — кратность колебаний.

В п. XIII.6 показано, что пакетный множитель равен нулю для большинства собственных форм замкнутого на круг «пакета» [30]. Для низкочастотных колебаний, когда выполняется условие $k \ll z_1$, значение $\mu_{\text{вн}}$ оказывается отличным от нуля только при условии $k = m$, т. е. когда число узловых диаметров совпадает с кратностью колебаний. Таким образом, если частота какой-либо формы внутривибрирующих колебаний n будет в точности k раз больше частоты вращения турбины, но при этом число узловых диаметров $m \neq k$, то будет выполняться условие: $\mu_{\text{вн}} = 0$. Иными словами, для замкнутого на круг «пакета» из z_1 2 различных форм внутривибрирующих колебаний (см. п. XIII.6) на k -й кратности будет возбуждаться только одна собственная форма с k узловыми диаметрами. Физически это объясняется следующим. В п. XIII.6 показано, что при действии возмущающих сил, вызванных неравномерностью параметров потока по окружности, обе собственные формы, определяемые формулой (II.50), возбуждаются с одинаковыми амплитудами $C_1 = C_2 = C$, но имеют сдвиг на фазе во времени, равный $\pi/2$, при условии, что $m = k$. В результате амплитуда n -й лопатки будет изменяться по следующему закону:

$$A_n = C \cos \frac{2\pi m(n-1)}{z_1} \sin pt + C \sin \frac{2\pi m(n-1)}{z_1} \sin \left(pt - \frac{\pi}{2} \right) = \\ = C \sin \left[\frac{2\pi m(n-1)}{z_1} + pt \right], \quad (\text{II.52})$$

где p — круговая частота колебаний, $p = k\omega$; ω — угловая скорость вращения ротора турбины.

Используя условия $k = m$, $p = k\omega$, преобразуем формулу (II.52) к виду

$$A_n = C \sin k \{ [2\pi(n-1)/z_1] + \omega t \}.$$

Обозначив $\varphi = 2\pi(n-1)/z_1$ угол между n -й и первой лопатками, из условия $\varphi + \omega t = \text{const}$ найдем, что амплитуда первой лопатки станет равной амплитуде n -й лопатки через промежуток времени, равный $2\pi(n-1)/z_1\omega$, т. е. одинаковые амплитуды перемещаются по окружности колеса (по длине замкнутого на круг «пакета») с угловой скоростью $-\omega$. Так как ротор турбины вращается в противоположную сторону с угловой скоростью ω , то по отношению к определенной точке статора амплитуды колеблющихся лопаток сохраняются неизменными. Если в определенной точке статора имеется сосредоточенная возмущающая сила, то все колеблющиеся лопатки будут подходить к этой точке в одной и той же фазе колебаний, и суммарная работа возмущающей силы за оборот будет отлична от нуля. Аналогичное явление будет иметь место и при возбуждении k -й гармоникой распределенной возмущающей нагрузки, поскольку ее можно аппроксимировать с помощью достаточно большого числа сосредоточенных возмущающих сил, неподвижных в пространстве и изменяющихся по окружности по закону $\cos k\varphi$.

Для всех остальных собственных форм при $k \neq m$ различные лопатки будут проходить мимо определенных точек статора с разными фазами и суммарная работа возмущающих сил окажется равной нулю, т. е. будет равен нулю пакетный множитель, как это и следует из формулы (II.51).

Для высокочастотных колебаний, когда условие $k/z_1 \ll 1$ не удовлетворяется, величина $\mu_{\text{вн}}$ будет отлична от нуля только при одновременном выполнении условий (см. п. XIII 6)

$$m \pm k = sz_1; \quad k = pz,$$

где s, p — целые.

Если, например, $k = z$ и $z > z_1/2$, то всегда найдется одна собственная форма с числом узловых диаметров m , для которой $m + z = z_1$. Для всех остальных собственных форм внутрипакетных колебаний будет выполняться условие $\mu_{\text{вн}} = 0$ (см. п. XIII.6). Если $z < z_1/2$, то для всех вообще собственных форм внутрипакетных колебаний пакетный множитель при $k = z$ будет равен нулю, так как $m \leq z_1/2$ (см. п. XI.10).

При синфазных колебаниях, а также при внутрипакетных колебаниях закрученных лопаток переменного сечения, соединенных замкнутыми на круг связями, все результаты, полученные выше, сохраняются справедливыми, так как они не зависят от того, работу скольких компонент возмущающей силы необходимо учитывать при определении величины пакетного множителя. Таким образом, соединение лопаток связями может быть эффективно использовано для уменьшения уровня динамических напряжений в лопатках. Особенно большими преимуществами обладает способ соединения всех лопаток ступени в единый замкнутый на круг «пакет», обеспечивающий равенство нулю пакет-

ного множителя для всех низкочастотных синфазных колебаний соединенных связями лопаток.

Полученные выше соотношения для пакетного множителя могут нарушаться из-за технологических отклонений при изготовлении и сборке лопаток и связей. Это явление рассмотрено в п. XIII 8, где показано, что, за исключением случаев неудачного конструктивного выполнения связей, результаты, полученные в настоящем параграфе, качественно сохраняются и при наличии технологических отклонений.

Именно возможность существенного уменьшения уровня динамических напряжений в лопатках за счет получения малого (или теоретически равного нулю) значения пакетного множителя и является одной из главных причин широкого использования в паровых турбинах различных по конструкции связей.

III.9. КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК ПРИ ПАРЦИАЛЬНОМ ПОДВОДЕ ПАРА

Для повышения экономичности турбин при частичных нагрузках используют парциальный подвод пара¹. По окружности располагается несколько сегментов сопел, и при малых нагрузках пар поступает только через один открытый сегмент сопел, при увеличении нагрузки — через два и т. д. Естественно, что вращающиеся рабочие лопатки первой (регулирующей) ступени поочередно проходят то через дугу подвода пара, то через часть окружности, по которой пар не подводится. Каналы рабочих лопаток попеременно то заполняются потоком пара, то выходят из него и вращаются в нерабочем паровом пространстве камеры регулирующей ступени. Даже при номинальной нагрузке, когда пар поступает через все сегменты сопел, частичная разгрузка рабочих лопаток и их последующее нагружение происходит при прохождении лопаток мимо стенок сегментов сопел, отделяющих их друг от друга.

Процесс обтекания паром рабочих лопаток регулирующей ступени является весьма сложным. Когда лопатка подходит к открытому сегменту сопел, пар первоначально попадает в канал со стороны спинки рабочей лопатки. Так как в этом случае струя пара на границе дуги подвода отклоняется в сторону увеличения угла выхода α_1 , то лопатка обтекается под углом атаки и суммарное усилие может быть отрицательным, т. е. кромки лопатки могут быть сжаты, а спинка — растянута. Затем в течение короткого промежутка времени нагрузка на лопатку возрастает до номинального значения. Время нагружения лопатки будет зависеть от длины пограничного участка, на котором происходит нарастание скорости выхода пара из сопел до номинального значения,

¹ Для турбин малой мощности парциальный подвод пара в первых ступенях иногда применяется и при номинальной нагрузке с целью увеличения длины лопаток и связанного с этим повышения к. п. д. ступеней.

и времени, за которое закончится перестройка потока вокруг лопатки. Изменение обтекания лопатки сопровождается возникновением вихрей [152], которые сносятся потоком пара, но в начальный момент вызывают изменение действующих на лопатку усилий¹.

Указанные выше причины, а также конечная скорость распространения возмущений в потоке, происходящая со скоростью звука в паре, приводят к тому, что сила, действующая на лопатку, будет нарастать до номинального значения, а затем убывать при разгрузке лопатки в течение определенного интервала времени. При сверхзвуковой скорости выхода пара из сопел процесс нагружения лопатки будет дополнительно усложняться возникновением ударных волн и волн разрежения.

При перемещении лопатки в пределах дуги подвода пара усилие, действующее на нее, будет изменяться, как и для лопаток непарциальных ступеней, в небольших пределах за счет потенциального и вязкого возмущения от сопел. В п. I.4 указывалось, что амплитуды гармоник возмущающих сил с частотами nz , $2nz$, $3nz$ и т. д., вызванных этими причинами, обычно составляют не более 5—10% от осредненной во времени нагрузки. Поскольку при входе и выходе из дуги подвода пара усилие, действующее на лопатки регулирующей ступени, изменяется от 0 до 100% от среднего усилия, то становится понятным, что условия, в которых работают эти лопатки, являются значительно более тяжелыми, чем условия работы лопаток остальных ступеней.

Для обеспечения динамической прочности лопаток регулирующей ступени необходимо определить верхний предел работы, совершаемой за оборот действующими на лопатку возмущающими силами, а также оценить конструктивные способы уменьшения динамических напряжений в лопатках. При рассмотрении условий работы лопаток регулирующей ступени следует учесть, что они являются высокочастотными и поэтому отстройка лопаток от резонанса оказывается невозможной. Действительно, если, например, частота колебаний лопатки $f = 2475$ Гц и она не кратна рабочей частоте вращения, т. е. ее частота не совпадает с частотами возмущающих сил, то уже при изменении собственной частоты лопатки на $\pm 1\%$ она окажется в резонансе. Фактически разброс частот таких коротких лопаток, весьма чувствительных к изменению условий заделки, значительно превышает $\pm 1\%$ и приходится считаться с неизбежностью работы лопаток в условиях резонанса. В п. XIII.3 рассмотрены различные законы нагружения и разгрузки лопаток регулирующей ступени при входе в дугу подвода пара и выходе из нее и показано, что наибольшие динамические напряжения в лопатках будут иметь место

¹ По этой причине сила, действующая на профиль, начавший мгновенно двигаться с равномерной скоростью, в начальный момент составляет всего 50% от ее установившегося значения [191].

при внезапном приложении нагрузки. Поэтому, несмотря на то, что нагрузка и разгрузка лопатки происходят в течение конечного промежутка времени, будем рассматривать так называемую прямоугольную нагрузку, изображенную на рис II 45. При прямоугольной нагрузке интервал времени t_1 , равный одному обороту турбины, считается состоящим из двух частей промежутка t_2 , в течение которого нагрузка на лопатку вообще не действует, и промежутка $t_1 - t_2$, в течение которого лопатка испытывает постоянную нагрузку q , определяемую из теплового расчета турбины. Нагрузку с достаточным основанием можно рассматривать как прямоугольную в том случае, когда действующее на лопатку усилие возрастает от нулевого до номинального значения за время, малое по сравнению с периодом колебаний лопатки.

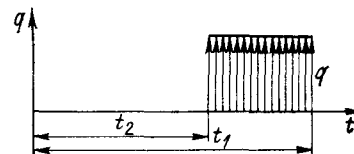


Рис II 45 Усилие, действующее на лопатку в течение оборота при прямоугольной нагрузке

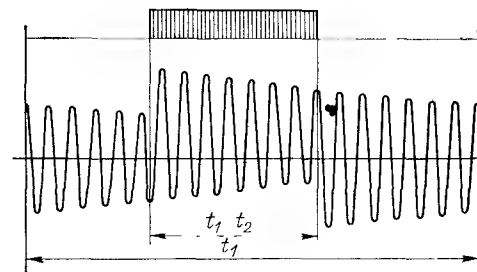


Рис II 46 Изменение деформации лопатки в течение оборота при прямоугольной нагрузке

Изменение амплитуды колебаний лопатки за оборот ротора турбины при прямоугольной нагрузке изображено на рис. II.46. Как видно, лопатка колеблется относительно деформированного состояния (постоянная часть напряжений равна напряжениям парового изгиба $\sigma_{изг}$) за время прохождения дуги подвода пара и относительно недеформированного состояния на протяжении остальной части оборота. Амплитуда колебаний убывает как на участке действия полной нагрузки, так и на участке, где нагрузка отсутствует, и возрастает при входе и выходе из-под нагрузки. В п. XIII.3 показано, что максимального значения амплитуда достигает в момент входа или выхода из-под нагрузки. Максимальные динамические напряжения в лопатке σ при одном открытом сегменте сопел определяются следующей формулой:

$$\sigma = \left(1 + \frac{4C_i}{k\delta}\right) \sigma_{изг}, \quad (\text{II.53})$$

где C_i — коэффициент, характеризующий сравнительную возбудимость i -й собственной формы; k — кратность колебаний; δ — логарифмический декремент колебаний.

Наибольшие динамические напряжения возникают в случае резонанса при первом тоне тангенциальных колебаний. Так как

в этом случае $C_1 = 0,444$, то формула (II.53) примет следующий вид:

$$\sigma = \left(1 + \frac{1,8}{k\delta}\right) \sigma_{изг}.$$

При выводе формулы (II.53) предполагалось, что декремент не зависит от уровня напряжений, и было найдено, что максимальные напряжения, определяемые этой формулой, достигаются только в том случае, когда за время прохождения дуги подвода пара лопатка совершит целое число колебаний с половиной. Из формулы (II.53) следует, что уменьшения динамических напряжений можно добиться за счет уменьшения напряжений парового изгиба в лопатках, увеличения демпфирования или повышения собственной частоты колебаний лопатки. Уровень динамических напряжений в лопатках, вызванных парциальным подводом пара, может быть весьма значительным: например, если $n = 50$ об/с, $\delta = 0,01$ и $f = 2500$ Гц, то $k = 50$ и $\sigma = 4,6\sigma_{изг}$, а при $f = 1000$ Гц и $\delta = 0,01$ $k = 20$ и $\sigma = 10\sigma_{изг}$.

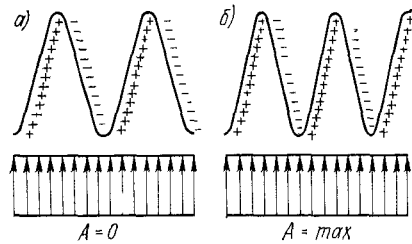


Рис. II.47. Зависимость работы прямоугольной нагрузки от числа колебаний лопатки за время прохождения дуги подвода пара

На рис. II.47 показана зависимость работы прямоугольной нагрузки интенсивности q от числа колебаний, совершаемых лопаткой за время прохождения дуги подвода пара. На рис. II.47, а изображен случай, когда лопатка совершает целое число колебаний на протяжении дуги подвода, а на рис. II.47, б — целое число колебаний с половиной. Знаком плюс обозначены интервалы времени, на протяжении которых совершается положительная работа, т. е. энергия подводится к лопатке, знаком минус — интервалы времени, на протяжении которых энергия отводится от лопатки. Как видно, если лопатка совершает целое число колебаний за время прохождения дуги подвода пара и амплитуда ее при этом остается неизменной, то суммарная работа нагрузки q оказывается равной нулю. Суммарная работа достигает максимального значения именно в том случае, когда лопатка совершает под нагрузкой целое число колебаний с половиной (рис. II.47, б). Максимальная работа, которую производит нагрузка q за оборот турбины при одном открытом сегменте сопел, оказывается равной работе нагрузки за половину цикла колебаний лопатки. Таким образом, максимальная работа прямоугольной нагрузки $A_{пр}$ за оборот оказывается следующей:

$$A_{пр} = qV(l) \int_0^l Z_i(z) dz \int_0^{\pi/p} p \sin pt dt = 2qV(l) \int_0^l Z_i(z) dz, \quad (II.54)$$

где $V(l)$ — амплитуда колебаний вершины лопатки; p — круговая частота колебаний лопатки, $p = 2\pi f$; $Z_i(z)$ — собственная форма, соответствующая резонансной частоте p .

Из приведенного становится ясно, что степень парциальности ε , определяемая как отношение времени нахождения лопатки под полной нагрузкой к времени полного оборота, т. е. $\varepsilon = (t_1 - t_2)/t_1$ оказывает слабое влияние на величину максимальных динамических напряжений σ . Если пренебречь изменением амплитуды колебаний на протяжении оборота, что допустимо при условии $k\delta \ll 1$ (см. п. XIII.3), то степень парциальности вообще не оказывает влияния на уровень динамических напряжений.

При условии $k\delta \ll 1$ можно легко оценить и влияние увеличения числа открытых сегментов сопел. В случае s открытых сегментов максимальная положительная работа будет произведена в том случае, когда на длине дуги подвода каждого из сегментов лопатка совершит целое число колебаний с половиной и к каждому сегменту будет подходить в одной и той же фазе (последнее условие будет выполнено, если за время перемещения от сегмента к сегменту лопатка тоже совершит целое число колебаний с половиной). При выполнении этих условий максимальная положительная работа в s раз превзойдет максимальную положительную работу при одном открытом сегменте.

Верхний предел для динамических напряжений первого тона при наличии s открытых сегментов сопел в соответствии со сказанным выше может составлять следующую величину:

$$\sigma = \left(1 + \frac{1,8s}{k\delta}\right) \sigma'_{изг}, \quad (II.55)$$

где $\sigma'_{изг}$ — напряжение парового изгиба в лопатках при s открытых сегментах сопел.

Поэтому число сегментов сопел s обычно ограничивают и стараются обеспечить минимально возможную по условиям прочности перемычку между сегментами сопел с тем, чтобы процесс снижения и нарастания нагрузки на лопатку не успел полностью произойти при ее переходе от сегмента к сегменту. Ясно, однако, что вероятность таких совпадений будет уменьшаться по мере увеличения числа открытых сегментов сопел. Например, если частота лопатки $f = 3000$ Гц, то половину колебания, определяющую изменение работы от максимальной до нулевой, лопатка совершит за время прохождения 1/120 части окружности. Естественно, что из-за технологических отклонений в длинах сегментов и перемычек между ними получение максимальной работы для каждого из сегментов маловероятно. Дополнительное уменьшение опасности работы с s открытыми сегментами происходит и вследствие того, что по мере увеличения числа открытых сегментов сопел уменьшается перепад на регулируемую ступень, т. е. уменьшаются напряжения парового изгиба $\sigma_{изг}$.

В п. XIII.3 рассмотрен также более близкий к действительному трапецидальный закон изменения нагрузки во времени, при котором предполагается, что нагружение и разгрузка лопатки происходят по линейному закону — рис. II.48. При трапецидальном законе изменения нагрузки максимальные напряжения в лопатках регулирующей ступени при одной дуге подвода пара и колебаниях по первому тону приближенно определяются следующей формулой:

$$\sigma = \left[1 + \frac{1,8}{k\delta} \frac{1}{\pi(j+0,5)} \right] \sigma_{нн}, \quad (\text{II.56})$$

где $j+0,5$ — число циклов колебаний, совершаемых лопаткой за время нагружения или разгрузки Δ .

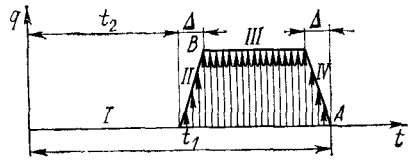


Рис. II.48. Усилие, действующее на лопатку в течение одного оборота при трапецидальной нагрузке

Напряжения, определяемые формулой (II.56), достигаются только в том случае, если при полной нагрузке лопатка совершит целое число колебаний, а за время изменения нагрузки Δ — целое число колебаний с половиной. Формула (II.56) является приближенной и тем точнее определяет максимальные напряжения в лопатке, чем большее число колебаний лопатка совершит за время Δ . Когда лопатка совершает менее чем одно колебание за время Δ , максимальные динамические напряжения могут несколько превысить значение, определяемое формулой (II.56) (например, при $f\Delta = 0,375$ примерно на 10—15%).

Если пренебречь изменением амплитуд колебаний на протяжении оборота и считать, что лопатка совершает целое число колебаний за время действия полной нагрузки, то связь между формулами (II.53) и (II.56) может быть легко установлена с помощью сравнения работ, совершаемых паровой нагрузкой. При трапецидальной нагрузке в рассматриваемом случае максимальные напряжения в лопатках будут иметь место при достижении максимума работы возмущающих сил за время нагружения и разгрузки. Вычислим работу возмущающих сил, учитывая, что перемещения различных поперечных сечений лопатки описываются следующей формулой:

$$V(z, t) = V(l) Z_i(z) \sin(pt + \alpha),$$

где α — фаза колебаний лопатки в момент начала нагружения (рис. II.48).

Так как на участках возрастания и убывания нагрузки ее величина определяется формулами:

$$q_1 = q(t/\Delta); \quad q_2 = q[1 - (t/\Delta)]$$

(где $0 < t \leq \Delta$), то работа, совершаемая на этих участках, окажется следующей:

$$A_{тр} = qV(l) \int_0^l Z_i(z) dz \left[\int_0^{\Delta} \frac{t}{\Delta} p \cos(pt + \alpha) dt + \int_0^{\Delta} \left(1 - \frac{t}{\Delta}\right) \cos(pt + \alpha + p\Delta) dt \right]. \quad (\text{II.57})$$

Поскольку постоянный множитель $qV(l) \int_0^l Z_i(z) dz$ для дальнейших выкладок является несущественным, то, вводя обозначение $\beta = f\Delta = p\Delta/(2\pi)$, найдем зависимость от параметров α и β безразмерной величины A' , пропорциональной работе, совершаемой трапецидальной нагрузкой

$$A'(\alpha, \beta) = A_{тр} \left/ \left[qV(l) \int_0^l Z_i(z) dz \right] \right.$$

Учитывая, что $\Delta = 2\pi\beta/p$, $t/\Delta = tp/(2\pi\beta)$, преобразуем выражение для A' к следующему виду:

$$A'(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi\beta/p} \left[\frac{tp}{2\pi\beta} \cos(pt + \alpha) + \left(1 - \frac{tp}{2\pi\beta}\right) \cos(pt + \alpha + 2\pi\beta) \right] dt.$$

Перейдя к относительному времени $\tau = pt$, окончательно получим

$$A'(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi\beta} \left[\frac{\tau}{2\pi\beta} \cos(\tau + \alpha) + \left(1 - \frac{\tau}{2\pi\beta}\right) \cos(\tau + \alpha + 2\pi\beta) \right] d\tau. \quad (\text{II.58})$$

При заданном β , т. е. при определенном значении $f\Delta$, работа $A'(\alpha)$ является функцией угла α — фазы колебаний лопатки в момент начала нагружения. Например, если лопатка совершает половину цикла колебания за время нагружения, то величина $A'(0,5; \alpha)$ в соответствии с формулой (II.58) окажется следующей:

$$A'(0,5; \alpha) = \int_0^{\pi} \left[\frac{\tau}{\pi} \cos(\tau + \alpha) + \left(1 - \frac{\tau}{\pi}\right) \cos(\tau + \alpha + \pi) \right] d\tau = -\frac{4}{\pi} \cos \alpha.$$

Угол α следует выбирать таким образом, чтобы работа была максимальна. В рассматриваемом случае следует положить $\cos \alpha = -1$, $\alpha = \pi$, $A'_{\max}(0,5) = 1,273$. Физический смысл полученных соотношений легко понять из рассмотрения рис. II.49. Из рис. II.49, а следует, что при условии $\alpha = \pi$ положительная работа (подвод энергии к колеблющейся лопатке) совершается нагрузкой большей интенсивности, а отрицательная работа — нагрузкой меньшей интенсивности и на участке нагружения, и на участке разгрузки. Так как за время действия полной

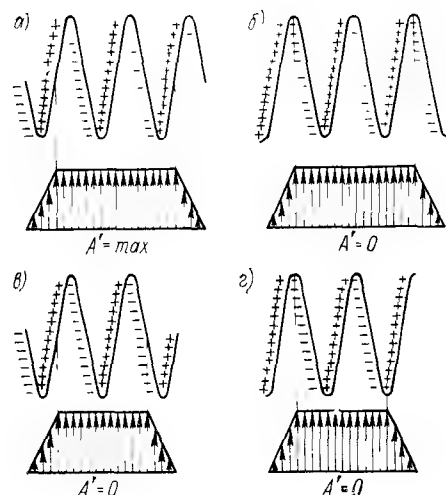


Рис. II.49. Зависимость работы трапецидальной нагрузки от числа колебаний за время нахождения под полной нагрузкой и начальной фазы колебаний

нагрузки лопатка совершает целое число колебаний, то суммарная работа за этот период равна нулю, а суммарная работа за оборот турбины — положительна. При условии $\alpha = -\pi/2$ положительная работа на участке нагружения была бы больше, но суммарная работа за оборот оказалась бы равной нулю (рис. II.49, б). Если бы лопатка за время действия полной нагрузки совершила целое число колебаний с половиной, то при $\beta = 0,5$ легко показать аналитически, что суммарная работа за оборот независимо от α оказалась бы равной нулю. Для иллюстрации на рис. II.49, в показана работа паровой нагрузки для этого случая при различных значениях угла α . При сравнении значений положительной и отрицательной работ следует учесть, что работа за полпериода на участках нагружения и разгрузки из-за линейного изменения нагрузки оказывается в 2 раза меньше, чем за тот же интервал времени на участке основной нагрузки. В связи с этим суммарная работа за оборот и для случаев, изображенных на рис. II.49, в и г, оказывается в точности равной нулю.

Вычисления по формуле (II.58) могут быть выполнены и для других значений параметра β . В частности, при $\beta = 0,375$ $A'(0,375; \alpha) = -4(\sqrt{2} + 1)(\sin \alpha + \cos \alpha)/3\pi$; $A'_{\max}(0,375) = 4\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)/3\pi = 1,449$, т. е. почти на 15% больше, чем при $\beta = 0,5$.

Результаты вычислений A' и α при различных значениях β сведены в табл. II.9. Там же указаны значения $A_{\text{отн}} = A_{\text{тр}}/A_{\text{пр}}$, для которых в соответствии с формулами (II.54), (II.57) и (II.58)

выполняется соотношение $A_{\text{отн}} = A'/2$. Зависимость $A_{\text{отн}}$ и α от $f\Delta \rightarrow \beta$ построена на рис. II.50. Так как ранее было принято, что декремент не зависит от напряжений, то динамические напряжения оказываются пропорциональными значениям $A_{\text{отн}}$. Таким образом, при $f\Delta = 0,5$ напряжения при трапецидальной нагрузке в соответствии с данными таблицы должны составлять 0,637 от напряжений при прямоугольной нагрузке. Сравнение формул (II.53) и (II.56) подтверждает правильность этого соотношения.

Как следует из приведенных на рис. II.50 данных, при трапецидальной нагрузке максимальные динамические напряжения могут составлять около 3/4 [по формуле (II.56) — около 2/3] от максимальных напряжений при прямоугольной нагрузке.

Таблица II.9

$\beta = f\Delta$	A'	$A_{\text{отн}}$	α
0,125	$4\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)\pi$	0,372	$7\pi/4$
0,250	4π	0,637	$3\pi/2$
0,375	$4\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)3\pi$	0,724	$5\pi/4$
0,500	4π	0,637	π
0,625	$4\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)5\pi$	0,436	$3\pi/4$
0,750	53π	0,212	$\pi/2$
0,875	$4\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)7\pi$	0,038	$\pi/4$
1,000	0	0	0

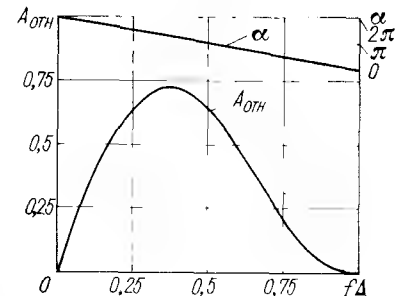


Рис. II.50. Зависимость работы трапецидальной нагрузки от времени нагружения лопатки

Естественно, что эти соотношения справедливы только в том случае, когда значения $f\Delta$ не слишком малы, например при $f\Delta \geq 0,375$. При $f\Delta \rightarrow 0$ максимальная положительная работа и, следовательно, максимальные динамические напряжения будут стремиться к соответствующим значениям при прямоугольной нагрузке и будут достигаться в том случае, когда на участке полной нагрузки лопатка совершит целое число колебаний с половиной.

Сравнение значений $A_{\text{тр}}$ при различных значениях $f\Delta$ и циклов колебаний, совершаемых лопаткой за время действия полной нагрузки, показано на рис. II.51 (см. п. XIII.3). При построении кривых учтено изменение амплитуды колебаний лопатки в течение одного оборота и использованы следующие исходные данные: $f = 3000$ Гц, $n = 50$ об/с, $\delta = 0,01$. Кривая 1 соответствует случаю, когда лопатка за время действия полной нагрузки совершает 14,5 колебаний, а кривая 2 — когда лопатка совершает 15 колебаний. Как видно, кривая 2 в районе максимума почти в точности совпадает с кривой, показанной на рис. II.50, построенной без учета изменения амплитуды колебаний на протяжении оборота. Постепенное приложение нагрузки, как следует из сопоставления кривых 1 и 2 на рис. II.51, может в некоторых

случаях вызвать большие напряжения в лопатках, чем мгновенное приложение нагрузки. Как пояснено на рис. II.47 и II.49, этот случай может иметь место, когда за время действия максимальной нагрузки лопатка совершает примерно целое число колебаний.

Как и для случая прямоугольной нагрузки, при условии $kd \ll 1$ и наиболее неблагоприятных фазовых соотношениях работа паровой нагрузки при s открытых сегментах сопл может в s раз превзойти работу нагрузки от одного сегмента. Таким образом, максимальные динамические напряжения при трапецидальном приложении нагрузки от s сегментов сопл могут быть:

$$\sigma = \left[1 + \frac{1,8}{kd} \frac{s}{\pi(1+0,5)} \right] \sigma'_{изг}, \quad (II.59)$$

где, как и ранее, $\sigma'_{изг}$ — напряжение парового изгиба при s открытых сегментах сопл.

В п. XIII.4 рассмотрено влияние соединения лопаток регулирующей ступени в пакеты на уровень динамических напряжений

в лопатках. Было показано, что соединение m рабочих лопаток в пакет эквивалентно увеличению времени нагружения и разгрузки лопатки в m раз, т. е. замене Δ на $m\Delta$. Если считать, что интервал Δ приближенно равен времени поворота ротора на шаг рабочих лопаток и пренебречь изменениями собственной формы и декремента при синфазных колебаниях пакета по сравнению с колебаниями отдельной лопатки, то напряжения в пакете лопаток σ_n будут связаны с напряжениями в отдельной лопатке σ_d следующей формулой:

$$\sigma_n = \mu \sigma_d; \quad \mu = \frac{\sin(mk\pi/z_1)}{m \sin(k\pi/z_1)},$$

т. е. величина μ совпадает с введенным в п. II.8 значением пакетного множителя при синфазных колебаниях.

Таким образом, соединение лопаток в пакеты может привести к уменьшению напряжений при синфазных колебаниях по сравнению с колебаниями отдельных лопаток.

Помимо возбуждения, вызванного парциальным подводом пара, на рабочие лопатки регулирующей ступени воздействуют и «обычные» потенциальные и вязкие возмущения от сопловых лопаток. Хотя природа этих возмущающих сил такая же, как и в последующих ступенях, имеются значительные отличия в их частотном спектре, вызванные неравномерным расположением

сопловых лопаток по окружности из-за наличия стенок сегментов сопел и частичным подводом пара. Следует иметь в виду, что в регулирующих ступенях в качестве числа направляющих лопаток z принимается фиктивное число сопел, которое разместилось бы по всей окружности при отсутствии перемычек между сегментами сопл: $z = \pi D_{ср}/t_{ср}$, где $D_{ср}$ и $t_{ср}$ соответственно средний диаметр и шаг сопл на среднем диаметре. Естественно, что в соответствии с данным определением число z может и не быть целым.

Неравномерность потока, действующая на рабочие лопатки непарциальных ступеней, при отсутствии технологических отклонений имеет период, равный шагу направляющих лопаток, т. е. приводит к возникновению возмущающих сил с частотами knz . Неравномерность, создаваемая сопловыми лопатками регулирующих ступеней, в связи с наличием нескольких сегментов по окружности и перемычек между ними, а также в связи с парциальным подводом пара, даже при полном отсутствии технологических отклонений имеет период, равный всей окружности колеса.

В связи с этим частотный спектр возмущающих сил, действующих на лопатки регулирующей ступени, оказывается значительно более густым, так как помимо возмущающих сил с частотами knz появляются возмущающие силы с частотами kn .

Не ставя задачи нахождения наиболее близкого к действительному закону описания неравномерности потока за решеткой направляющих лопаток, о чем подробно говорилось в п. I.4, вычислим относительные значения различных гармоник в спектре возмущающих сил при условии, что возмущающая нагрузка от одного открытого сегмента сопл описывается тремя различными функциями, представленными на рис. II.52. На рис. II.52, *a* представлена нагрузка, описываемая в пределах шага сопловых лопаток прямоугольной ступенчатой функцией, на рис. II.52, *б* — треугольной функцией и на рис. II.52, *в* — трапецидальной функцией. Так как влияние постоянной нагрузки интенсивности q

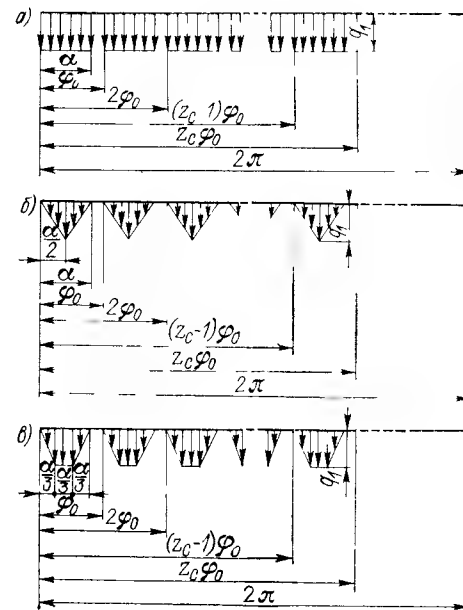


Рис. II.52. График изменения нагрузки, действующей на лопатку в течение одного оборота

на дуге подвода пара на уровень динамических напряжений в лопатках было рассмотрено выше, то условно примем, что на участке кромочного следа $\varphi_0 = \alpha$ (рис. II.52) действующая на лопатку нагрузка обращается в нуль.

На рис. II.52 приняты следующие обозначения $\varphi_0 = 2\pi/z$ — угол, соответствующий одному шагу сопловых лопаток; z_c — число сопловых лопаток в сегменте, $\varphi_0 = \alpha$ — угол, соответствующий ширине кромочного следа.

Значения гармоник, создаваемых изображением на рис. II.52 нагрузкой, могут быть вычислены обычным способом, т. е. изображенная на рис. II.52 функция $\Phi(q)$ может быть представлена в виде ряда [159]:

$$\Phi(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k \sin kq + b_k \cos kq) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \sin(kq - \gamma),$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(q) \sin kq \, dq; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(q) \cos kq \, dq.$$

На рис. II.53 построены кривые значений амплитуд гармоник в зависимости от их номера (кратности колебаний) k , причем интенсивность нагрузки q_1 принята одинаковой во всех трех случаях. Кривые построены при следующих числовых значениях величин: $z_c = 26$, $z = 105,4$; $\alpha = 0,0528$. Как видно, во всех трех случаях наибольшую амплитуду имеет 105-я гармоника. Очень большими могут оказаться и гармоники возмущающих сил с низкими кратностями ($k < 10$), однако их можно не принимать во внимание, поскольку собственные частоты лопаток регулирующих ступеней значительно выше частот этих возмущающих сил. При прямоугольной нагрузке значения 210-й и 315-й гармоник оказываются близкими к значению 105-й гармоник. Это совпадает с данными п. I.4, где указывалось, что амплитуды возмущающих сил с частотами $2nz$ и $3nz$ могут оказаться относительно близкими к амплитуде возмущающей силы с частотой nz , если ширина следа мала по сравнению с шагом направляющих лопаток.

В отличие от парциального подвода, при котором, как отмечалось, динамические напряжения слабо зависят от степени парциальности ε , амплитуда возмущающей силы с частотой nz возрастает пропорционально степени парциальности при наличии одного открытого сегмента сопл. При работе нескольких сегментов сопел амплитуда возмущающей силы с частотой nz может быть существенно уменьшена (при одинаковых сегментах сопл теоретически до нуля) за счет выбора длины перемычки между сегментами, равной целому числу шагов сопл плюс половина. Правда, при этом относительно возрастут возмущающие силы с частотами $n(z \pm s)$, где s — целое. Аналогичный принцип лежит в основе проектирования так называемых диафрагм переменного

шага, рассмотренных в п. XIII.9. Учитывая тяжелые условия работы лопаток регулирующих ступеней, нельзя допустить совпадения частот колебаний первого тона с частотой nz .

Рассмотрим некоторые результаты специально поставленных экспериментов по изучению особенностей колебаний лопаток при парциальном подводе [151; 152].

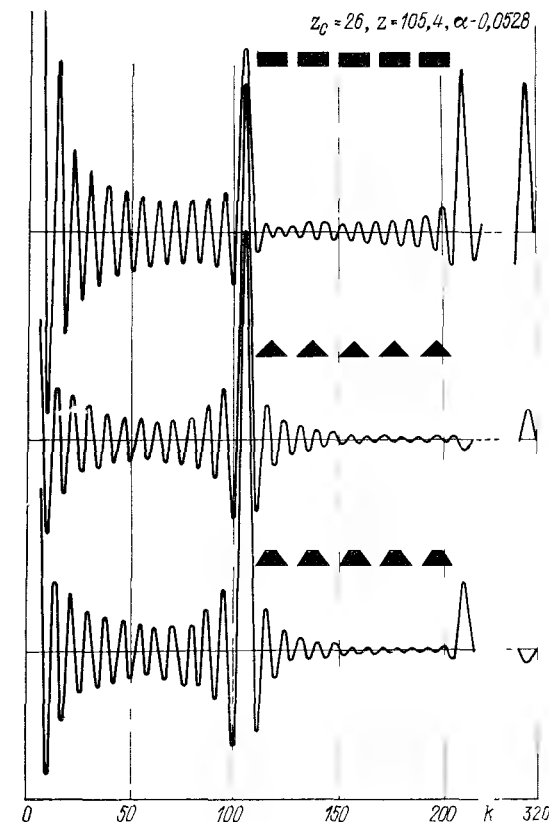


Рис. II.53 Зависимость амплитуд гармоник возмущающих сил от номера гармоники и закона изменения возмущающих сил

Распределение скоростей потока на различных осевых расстояниях за сопловой решеткой приведено на рис. II.54 (M — число Маха).

Как видно, по мере увеличения осевого расстояния от сопла длина переходной зоны несколько увеличивается, что приводит к увеличению времени нагружения и разгрузки рабочих лопаток и может несколько уменьшить динамические напряжения в них. Замер динамических напряжений в рабочих лопатках при парциальном подводе осуществлялся на «обращенной» установке

(см. п. I.4) — модельной турбине, в которой исследуемые рабочие лопатки неподвижны, а направляющие лопатки, служащие источником переменных аэродинамических сил, вращаются. Рабочие лопатки устанавливались на специальных упругих подвесках, за счет которых обеспечивалось моделирование их собственных частот. За счет выбора конструкции упругих подвесок были обеспечены плоскопараллельные перемещения лопаток при колебаниях. При этом коэффициент C_1 в формуле (II.53) в соответствии с данными п. II.7 должен быть принят равным $C_1' = 0,569$. Таким образом, максимальные динамические напряжения при прямоугольной нагрузке и одной дуге подвода должны вычисляться по формуле:

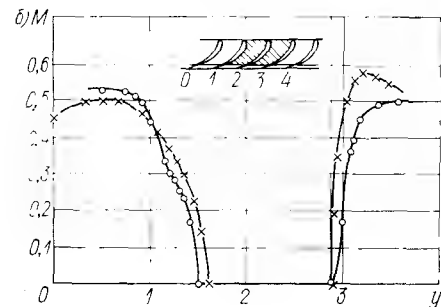
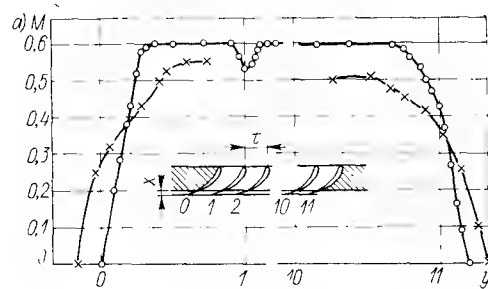


Рис. II.54. Распределение скорости потока по границам сегмента подвода пара (а) и по границам переемычки, разделяющей два сегмента (б):

○ — $x/t = 0,088$; × — $x/t = 0,159$

ляла 0,229, во втором — 0,458, относительная длина переемычки между дугами подвода — 0,042. На рис. II.55 нанесена также верхняя граница коэффициента динамичности λ , вычисленная по формулам (II.60) и (II.61) при использовании экспериментально определенного значения логарифмического декремента $\delta = 0,008$. Как видно, в обоих случаях замеренные значения динамических напряжений не достигают верхней расчетной границы, причем различия между расчетными и экспериментальными значениями несколько больше при наличии двух дуг подвода. Это подтверждает изложенные выше соображения о меньшей вероятности достижения динамическими напряжениями верхней границы, определяемой формулой (II.55) или (II.59), при увеличении числа сегментов сопл. Отдельно на рис. II.55 отмечены значения динамических напряжений при колебаниях с $k = 48$, поскольку в этом случае

собственная частота лопатки совпадала с частотой импульсов от кромок сопел ($z = 48$). Длина переемычки между дугами подвода при испытаниях составляла ровно два шага направляющих лопаток, что и объясняет существенное возрастание уровня динамических напряжений при колебаниях с частотой $1/z$ в случае увеличения степени парциальности ϵ в 2 раза (рис. II.55, а и б).

Приведенные в этом параграфе сведения объясняют причины значительных трудностей, возникающих при обеспечении надеж-

ной работы лопаток регулирующей ступени. Особое внимание следует обращать на усталостную прочность хвостов лопаток регулирующей ступени, так как из-за относительно малой высоты лопаток переменный изгибающий момент в хвосте может значительно превысить момент в корневом сечении лопатки. Для повышения усталостной прочности хвостов необходимо уменьшать коэффициенты концентрации напряжений, так как именно в зонах концентрации напряжений чаще всего и возникают усталостные трещины. Выше отмечалось, что лопатки регулирующих ступеней в ряде случаев сваривают в пакеты по две-три лопатки. Это, с одной стороны, увеличивает время нагружения и разгрузки лопаток, что приводит к снижению динамических напряжений в них, а с другой — относительно увеличивает момент сопротивления хвоста по сравнению с моментом сопротивления корневого сечения лопатки. Весьма полезным является и уплотнение наборки лопаток в пазу обода диска, так как при этом резко уменьшается переменный изгибающий момент, действующий в ослабленном сечении хвоста.

Необходимо учитывать и влияние роста мощности на уровень динамических напряжений в лопатках регулирующих ступеней. Изменение геометрических размеров лопаток происходит таким образом, что их собственные частоты, характеризуемые отношением b/l^2 , при увеличении мощности турбины обычно уменьшаются.

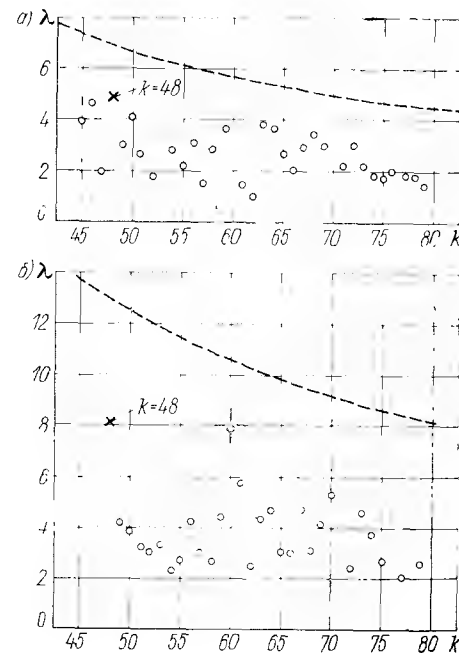


Рис. II.55. Зависимость коэффициента динамичности λ от кратности колебаний k при одной (а) и двух (б) дугах подвода

При этом в соответствии с формулой (II.53) даже при равенстве напряжений парового изгиба в лопатках динамические напряжения в них при увеличении мощности турбин могут возрасти. Например, расчетная частота жестко заделанной лопатки регулирующей ступени турбины мощностью 800 МВт составляет около 75% от частоты лопатки регулирующей ступени турбины мощностью 300 МВт (фактически различие даже больше, поскольку податливость заделки снижает частоту первой лопатки в большей степени). Поэтому при равенстве напряжений парового изгиба и одинаковых логарифмических декрементах динамические напряжения в лопатках регулирующей ступени более мощной турбины могут возрасти и требуется введение специальных конструктивных мероприятий для обеспечения безаварийной работы лопаток (например, увеличение числа лопаток в пакете или специальное уплотнение хвостов за счет применения различных материалов, уменьшение концентраторов напряжений и т. д.).

Из сказанного выше ясно, что обеспечение надежной работы лопаток регулирующих ступеней до настоящего времени остается весьма сложной проблемой.

II.10. КОНСТРУКТИВНАЯ УСТАЛОСТНАЯ ПРОЧНОСТЬ ЛОПАТОК

В п. I.3 были рассмотрены основные положения, связанные с явлением усталостной прочности металлов и, в частности, лопаточных сталей и сплавов. Считая эти положения известными, подробнее остановимся на конструктивной усталостной прочности рабочих лопаток и влиянии на нее особенностей конструкции, технологии и качества изготовления, а также некоторых эксплуатационных факторов.

При изгибных или крутильных колебаниях лопаток прогибы или углы закручивания в любом сечении меняют свои значения в пределах размаха колебания, равного удвоенной амплитуде. При этом волокна, расположенные на спинке и кромках лопатки, например при изгибных тангенциальных колебаниях, будут периодически растягиваться и сжиматься. За один цикл колебаний деформации изменяются в пределах от максимального сжатия до максимального растяжения. При колебании лопатки с частотой $f = p/2\pi$ в течение одной секунды совершается f циклов с периодом $T = 1/f$.

Напряжения в любой точке колеблющейся и неврачающей лопатки меняют свои значения от некоторой положительной величины $+\sigma_a$ до отрицательной $-\sigma_a$. Частота изменения напряжений, очевидно, равна частоте колебаний лопатки. Зависимость напряжений от времени определяется уравнением

$$\sigma = \sigma_a \sin(pt + \alpha). \quad (II.62)$$

Выражение (II.62) соответствует симметричному циклу изменения напряжений, в котором максимальные $+\sigma_a$ и минималь-

ные $-\sigma_a$ напряжения одинаковы по величине, но противоположны по знаку.

Во время работы паровой турбины на лопатки действует центробежная сила, создающая в них постоянные во времени растягивающие и изгибающие напряжения. В этом случае при колебании лопаток переменные во времени напряжения накладываются на постоянные напряжения, созданные центробежной силой. Обозначим эти постоянные напряжения σ_m . Тогда суммарные напряжения определяются уравнением

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin(pt + \alpha), \quad (II.63)$$

отсюда максимальные $[\sin(pt + \alpha) = 1]$ и минимальные $[\sin(pt + \alpha) = -1]$ во времени значения напряжений соответственно равны:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (II.64)$$

Выражение (II.63) соответствует несимметричному или асимметричному циклу изменения напряжений, в котором максимальные и минимальные напряжения определяются по (II.64). Максимальные по абсолютной величине напряжения цикла, которые может выдержать лопатка без поломки при определенном числе циклов N в заданных условиях, называют ее конструктивным пределом выносливости. За базу N при экспериментальном определении конструктивного предела выносливости в условиях нормальной температуры и отсутствия агрессивной среды принимают то же число циклов, что и при испытаниях образцов, т. е. 10^7 циклов для сталей и до $500 \cdot 10^6$ циклов для легких сплавов, в частности титановых. Как указывалось выше (см. п. I.3), при высокой температуре и агрессивных средах лопаточные стали не имеют физического предела выносливости, вследствие чего вводится понятие ограниченного предела выносливости на определенной базе. Аналогично вводится понятие ограниченного конструктивного предела выносливости и для лопаток. Ограниченным конструктивным пределом выносливости характеризуется усталостная прочность титановых лопаток.

Конструктивный предел выносливости лопаток при симметричном цикле определяют на специальных вибростендах (рис. II.56). Хвост лопатки плотно прижимается к массивной плите, а напряжения создаются при помощи электромагнита, воздушного вибратора или возбуждением в лопатке через заделку резонансных колебаний по определенной форме. Напряжения могут определяться с помощью наклеенных на лопатку тензорезисторов, замером амплитуд колебаний вершин лопаток и т. д. Испытания лопаток позволяют определить предел выносливости как при изгибных, так и при крутильных формах колебаний. Испытания могут проводиться при рабочей температуре, в паровой среде или при других внешних условиях. Кроме того, при испытаниях на вибростендах получают экспериментальные данные о распределе-

нии напряжений по высоте отдельных лопаток или пакетов лопаток при собственных формах колебаний, в том числе и в местах концентрации напряжений.

Используются различные типы вибростендов [85], из которых наиболее широкое распространение для исследования лопаток получили электродинамические. При испытаниях на низких частотах, особенно при асимметричном цикле, используются кривошипно-шатунные или эксцентриковые вибростенды, а при испытаниях на высоких частотах (до 10 000—12 000 Гц) — воздушные вибраторы [72]. В последнем случае для возбуждения колебаний



Рис. II 56 Вибростенд для определения конструктивного предела выносливости лопаток

лопаток используется струя воздуха, периодически перекрываемая диском с выступами, вращающимся между лопаткой и соплом, из которого поступает воздух под высоким давлением.

Определение предела выносливости лопаток при асимметричном цикле проводят также в специальных установках, имеющих систему, обычно гидравлическую, для создания статического растяжения. Переменные усилия, вызывающие знакопеременный изгиб в заданной плоскости или кручение лопатки, создаются вибрационной системой, включающей в себя привод с механическим вибратором.

Предел выносливости лопатки в большой степени зависит от ее конструктивного выполнения. Концентраторы напряжений, такие, как отверстия под проволоочные связи, галтели перехода от профильной части к хвосту, свисающие выходные кромки, малые радиусы скругления в хвостовой части и т. д., сильно снижают конструктивный предел выносливости лопатки. В связи с этим при конструировании лопаток необходимо, по возможности, избегать этого снижения. Например, переход от профильной части

лопатки к хвосту следует выполнять плавно, с максимально возможным радиусом; устранять свисающие выходные кромки; в местах расположения проволоочных связей следует предусматривать утолщение профиля, чтобы компенсировать ослабление сечения отверстием и снизить местные напряжения; хвост лопатки нужно выполнять с оптимальными соотношениями геометрических размеров для уменьшения концентрации напряжений (см. гл. VII) и т. д.

Испытания на вибростендах позволяют выявить ослабленные сечения лопаток, требующие конструктивного изменения, а также выбрать оптимальную технологию финишных операций обработки лопаток, способ упрочнения входных кромок лопаток и т. д.

Однако даже при выполнении всех указанных мероприятий конструктивный предел выносливости лопатки при симметричном цикле может быть до 2—2,5 раз меньше предела выносливости круглого образца. Это объясняется сильной неравномерностью распределения напряжений по сечению, наличием тонких выходных кромок, масштабным фактором и рядом других особенностей конструкции.

Существенное снижение усталостной прочности лопаток вносят различные способы упрочнения входных кромок от эрозийного разрушения, например напайка стеллитовых пластин, электроискровое упрочнение и др. Сравнительные модельные испытания, а также испытания натурных лопаток при симметричном цикле показали, что напайка стеллитовых пластин на входную кромку или электроискровое упрочнение могут снижать предел выносливости лопаток, примерно до 2—2,5 раз, а также приводить к их поломке именно в этих сечениях (рис. II.57).

Весьма важным для повышения усталостной прочности лопаток является высокое качество их изготовления. При механической обработке должны быть тщательно опилены и закруглены все острые кромки, включая края отверстий. Поверхность лопаток тщательно полируется с удалением забоин, мелких рисок и царапин, которые могут служить началом усталостных трещин. Снижение шероховатости поверхности сопровождается повышением конструктивной усталостной прочности лопаток, что особенно существенно для титановых лопаток. Так, повышение класса шероховатости поверхности титановых лопаток с пятого до седьмого приводит к повышению их предела выносливости при



Рис. II 57 Усталостные трещины в месте напайки стеллитовых пластин

симметричном цикле почти в 2 раза. Следует заметить, что стальные лопатки менее чувствительны к шероховатости поверхности. Это следует учитывать и при эксплуатации лопаток и, в частности, при проведении ремонтных работ.

Особенно опасны для усталостной прочности титановых лопаток поверхностные прижоги, образование которых связано, как известно [161], с поглощением газов из атмосферы при высоких температурах, возникающих в поверхностном слое при шлифовании и полировании. Это необходимо учитывать при разработке технологического процесса изготовления титановых лопаток и устранять условия, приводящие к образованию прижогов. Опасным является также перегрев металлов при упрочнении входных кромок и пайке проволоочных связей, так как возможная в этом случае подкалка может привести к возникновению мелких термических трещин.

Для повышения усталостной прочности лопаток в некоторых случаях производят упрочнение их поверхности. К настоящему времени разработан целый ряд методов поверхностного упрочнения лопаток: виброгалтовка (обработка шариками малого диаметра в масляной ванне), объемная вибрационная обработка, ультразвуковое упрочнение поверхности и т. д. [58, 97].

Конструктивный предел выносливости лопаток не остается постоянным при эксплуатации турбины. Во-первых, снижение предела выносливости связано с длительной работой лопаток при высокой температуре. Во-вторых, существенное уменьшение выносливости лопаток обусловлено агрессивным действием пара с растворенными в нем солями. Даже кратковременные испытания моделей лопаток в среде влажного пара указывают на снижение предела выносливости при симметричном цикле, примерно, на 20% по сравнению с результатами испытаний на воздухе.

Особенно сильное снижение усталостной прочности облопачивания (рабочих лопаток и связей) вызывает так называемое вибрационное коррозионное растрескивание под напряжением, обусловленное сочетанием усталостных явлений и коррозии, проявляющейся в сравнительно узкой области начальной конденсации пара [118, 213].

Анализ солевых отложений, собранных в проточной части работающих турбин, как правило, указывают на присутствие в паре различных агрессивных компонентов, наиболее вредными из которых являются ионы хлора (хлориды), вызывающие точечную (питтинговую) коррозию нержавеющей стали. Исследование характера зарождения и распространения трещин на поперечных металлографических шлифах, изготовленных из поврежденных проволоочных связей, показало взаимосвязь трещинообразования с коррозионными язвами (рис. 11.58). Глубина коррозионных язв достигает 0,5 мм с диаметром 0,4—0,5 мм.

Процессу образования коррозионных язв способствуют отложения, которые накапливаются, в первую очередь, в щелях, за

зорах и в сочленениях деталей. Из других вредных компонентов следует отметить сульфиды (соединения серы), а также соединения натрия, вызывающие щелочное растрескивание нержавеющей сталей в зоне перехода от перегретого к насыщенному пару.

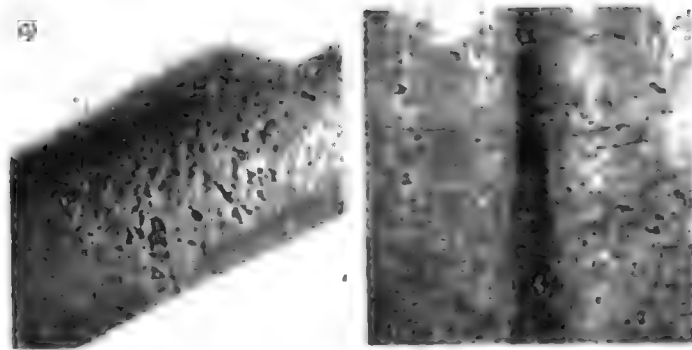


Рис. 11.58 Питтинговая коррозия и коррозионно-вибрационное растрескивание проволоочных связей

К существенному снижению предела выносливости приводит эрозионное разрушение входных и выходных кромок лопаток. В результате эрозии на отдельных участках кромок образуются пилообразные сквозные промывы на глубину до 2—5 мм (рис. 11.59).

Металлографические исследования, которые выполнялись на шлифах вырезанных из кромок лопаток, показали, что зона эрозионного износа характеризуется сложным рельефом поверхности (рис. 11.60) с наличием многих численных концентраторов в виде V-образных глубоких промывов с малыми углами раскрытия и тонкими мелкими трещинами у дна промыва. Усталостные испытания натурных лопаток с эрозионным повреждением выходной кромки на участках, близких к корневому сечению, при асимметричном цикле указывают на снижение предельных амплитуд переменных напряжений более, чем в 2 раза.

Снижение усталостной прочности лопаток вызывает также их абразивный износ. Такому износу подвергаются, в первую очередь,

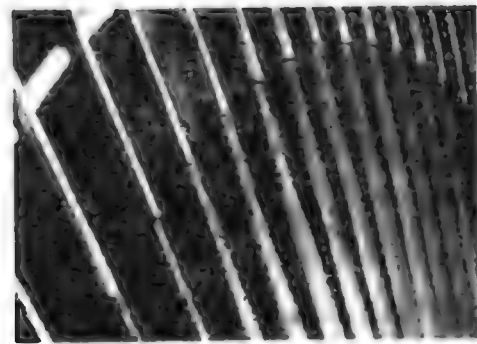


Рис. 11.59 Эрозионное разрушение входных кромок рабочих лопаток

лопатки регулирующих ступеней (рис. II.61). Причиной абразивного износа является наличие в паре мелкодисперсных твердых частиц, основным источником которых служит окалинаобразование на внутренних поверхностях элементов котлов [126].

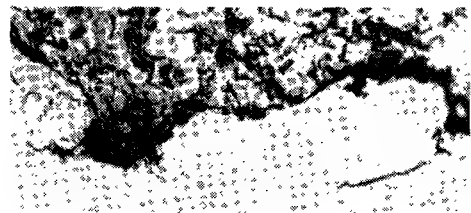


Рис. II.60. Рельеф поверхности эрозийного разрушения выходной кромки лопатки

Микротвердость этих частиц находится в пределах $HV\ 500-950$. Абразивному износу подвергаются как входные, так и особенно тонкие выходные кромки лопаток, в результате чего появляются острые сквозные промывы в районе корневых и периферийных сечений, являющиеся резкими концентраторами напряжений. Начало усталостных разрушений лопаток обычно имеет место у дна этих промывов.

Снижение усталостной прочности рабочих лопаток и связей может происходить вследствие так называемого явления фреттинг-коррозии [149]. Процесс фреттинг-коррозии является одним из случаев коррозионно-абразивного изнашивания металла, имеющего свои характерные особенности. Этот процесс определяется как механическими, так и химическими факторами. Механические факторы заключаются в наличии малых возвратно-поступательных перемещений двух контактирующих поверхностей относительно друг друга, которые имеют место при вибрации деталей. Химические факторы связаны с образованием на поверхностях трения окислов взаимодействующих металлов или одного из них. Образующиеся частицы окислов имеют твердость, значительно превосходящую твердость контактирующих металлов. В результате фреттинг-коррозия сопровождается истиранием поверхностей этими абразивными частицами с образованием точечных язв (питтингов). Эти питтинги, являясь концентраторами напряжений, могут служить очагами для появления усталостных трещин. Фреттинг-коррозия зависит от многих факторов: контак-

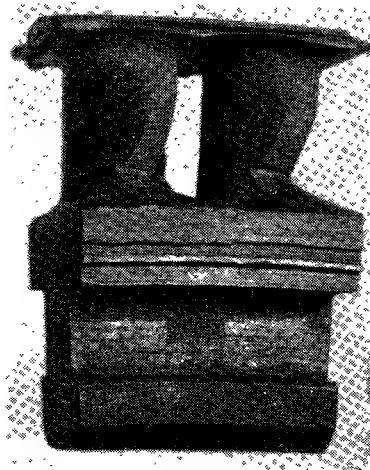


Рис. II.61. Абразивный износ пакета лопаток регуливающей ступени

тирующих материалов и образующихся окислов, состава и температуры окружающей среды, давления на контактирующих поверхностях, частоты и амплитуды колебаний и т. д.

При вибрации рабочих лопаток явление фреттинг-коррозии может иметь место в хвостовых соединениях, в частности в елочном хвостовом соединении на контактирующих поверхностях зубьев, а также в соединениях демпферных связей с лопатками. Явлению фреттинг-коррозии может способствовать значительная статическая и динамическая неравномерность нагруженности хвостовых соединений.

Таким образом, в результате указанных выше факторов при длительной эксплуатации допустимый уровень переменных напряжений в лопатках может оказаться почти на порядок ниже предела выносливости гладких образцов. Это требует, в свою очередь, максимально возможного ограничения переменных динамических напряжений, возникающих в рабочих лопатках во время работы турбины.

II.11. КОЛЕБАНИЯ ДИСКОВ

Рабочие лопатки паровых турбин в большинстве случаев устанавливаются на различных по конструкции дисках. Установка лопаток на дисках не только в определенной мере изменяет их собственные частоты, но и приводит к появлению дополнительных частот, не свойственных отдельным лопаткам, а соответствующих совместным колебаниям лопаток и дисков.

Неравномерность параметров потока по окружности вызывает колебания не только отдельных лопаток или лопаток, соединенных различными по конструкции связями, но и облопаченных дисков в целом. Первоначально рассмотрим особенности колебаний дисков без лопаток, а затем совместные колебания системы диск—лопатки.

Существуют различные типы колебаний дисков. Возможны колебания в плоскости диска, когда различные точки диска получают перемещения в тангенциальном направлении — колебания кручения — и в радиальном направлении — колебания удлинения [17]. Наибольшее практическое значение в стационарных паровых турбинах имеют, однако, изгибные колебания, при которых различные точки диска получают перемещения в аксиальном направлении перпендикулярно плоскости диска. Как и при колебании лопаток, различные типы колебаний дисков могут оказаться в определенной мере связанными. В п. I.2 отмечалось большое разнообразие в конструктивном выполнении дисков в зависимости от мощности турбины и места расположения диска в проточной части. Указанное разнообразие, естественно, приводит к существенному различию в собственных частотах дисков и определяет необходимость учета различного числа факторов при определении их частот.

Остановимся более подробно на имеющих наибольшее практическое значение изгибных колебаниях дисков (см. гл. XVII).

Если толщина диска мала по сравнению с его наружным диаметром, то при определении низших собственных частот можно пренебречь прогибами, вызванными касательными напряжениями. При определении высших собственных частот, а также при относительно большой толщине диска необходимо учитывать влияние прогибов, вызванных касательными напряжениями [44].

Аналитические выражения для собственных частот колебаний дисков могут быть получены в весьма малом числе случаев, при специальных законах изменения толщины диска в зависимости от радиуса [187], п. XVII.2). Ряд особенностей колебаний дисков может быть установлен еще до определения их собственных частот, на основании того, что рассматриваемая задача является осесимметричной. Анализ дифференциальных уравнений, описывающих колебания диска, показывает (см. п. XVII.2), что его собственная форма может быть представлена в следующем виде:

$$X(r) (C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi) = X(r) C \sin(m\varphi + \alpha), \quad (\text{II } 65)$$

где $X(r)$ — функция, зависящая только от текущего радиуса r , C_1 и C_2 — произвольные постоянные; φ — угол, отсчитываемый от произвольного начального радиуса.

Так как собственная форма должна быть периодической функцией φ с периодом 2π , то из (II 65) следует, что величина m должна быть целым числом. Отсюда амплитуда колебаний по окружности диска изменяется по закону $\sin(m\varphi + \alpha)$, т. е. представляет собой синусоиду с m волнами. Условие $m\varphi_1 + \alpha = s\pi$ (где s — целое); или $\varphi_1 = (s\pi - \alpha)/m$ определяет узловые линии, которые представляют собой узловые диаметры. Если при определенных значениях r , функция $X(r)$ обращается в нуль, то из формулы (II.65) следует также, что узловые линии могут иметь и вид концентрических окружностей, определяемых из условия $X(r_1) = 0$. Таким образом, при колебаниях диска может иметь место различное число узловых диаметров и узловых окружностей и в частном случае узловые диаметры или узловые окружности могут отсутствовать.

Частоты колебаний, соответствующие собственным формам $X(r) C_1 \cos m\varphi$ и $X(r) C_2 \sin m\varphi$, равны друг другу, что приводит к особенностям, отмечавшимся ранее при рассмотрении колебаний лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями (см. п. II.3): из-за равенства двух собственных частот положение узловых диаметров по окружности диска оказывается неопределенным, зависящим от соотношения произвольных постоянных C_1 и C_2 . Эту особенность можно обнаружить экспериментально, если изменять место приложения возмущающей силы по окружности диска и возбуждать резонансные колебания. Например, при приложении возмущающей силы в точке с координатами r_0, φ_0 между величинами произвольных постоянных C_1 и C_2 будет выполняться такое соотношение, при котором место приложения возмущающей силы совпадет с пучностью колебаний, т. е. с максимумом

функции $X(r_0) C \sin(m\varphi_0 + \alpha)$, определяемым равенством $\sin(m\varphi_0 + \alpha) = 1$.

Если за счет какой-либо конструктивной или технологической причины диск перестанет быть осесимметричным, то две прежде равные собственные частоты с одинаковым числом узловых диаметров станут различными, а положение узловых линий для собственных форм, соответствующих этим частотам, будет вполне определенным, фиксированным по отношению к диску. Эффект раздвоения прежде равных собственных частот при введении конструктивной несимметрии для круглых пластинок и облочков вращения отмечался еще в [164].

Собственные частоты дисков и соответствующие им собственные формы могут быть легко определены экспериментально. Если установить диск на плите, зажать его по внутреннему контуру, а затем возбудить с помощью электромагнита (для диска из магнитного материала) или электродинамического вибратора, то при определенных частотах возмущающей силы будут отчетливо наблюдаться резонансные колебания. Низшим собственным частотам соответствуют колебания с узловыми диаметрами без узловых окружностей (рис. II.62), причем при увеличении числа узловых диаметров для $m \geq 1$ собственные частоты повышаются.

Собственные формы можно наблюдать визуально, если посыпать колеблющийся диск песком или порошком мела, которые будут скапливаться вблизи узловых линий (рис. II.62).

При дальнейшем увеличении частоты возмущающей силы вновь возникнут колебания с теми же числами диаметров, но дополнительно появится одна узловая окружность, затем две и т. д. Форма прогиба диска по радиусу при колебаниях без узловых окружностей (а) и с одной узловой окружностью (б) показана на рис. II.63. Порядок следования частот с различными числами узловых диаметров и узловых окружностей зависит от геометрических характеристик дисков. В качестве примера в табл. II.10 приведена расчетная и экспериментальная зависимость собствен-

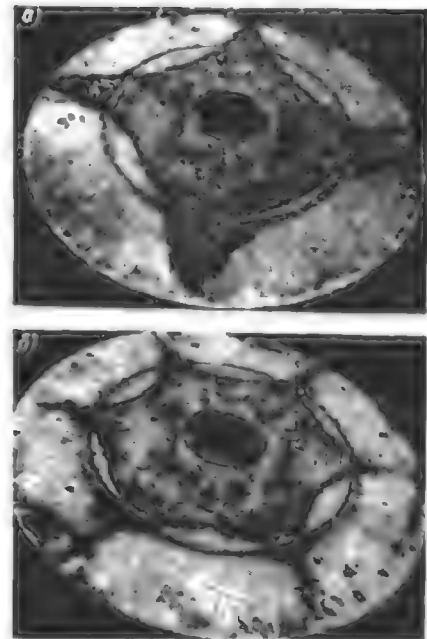


Рис. II.62. Собственные формы колеблющегося диска, соответствующие различным числам узловых диаметров m : а — $m = 2$; б — $m = 3$

Таблица II 10

i	m (расчет)						
	0	1	2	3	4	5	6
0	163,4	227,7	292	750	1406	2245	3285
1	1134	1326	1710	2230	2940	3805	4820
2	2960	3210	3870	4700	5680	6830	8140

i	m (эксперимент)						
	0	1	2	3	4	5	6
0	—	115	300	765	1440	2260	3320
1	1100	1290	1600	2140	2820	—	—
2	2880	3120	3690	—	—	—	—

ных частот диска от числа узловых диаметров m и числа узловых окружностей j [20].

Собственные частоты колебаний дисков, как и частоты лопаток, зависят от центробежных сил и температуры. Влияние центробеж-

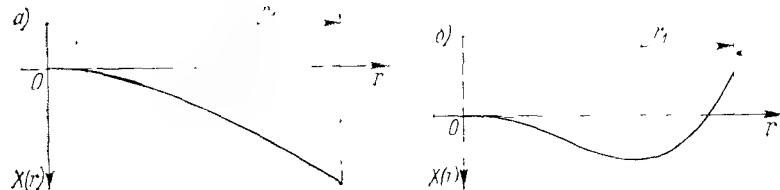


Рис II.63. Форма прогиба диска по радиусу при колебаниях с различным числом узловых окружностей

ных сил, как и для вращающихся лопаток, может быть учтено с помощью формулы

$$f_{\text{дин}}^2 = f_{\text{ст}}^2 + Bn^2,$$

где $f_{\text{дин}}$ и $f_{\text{ст}}$ — динамическая и статическая частота, т. е. частота вращающегося и неподвижного диска; n — частота вращения ротора турбины; B — коэффициент, зависящий от геометрических характеристик и формы колебаний диска; здесь B с еще большим основанием, чем для лопаток, можно считать постоянным, не зависящим от n .

Собственные частоты дисков, как правило, значительно выше собственных частот лопаток цилиндров низкого давления, поэтому влияние центробежных сил на частоты дисков обычно весьма мало (см. п. II.5).

Изменение температуры приводит к изменению модуля упругости диска и, таким образом, сказывается на его собственных ча-

стотах. Имеется и другая причина, приводящая к зависимости собственных частот от температуры, а именно: неравномерный нагрев диска. Например, в [20] рассмотрено влияние неравномерного по радиусу осесимметричного нагрева диска на его собственные частоты. При неравномерном по радиусу нагреве диска в его срединной плоскости возникают температурные напряжения, влияние которых может оказаться качественно различным для разных собственных форм. Если в срединной плоскости возникают напряжения растяжения, то они повышают собственные частоты так же, как центробежные силы. Наоборот, появление в срединной плоскости напряжений сжатия может привести к снижению собственных частот. Так как при неравномерном по радиусу нагреве диска одновременно будут иметь место напряжения одного знака у ступицы и другого — у обода, то их суммарное влияние на частоты будет зависеть от номера собственной формы. При более высокой температуре обода диска по сравнению со ступицей у периферии диска возникнут температурные напряжения сжатия, а в его центральной части — напряжения растяжения. Так как при увеличении числа узловых диаметров собственные частоты диска все в большей мере определяются упругими свойствами и напряженным состоянием его периферийной части, то при более высокой температуре обода частоты колебаний с достаточно большим числом узловых диаметров окажутся ниже, чем при отсутствии температурных напряжений [20]. Наоборот, частоты колебаний с малым числом узловых диаметров, на которые в большей степени влияет напряженное состояние в центральной части диска, при указанном перепаде температур по радиусу могут даже возрасти. Противоположная картина будет наблюдаться в случае, если температура обода диска окажется ниже, чем температура его центральной части [20]. При усложнении собственных форм влияние температурных напряжений на частоты уменьшается.

Значительное влияние температурных напряжений на частоты колебаний дисков паровых турбин было экспериментально обнаружено еще В. Кемпбеллом [82]. Необходимо отметить, однако, что в современных мощных стационарных турбинах влияние температурных напряжений на собственные частоты колебаний дисков, так же как и влияние центробежных сил, сравнительно мало. Это объясняется как относительно большими толщинами дисков, так и сравнительно малыми градиентами температур по радиусу, значительно меньшими, чем, например, в дисках авиационных газотурбинных двигателей.

Практический интерес, естественно, представляют колебания не отдельных, а облопаченных дисков. Влияние лопаток на частоты колебаний облопаченных дисков сильно зависит от относительных размеров лопаток и дисков и качественно изменяется в зависимости от расположения диска в проточной части. Например, собственные частоты лопаток регулирующей ступени могут значительно превосходить собственные частоты дисков с малым числом

узловых диаметров. В этом случае влияние лопаток сводится в основном к некоторому снижению собственных частот за счет увеличения массы, расположенной на периферии диска. По мере увеличения длин лопаток их собственные частоты падают, а взаимное влияние колебаний лопаток и диска возрастает. При изучении колебаний облопаченных дисков оказывается уже недостаточным рассматривать лопатку как массу, присоединенную к ободу диска, а необходимо учитывать дополнительный прогиб самой лопатки, возникающей под действием инерционных нагрузок при совместных колебаниях лопаток и диска. Обычно практический интерес представляют колебания с относительно малым числом узловых диаметров, значительно меньшим, чем число лопаток на диске.

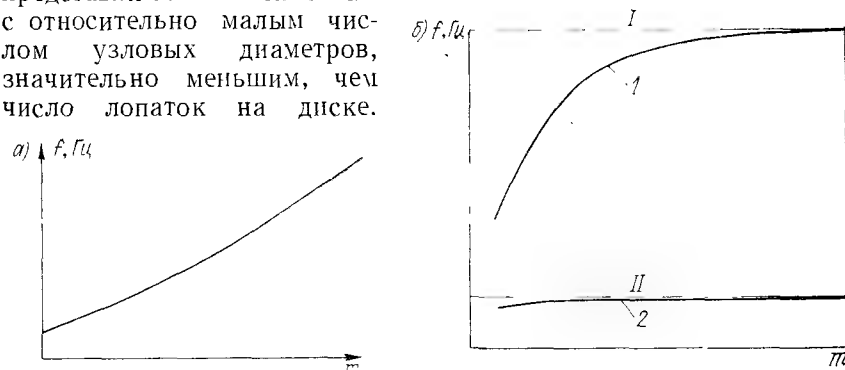


Рис. 11.64. Зависимость собственных частот от числа узловых диаметров

В этом случае с достаточным основанием можно считать, что облопаченный диск сохраняет осевую симметрию, вследствие чего форма прогиба по окружности по-прежнему сохраняется синусоидальной. Однако несмотря на то, что форма прогиба по окружности для облопаченного и необлопаченного дисков сохраняется неизменной, зависимость частот от числа узловых диаметров оказывается качественно различной. Если для необлопаченного диска собственные частоты резко возрастают с увеличением числа узловых диаметров (см. табл. II.10, рис. II.64, а), то для облопаченного диска частоты совместных колебаний (кривые 1 и 2 на рис. II.64, б) асимптотически стремятся к аксиальным частотам колебаний отдельных лопаток (кривые I и II на рис. II.64, б). При увеличении длины лопаток относительное влияние диска падает, а частоты совместных колебаний все в меньшей степени зависят от числа узловых диаметров, приближаясь к частоте жестко заделанной лопатки (кривая 2 на рис. II.64, б). Зависимость, изображенная на рис. II.64, б будет справедлива только при условии, что угол установки лопаток равен нулю, лопатки не закручены и не соединены какими-либо связями, а при рассмотрении изгибных колебаний лопаток и дисков можно пренебречь кручением лопаток.

В том случае, когда лопатка является закрученной или, по крайней мере, угол ее установки отличен от нуля, частоты колеба-

ний облопаченного диска при выполнении остальных указанных выше условий будут асимптотически стремиться не к аксиальной, а к первой частоте колебаний отдельных лопаток [20].

Зависимость собственных частот облопаченных дисков от числа узловых диаметров, изображенная на рис. II.64, б, имеет место при установке на диске отдельных лопаток без связей. Однако, в большинстве случаев такие длинные относительно гибкие лопатки соединяются различными по конструкции связями. Особенно простые закономерности частотного спектра будут иметь место при использовании замкнутых на круг связей. Считая, как и ранее, что число лопаток на диске много больше числа узловых диаметров при рассматриваемых формах колебаний, можно с достаточной для практики точностью полагать, что облопаченный диск по-прежнему является осесимметричным и совершает колебания с различными числами узловых диаметров и узловых окружностей, которые, однако, могут располагаться и на лопатках. Типичная зависимость собственных частот различных групп форм облопаченного диска от

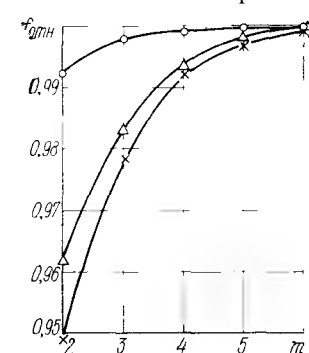


Рис. 11.66. Влияние податливости собственно диска на частоты I группы форм дисковых колебаний:

× — × — $D_{cp}/l = 3,55$; △ — △ — $D_{cp}/l = 3,01$; ○ — ○ — $D_{cp}/l = 2,75$

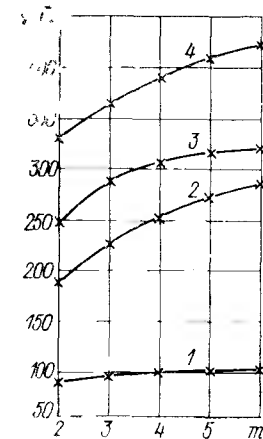


Рис. 11.65. Зависимость частот различных групп форм дисковых колебаний от числа узловых диаметров

числа узловых диаметров показана на рис. II.65, где приведены данные для лопаток последней ступени цилиндра низкого давления с $D_{cp}/l = 2,58$, соединенных тремя замкнутыми на круг связями. Кривые 1—4 соответствуют I—IV группам форм дисковых колебаний с малым числом узловых диаметров. В большинстве случаев для лопаток последних ступеней цилиндра низкого давления эти кривые весьма мало отличаются от кривых для соответствующих групп форм внутрипакетных колебаний, рассмотренных в п. II.3. Кривые 2—4 на рис. II.65, соответствующие группам форм с одной—тремя узловыми окружностями при колебаниях необлопаченных дисков, фактически представляют собой высшие группы форм внутрипакетных колебаний лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, при которых узловые окружности располагаются не на диске, а на лопатках. Возра-

стание собственных частот при увеличении числа узловых диаметров, указанное на рис. II.65, определяется в основном не влиянием собственно диска, а увеличением жесткости соединяющих лопатки связей.

На рис. II.66 показано влияние податливости диска на частоты I группы форм дисковых колебаний: на рисунке изображена зависимость относительных значений частот дисковых колебаний $f_{отн} = f_d / f$ (где f_d — собственная частота дисковых колебаний, f — собственная частота замкнутого на круг «пакета» лопаток с тем же числом узловых диаметров, но при условии жесткой заделки лопаток в корневом сечении) от числа узловых диаметров m . Как видно, влияние податливости собственно диска для лопаток рассмотренных ступеней весьма мало. Влияние податливости диска резко уменьшается при возрастании числа узловых диаметров и уменьшении отношения $D_{ср} / l$. Таким образом, частоты внутрипакетных колебаний лопаток последних ступеней цилиндра низкого давления, соединенных замкнутыми на круг связями, вычисленные без учета податливости диска, практически совпадают с частотами колебаний облопаченных дисков.

Определенное влияние на собственные частоты лопаток могут оказать тангенциальные колебания диска — колебания кручения. В работе [186] показано, что податливость диска в тангенциальном направлении может привести к снижению собственных частот тангенциальных колебаний лопаток. Практическое значение податливости диска в тангенциальном направлении может иметь только при колебаниях без узловых диаметров.

Качественно другой эффект может иметь место при совместных изгибно-крутильных колебаниях системы ротор — диск — лопатки. Если частота крутильных колебаний ротора окажется ниже частоты тангенциальных колебаний лопаток, то податливость диска в тангенциальном направлении вместе с податливостью ротора на кручение могут привести не к снижению, а к повышению частот синфазных колебаний лопаток [209]. Это объясняется тем, что в резонансной зоне крутящий момент, приложенный к ротору со стороны синфазно колеблющихся лопаток и вызванный перерезывающими силами, действующими в их корневых сечениях, приведет к повороту ротора в сторону, противоположную направлению действующего на него крутящего момента. В результате перемещение корневого сечения лопатки будет иметь знак, противоположный перемещению ее периферийного сечения, а собственные частоты тангенциальных колебаний лопаток окажутся выше, чем при условии их жесткой заделки в корневом сечении.

Приведенные выше результаты указывают на то, что спектр собственных частот облопаченных дисков оказывается значительно более густым, чем спектр собственных частот лопаток. Это обстоятельство могло бы существенно понизить вибрационную надежность облопаченных дисков, если бы все собственные формы с близкими частотами были одинаково опасными. Практически, однако,

при рассмотрении колебаний облопаченных дисков необходимо учитывать приведенные в п. II.8 соображения относительно значений пакетного множителя при различных группах форм внутрипакетных колебаний.

Как и в п. II.8, будем рассматривать возмущающие силы, вызванные неравномерностью параметров потока по окружности колеса. Ограничимся рассмотрением колебаний необлопаченных дисков, а также облопаченных дисков с отдельными лопатками без связей или с лопатками, соединенными замкнутыми на круг связями. Во всех этих случаях при отсутствии технологических отклонений можно считать, что форма прогиба по окружности изменяется по синусоидальному закону или имеют место синфазные колебания лопаток.

При изгибных колебаниях облопаченных дисков с различным числом узловых окружностей без узловых диаметров, при которых амплитуды всех лопаток равны друг другу, оказываются справедливыми соотношения для пакетного множителя, полученные в п. II.8 при рассмотрении синфазных колебаний лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями. В последнем случае, как известно, справедлива формула (II.47), из которой следует, что пакетный множитель при колебаниях облопаченных дисков без узловых диаметров теоретически равен нулю, вплоть до колебаний с частотой sz_1 , где s — целое, z_1 — число рабочих лопаток на диске.

Столь же мала будет опасность и рассмотренных выше изгибно-крутильных колебаний системы ротор — диск — лопатки, поскольку при этих колебаниях амплитуды всех лопаток также будут одинаковыми. Этот вывод может оказаться несправедливым при наличии возмущающих сил, вызывающих крутильные колебания ротора, т. е. возмущающих сил, не связанных с неравномерностью параметров потока по окружности.

При изгибных колебаниях облопаченных дисков с узловыми диаметрами распределение амплитуд различных лопаток по окружности колеса совпадает с распределением амплитуд при внутрипакетных колебаниях лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями и жестко заделанных по корневому сечению. Естественно поэтому, что при колебаниях облопаченных дисков с различными числами узловых диаметров будет справедлива формула (II.51) для пакетного множителя при внутрипакетных колебаниях. Из формулы (II.51) следует, что для низкочастотных колебаний, при которых соблюдается условие $k \ll z_1$ (где k — кратность колебаний, т. е. число колебаний за оборот), пакетный множитель оказывается отличным от нуля только в случае $k = m$, т. е. при совпадении числа узловых диаметров с кратностью колебаний. Подобное же соотношение может быть получено и для колебаний собственно диска, когда форма прогиба по длине окружности имеет вид $X(r) (C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi)$.

В п. II.12 показано, что опасные колебания облопаченных дисков могут возникнуть при определенной частоте вращения, назы-

ваемой критической $n_{кр}$, при которой выполняются следующие соотношения:

$$\rho = 2\pi f_{дин} = 2\pi k n_{кр} = k \omega_{кр}; \quad k = m, \quad (II.66)$$

где $f_{дин}$ — динамическая частота колебаний облопаченного диска с m узловыми диаметрами при частоте вращения ротора турбины $n_{кр}$.

При выполнении соотношений (II.66) прогиб по окружности диска будет изменяться по закону:

$$V(\varphi, r, t) = C_1 X(r) \cos m\varphi \sin(pt + \alpha_1) + C_2 X(r) \sin m\varphi \sin(pt + \alpha_2). \quad (II.67)$$

В п. XIII.6 и XVII.3 показано, что в случае равенства декрементов колебаний при обеих собственных формах с m узловыми диаметрами и возбуждении колебаний неравномерностью параметров потока, изменяющихся по закону $\cos k\varphi$, будут выполняться следующие соотношения:

$$C_1 = C_2 = C; \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = \pi/2. \quad (II.68)$$

Используя выражения (II.67) и (II.68), получим, что обе собственные формы с m узловыми диаметрами будут возбуждаться с одинаковыми амплитудами, но с определенным сдвигом по фазе, в результате чего суммарный прогиб будет изменяться во времени следующим образом:

$$CX(r) \cos m\varphi \sin pt + CX(r) \sin m\varphi \cos pt = CX(r) \sin(m\varphi + pt). \quad (II.69)$$

Как следует из формулы (II.69), колебания имеют характер «бегущей волны», т. е. амплитуды всех точек диска, расположенных на определенном радиусе, будут равны друг другу, но максимальные отклонения будут достигаться в различные моменты времени. Учитывая условия (II.66), преобразуем выражение (II.69) к виду

$$CX(r) \sin(m\varphi + pt) = CX(r) \sin k(\varphi + \omega_{кр}t).$$

Из условия $\varphi + \omega_{кр}t = 0$, $\varphi = -\omega_{кр}t$ найдем, что узловые диаметры вращаются относительно диска с угловой скоростью $-\omega_{кр}$. Так как сам диск вращается с угловой скоростью $\omega_{кр}$, то узловые диаметры остаются неподвижными по отношению к статору турбины. Неподвижными по отношению к статору будут и пучности колебаний, определяемые из условия $|\sin k(\varphi + \omega_{кр}t)| = 1$. Таким образом, к определенной точке окружности все точки вращающегося диска будут подходить в одной и той же фазе, что дает возможность сосредоточенной в пространстве силе или неизменной во времени неравномерности параметров потока по окружности колеса совершать отличную от нуля работу, т. е. поддерживать резонансные колебания облопаченного диска. В п. II.8 было показано, что аналогичное явление наблюдается

и при внутрипакетных колебаниях лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями.

При наличии отклонений от круговой симметрии форма прогиба по окружности облопаченного диска будет несколько отличаться от синусоидальной, и неравномерность потока по окружности может возбудить, хотя и с относительно небольшими амплитудами, колебания с числом узловых диаметров, отличным от кратности колебаний (см. п. XIII.7). Эти колебания могут возбуждаться и при отсутствии отклонений от круговой симметрии, но при наличии других источников возмущающих сил. Например, неравномерность потока по окружности может и не быть постоянной во времени, а зависеть от изменения проходных сечений вращающегося рабочего колеса. Такой источник возмущающих сил может вызывать колебания с различными числами узловых диаметров одной и той же кратности. Тем не менее интенсивность подобных возмущающих сил значительно меньше, чем интенсивность возмущающих сил, вызванных неизменной во времени неравномерностью параметров потока по окружности. Сравнительно невелики и отличия от круговой симметрии, вызванные технологическими отклонениями при изготовлении и сборке дисков и лопаток. Поэтому наибольшую опасность представляют колебания с числом узловых диаметров, совпадающим с кратностью колебаний. Об этом же свидетельствует и практика эксплуатации стационарных паровых турбин, показывающая, что надежная работа, как правило, может быть гарантирована при условии обеспечения достаточных запасов между рабочей и критической частотой вращения для низкочастотных колебаний облопаченных дисков.

II.12. МЕРОПРИЯТИЯ ПО ОБЕСПЕЧЕНИЮ ВИБРАЦИОННОЙ НАДЕЖНОСТИ ЛОПАТОК И ОБЛОПАЧЕННЫХ ДИСКОВ

Объем и характер мероприятий по обеспечению вибрационной надежности лопаток и облопаченных дисков определяются условиями эксплуатации стационарных паровых турбин. Условия работы лопаточного аппарата стационарных паровых турбин существенно отличаются от условий работы лопаточного аппарата других турбомашин, например авиационных газотурбинных двигателей. С одной стороны, рабочая частота вращения стационарных паровых турбин является постоянной, что позволяет производить отстройку наиболее опасных собственных форм лопаток; практически отсутствуют ограничения на габаритные размеры и массу лопаток, что позволяет сохранить напряжения парового изгиба на сравнительно невысоком уровне; опасность термических напряжений в лопатках паровых турбин значительно меньше из-за большей длительности пуска и т. д. С другой стороны, мощные стационарные паровые турбины изготавливаются столь малыми сериями, а расход пара через цилиндры высокого и среднего давления столь велик, что практически отсутствуют возможности

определения уровня динамических напряжений в лопатках до изготовления натурной турбины. Так как стоимость внепланового простоя мощных паровых турбин, особенно атомных, очень велика¹, то должна быть обеспечена безаварийная работа лопаток без предварительного определения уровня динамических напряжений в условиях эксплуатации даже в одной турбине, не говоря уже об испытаниях на всех режимах нескольких турбин, как это практикуется при доводке лопаточного аппарата газотурбинных двигателей.

Особые трудности возникают при создании лопаток последних ступеней, для которых окружные скорости периферийных сечений уже в настоящее время достигают 650 м/с в турбинах с $n = 3000$ об/мин.

В связи с постоянством рабочей частоты вращения одним из главных методов обеспечения вибрационной надежности является вибрационная отстройка, заключающаяся в обеспечении необходимых запасов между рабочей частотой вращения и частотой вращения, при которой возможны опасные резонансные колебания лопаток. В соответствии со сказанным в предыдущих параграфах легко понять, что отстройка всех собственных форм колебаний отдельных лопаток является невозможной. В еще большей степени это относится к пакетам лопаток и облопаченным дискам, частотный спектр которых является значительно более густым.

В п. 1.4 отмечалось, что имеется две группы возмущающих сил: сравнительно низкочастотные, кратные частоте вращения (kn) и высокочастотные, кратные произведению частоты вращения на число направляющих лопаток ($k n_z$). При рассмотрении низкочастотных возмущающих сил легко показать, что отстройка не может быть обеспечена для достаточно высоких кратностей (достаточно больших значений k) из-за возможного изменения частоты сети, технологических отклонений при изготовлении и сборке лопаток и возможности изменений в условиях заделки при нестационарном тепловом состоянии ротора. Действительно, если отношение собственной частоты лопатки f к частоте вращения n равно $f/n = k + a$, где $0 < a < 1$, то переход от максимального запаса между резонансной и рабочей частотами вращения к нулевому запасу соответствует изменению величины a от 0,5 до 0. Таким образом, относительное различие в частотах лопаток, имеющих наибольший запас от резонанса и не имеющих запаса, составляет всего $\Delta f/f = 1/2k$, т. е. изменяется обратно пропорционально кратности колебаний. Если, например, $k = 5$, то $\Delta f/f = 10\%$, но уже при $k = 10$ $\Delta f/f = 5\%$, а при $k = 20$ $\Delta f/f = 2,5\%$. Так как в соответствии с действующими в стационарном турбостроении нормами² разброс в частотах лопаток в комплекте может дости-

гать 8%, а частота сети может изменяться от -2 до $+1\%$, то отстройка собственных частот уже при $k = 10$ оказывается практически невозможной.

В п. 1.4 указывалось, что амплитуды возмущающих сил уменьшаются с ростом частоты, а в п. II.7 — что значительно уменьшается сравнительная возбудимость высших собственных форм, т. е. значительно уменьшаются динамические напряжения в лопатках при этих формах в случае действия одинаковых возмущающих сил. Соединение лопаток связями, хотя и приводит к появлению дополнительных частот, однако может значительно уменьшить опасность большинства собственных форм из-за малой величины пакетного множителя (см. п. II.8). Учет всего этого позволяет производить отстройку не всех собственных форм, а только «наиболее возбудимых» и только в определенном частотном диапазоне.

В частности, в соответствии с действующими в стационарном турбостроении нормами, отражающими опыт предшествующей эксплуатации, от низкочастотных возмущающих сил производится отстройка только тех лопаток, динамические частоты которых ниже 300 Гц, т. е. для которых возможны резонансные колебания с шестой или более низкими кратностями. При этом в диапазоне до 300 Гц должны отстраиваться все формы отдельных лопаток и пакетов лопаток, а при соединении лопаток замкнутыми на круг связями должны быть обеспечены достаточные запасы между рабочими и критическими частотами вращения, т. е. частотами, при которых на k -й кратности возникает резонанс с k узловыми диаметрами.

Динамические частоты $f_{дин}$ отдельных лопаток, а также пакетов лопаток и отстраиваемых форм облопаченных дисков с лопатками, соединенными замкнутыми на круг связями, при рабочей скорости вращения должны находиться в одном из следующих интервалов:

$$\begin{aligned} f_{дин} < 91; & \quad 209 < f_{дин} < 237; \\ 107 < f_{дин} < 140; & \quad 260 < f_{дин} < 285; \\ 158 < f_{дин} < 188; & \quad 310 < f_{дин}. \end{aligned} \quad (II.70)$$

Так как определение динамических частот при рабочей скорости вращения затруднительно¹, то обычно регламентируют минимальные запасы между рабочими и критическими частотами вращения $n_{кр} = f_{дин}/k$, где $f_{дин}$ — динамические частоты при $n_{кр}$. Запасы должны составлять не менее:

$$\begin{aligned} 10\% \text{ при } k=2; & \quad 5\% \text{ при } k=5; \\ 7\% \text{ при } k=3, & \quad 4\% \text{ при } k=6. \\ 6\% \text{ при } k=4; & \end{aligned} \quad (II.71)$$

¹ Например, по данным [111], стоимость аварийного простоя атомной турбины мощностью 925 МВт составляет 600 тыс. долларов в сутки.

² Нормы на вибрационную отстройку лопаток паровых турбин РТМ 108.021.03—77, 4 с.

¹ Определение динамических частот при рабочей скорости вращения может быть обеспечено, например, с помощью укрепленных на лопатках пьезодатчиков, к которым подводится напряжение с частотой, не зависящей от скорости вращения турбины.

Ясно, что для каждой собственной формы существует целый ряд критических частот вращения и условия (II.71) должны выполняться для критических частот вращения, ближайших к рабочей как снизу, так и сверху, т. е. для наибольшей критической частоты вращения, лежащей ниже рабочей, и для наименьшей критической частоты вращения, лежащей выше рабочей. Для облопаченных дисков с лопатками, соединенными замкнутой на круг связью, проверка выполнения условий (II.70) и (II.71) должна осуществляться только для форм, при которых число узловых диаметров совпадает с кратностью колебаний (см. п. II.11).

В п. II.5 было показано, что связь между динамическими и статическими частотами определяется формулой $f_{\text{дин}} = \sqrt{f_{\text{ст}}^2 + Bn^2}$, откуда следует, что критические частоты вращения могут быть вычислены по известным статическим частотам и коэффициенту B

$$n_{\text{кр}} = f_{\text{ст}} / \sqrt{k^2 - B}.$$

Кроме низкочастотных возмущающих сил, опасными могут являться резонансные колебания с частотами, кратными произведению частоты вращения на число направляющих лопаток. В соответствии с действующими нормами подлежат отстройке от резонанса с частотой nz следующие собственные формы: первый, второй, третий тон изгибных колебаний; первый и второй тон крутильных колебаний для отдельных лопаток; первый и второй тон тангенциальных колебаний; первый тон внутрипакетных изгибных и крутильных колебаний — для пакетов лопаток. Отстройка тангенциальных колебаний пакетов может не производиться при малом значении величины пакетного множителя. Частоты отстраиваемых форм должны заключаться в диапазоне:

$$f_{\text{дин}} < 47z; f_{\text{дин}} > 52,5z. \quad (\text{II.72})$$

С достаточной для практики точностью при рассмотрении условий (II.72) можно считать, что $f_{\text{дин}} \approx f_{\text{ст}}$ (см. п. II.5) и вводить поправку только на изменение модуля упругости при рабочей температуре.

Как ясно из вышесказанного, выполнение условий (II.70) (II.72) основано на статистической обработке результатов предшествующей эксплуатации и в каком-либо конкретном случае может не являться необходимым. Тем не менее, при проектировании новых турбин эти условия соблюдаются из-за недостаточности знания возмущающих и демпфирующих сил в условиях эксплуатации. В некоторых, хотя и достаточно редких, случаях выполнение указанных условий может оказаться недостаточным. Например, при наличии специальных конструктивных источников возмущения или концентраторов напряжений уровень динамических напряжений в лопатках может достичь опасных значений и при колебаниях с более сложными, чем указывалось выше, собственными формами или при более высоких кратностях колебаний. В частности, из-

вестны случаи возникновения усталостных трещин в зоне упрочнения входных кромок лопаток, соединенных замкнутой на круг демпферными проволоками, при II группе форм внутрипакетных колебаний с частотой 300 Гц, а также появления трещин в сечениях, ослабленных отверстиями под демпферные проволоки при резонансных колебаниях с весьма сложными собственными формами в районе nz . В [216] отмечалось, что опасными могут быть колебания не только с частотой nz , но и с частотой $2nz$ и т. д.

Проведение вибрационной настройки обычно включает следующие мероприятия:

- 1) расчетное определение собственных частот отдельных лопаток и лопаток со связями;
- 2) экспериментальное определение собственных частот отдельных лопаток в тисках и на роторе;
- 3) экспериментальное определение собственных частот пакетов лопаток на оправках и на роторе;
- 4) экспериментальное определение динамических частот отдельных лопаток и лопаток со связями в Кемпбелл-машине.

В связи с развитием численных методов расчета и реализацией их на ЭВМ задача определения собственных частот отдельных лопаток и лопаточных венцов может быть решена в достаточно общей постановке с учетом сдвига, инерции вращения, податливости заделки и т. д. Следует иметь в виду, что различие между экспериментальными и расчетными частотами, имеющее место в некоторых случаях, определяется главным образом недостаточно правильным заданием граничных условий как в местах заделки лопаток, так и в местах соединения их со связями.

Собственные формы лопаток могут быть с большой точностью определены при использовании голографических методов исследования [127]. Например, на рис. II.67 показано распределение амплитуд при первом тоне тангенциальных (а) и крутильных (б) колебаний, полученное с помощью стробоголографического метода: при расшифровке изображения следует учитывать, что каждая из полос, изображенных на рисунке, соединяет точки лопатки, колеблющиеся с одинаковыми амплитудами.

Экспериментальное определение частот лопаток первоначально осуществляется в тисках при фиксированной величине усилия зажима. Качество сборки лопаток с Т-образными, грибовидными и вильчатыми хвостами на диск проверяется с помощью сравнения частот, полученных при испытаниях в тисках, с частотами, полученными после сборки лопаток на роторе. На рис. II.68 приведено сравнение частот первого тона колебаний для комплектов лопаток разной длины, испытанных в тисках и на роторе. На рисунке обозначено $\Delta f_{\text{отн}} = (f_p - f_r) / f_r \%$, где f_p и f_r — среднеарифметические значения частот комплектов лопаток при испытаниях на роторе и в тисках. Как видно, частоты лопаток на роторе оказались в среднем даже немного выше, чем в тисках, что свидетельствует о несколько большем усилии зажима по тангенциальным

поверхностям хвостов при сборке на роторе. Расхождение частот, определенных при испытаниях в тисках и на роторе, весьма невелико и для 27 испытанных комплектов в среднем составляет всего

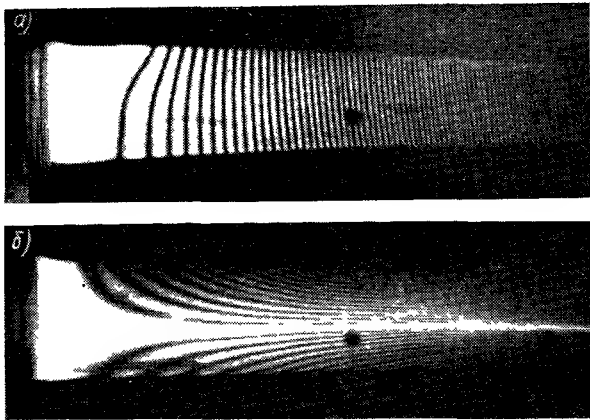


Рис. 11.67. Собственные формы, соответствующие первому тону тангенциальных (а) и первому тону крутильных (б) колебаний лопатки, полученные с помощью строболографического метода

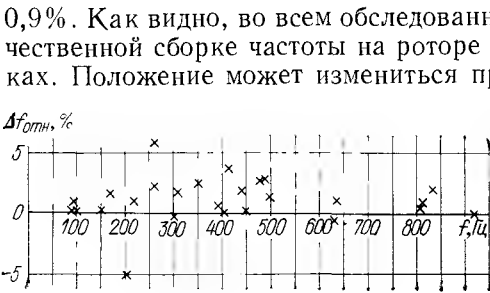


Рис. 11.68. Сопоставление частот комплектов лопаток, испытанных в тисках и на роторе

в случае необходимости изменить число лопаток в пакете или число соединяющих лопатки связей. Испытания на оправках целесообразно проводить и до изготовления диафрагм, чтобы при необходимости иметь возможность изменить число направляющих лопаток.

Хотя в п. 11.1—11.3 и указывалось, что лопатки совершают связанные изгибно-крутильные колебания, однако в большинстве случаев используется приведенная в п. 11.2 классификация различных собственных форм колебаний пакетов в соответствии с наиболь-

шей составляющей вектора перемещений. В качестве примера в табл. 11.11 приведены результаты испытаний пакетов лопаток различной длины, большинство из которых заимствованы из работы [98]. Испытания, аналогичные тем, результаты которых приведены в табл. 11.11, повторяются и на облопаченном роторе. Цель вибрационных испытаний пакетов лопаток на роторе: убедиться в том, что условия закрепления лопаток на оправках достаточно хорошо моделировали условия на роторе.

Собственные частоты отдельных вращающихся лопаток и особенно лопаток, соединенных различными по конструкции связями определяют в так называемой Кемпбелл-машине, представляющей собой вакуумную камеру, в которой вращается исследуемый облопаченный диск (рис. 11.69). Вакуум в камере создается для предотвращения чрезмерного разогрева вращающихся лопаток и уменьшения мощности привода, в качестве которого обычно используется паровая турбина или электродвигатель постоянного тока. Напряжения в лопатках обычно регистрируются с помощью тензорезисторов или пьезодатчиков, сигналы с которых через контактные токосъемники или телеметрические устройства подаются на регистрирующую и анализирующую виброаппаратуру.

Таблица 11.11

№ п.п.	Тангенциальные колебания		Внутрипакетные изгибные колебания, первый тон		Аксально-крутильные колебания		Внутрипакетные крутильные колебания		
	первый тон	второй тон	изгибные колебания, первый тон		с одним улом	с двумя узлами	первый тон	второй тон	третий тон
1	600	2890	2290—2480	810	1340	3180—4070	3910—4400	—	—
2	540	2450—2500	1710—2220	870	1820	2640—3860	3740—4500	—	—
3	337—358	1420	1150—1240	640—684	1680—1720	1840—2400	—	—	—
4	306	1410	1140—1190	620	850	1780—2390	3240—3700	—	—
5	270—275	993	—	460—495	1250—1295	1455—1720	1500—1900	—	—
6	159—165	570—637	—	337—355	435	860—1070	840—975	2100—2600	—
7	112—115	388	—	254—263	297	710—810	—	940—1250	—

Примечание. Разброс частот различных форм тангенциальных и аксально-крутильных колебаний объясняется техническими отклонениями при изготовлении и сборке лопаток. Различия в частотах внутрипакетных изгибных и крутильных колебаний связано с наличием нескольких близких форм, отличающихся числом пересечений знака по длине пакета



Рис. II.69. Кемпбелл-машина с подготовленным к испытаниям облопаченным диском

Возбуждение колебаний чаще осуществляется с помощью струи пара, но могут быть использованы и электромагниты, а при испытаниях коротких жестких лопаток, например лопаток регулирующей ступени — даже струя воды [234]. В Кемпбелл-машине могут определяться собственные частоты лопаток различных ступеней, но главным образом подобные установки используются для определения собственных частот лопаток цилиндров низкого давления с различными по конструкции связями. Результаты испытаний оформляются в виде частотных диаграмм (так называемых Кемпбелл-диаграмм), на которых указывается зависимость динамических частот различных групп форм колебаний облопачивания от числа оборотов.

Испытания в Кемпбелл-машине дают возможность определить не только собственные частоты, но также и значения механического декремента, включающего все виды рассеяния энергии (в материале, хвосте, а также в зоне контакта лопаток и соединяющих их связей), за исключением аэродемпфирования. Естественно, однако, что уровень динамических напряжений при испытаниях зависит от использованного источника возбуждения колебаний и не имеет ничего общего

с уровнем напряжений в работающей турбине. Для возбуждения колебаний обычно используется неподвижная в пространстве сила, т. е. такой источник возмущения, для которого остаются справедливыми те же соотношения относительно пакетного множителя, что и при действии возмущающих сил, вызванных неизменной во времени неравномерностью параметров потока по окружности колеса. Поэтому на основании испытаний в Кемпбелл-машине может быть оценена, например, эффективность установки замкнутых на круг связей, обеспечивающих обращение в нуль пакетного множителя для всех форм синфазных колебаний и большинства форм внутрисекетных колебаний лопаток. В качестве иллюстрации на рис. II.70) приведены результаты испытаний пакетов лопаток с учетом разброса их частот, а на рис. II.71 — результаты испытаний облопаченного диска последней ступени

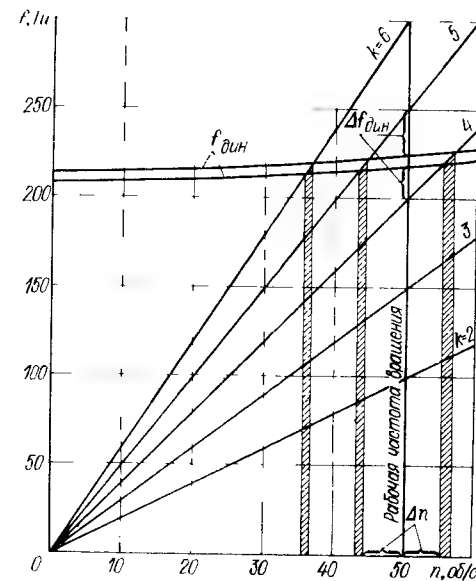


Рис. II.70. Кемпбелл-диаграмма испытаний пакетов лопаток

мощной паровой турбины. Возбуждение колебаний осуществляется неподвижной в пространстве силой — струей пара, подводимой к вершинам лопаток. На рисунках изображены лучи ($k = 2 \div 10$), определяющие изменение частот различных гармоник возмущающих сил. Пересечение этих лучей с кривыми динамиче-

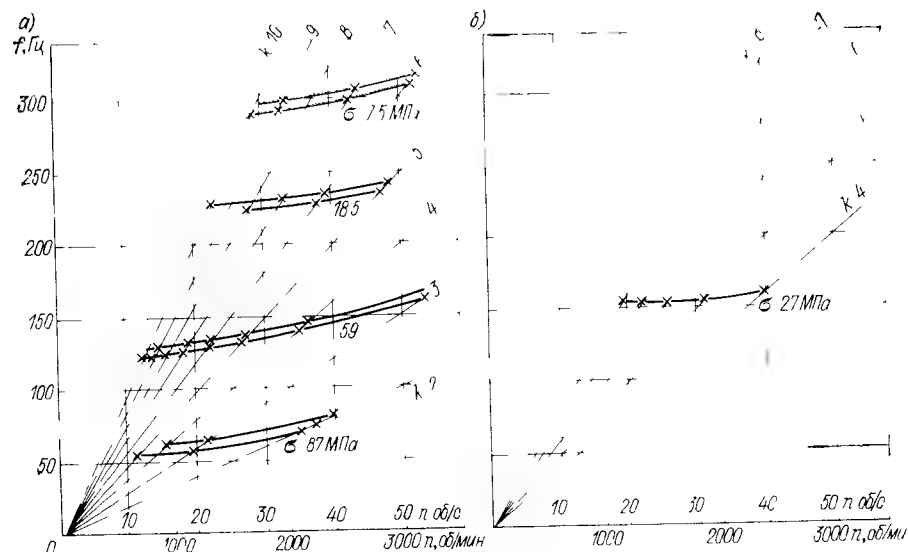


Рис 11.71 Кемпбелл диаграмма испытания облопаченного диска с отдельными лопатками при $D_{ср}/l = 2.77$ (а) и с лопатками, соединенными двумя демпферными проволоками (б)

ских частот лопаток определяет критические скорости вращения, при которых для используемого возбуждения возникает явление резонанса.

Как следует из сопоставления рис 11.71, а и б установка замкнутых на крут связей ликвидирует все синфазные колебания то лопаток и внутривибрационные колебания, при которых число узлов диаметров не совпадает с кратностью колебаний. На рис 11.70 и 11.71, а показан определенный диапазон частот, соответствующий каждой из собственных форм отдельных лопаток и пакетов лопаток. Наличие диапазона частот объясняется технологическими отклонениями при изготовлении и сборке лопаток. На рис 11.70 отмечены минимальные запасы по динамическим частотам $\Delta f_{дин}$ $|f_{дин} - kn|$ и критическим частотам вращения, составляющим Δn $|n_{кр} - n|$.

Для ступеней цилиндров высокого и среднего давления также могут быть построены Кемпбелл-диаграммы на основании испытания пакетов лопаток на оправках и роторе. На рис 11.72 показана Кемпбелл диаграмма, построенная на основании результатов испытаний, приведенных в табл 11.11 для пакета 1. Кривые 1—4

на рис 11.72 соответствуют отстраиваемым формам колебаний первому тону тангенциальных колебаний, первому тону внутривибрационных изгибных колебаний, второму тону тангенциальных колебаний и первому тону внутривибрационных крутильных колебаний. Учитывая малое влияние центробежных сил на собственные частоты относительно коротких тонок, динамические частоты в данном случае могут считаться примерно равными статическим, а поправка вводится только на изменение модуля упругости при рабочей температуре. Как следует из табл 11.11, значительные трудности могут возникнуть, например, при отстройке внутривибрационных крутильных колебаний из-за относительно широкого диапазона частот, соответствующих этой группе собственных форм. Помимо резонансных колебаний, опасность которых при правильно проведенной настройке может быть резко уменьшена, возможно возникновение автоколебаний и срывных колебаний главным образом в лопатках последних ступеней цилиндра низкого давления.

При уменьшении нагрузки турбины давление за регулирующей ступенью (или за клапанами при дроссельном парораспределении) падает, в результате чего объемный расход через промежуточные ступени изменяется сравнительно мало и, следовательно, слабо изменяется обтекание рабочих тонок этих ступеней. Так как одновременно происходит уменьшение плотности пара, то в соответствии с данными п 1.4, можно ожидать снижения уровня динамических напряжений в рабочих лопатках промежуточных ступеней при частичных нагрузках.

Иначе обстоит дело в последних ступенях цилиндра низкого давления, поскольку уменьшение нагрузки сравнительно слабо сказывается на давлении в конденсаторе, и поэтому уменьшение массового расхода пара через турбину сопровождается в данном случае почти таким же уменьшением объемного расхода. В резуль-

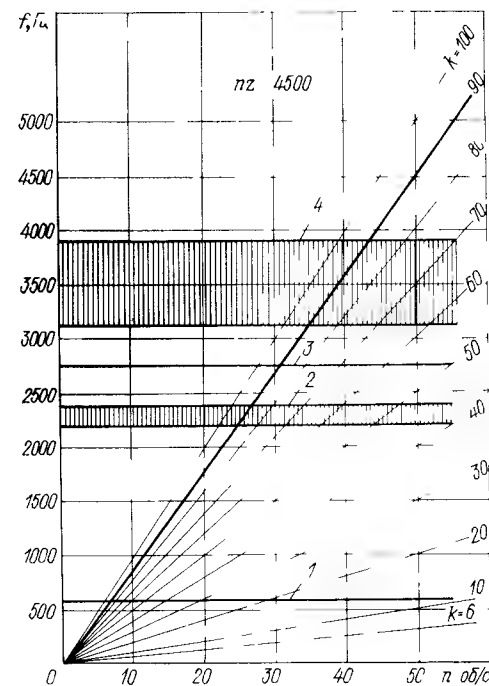


Рис 11.72 Кемпбелл-диаграмма пакета лопаток, построенная на основании результатов испытаний на оправке

тате при частичных нагрузках происходит перераспределение расхода пара по сечениям, уменьшение, а затем и полное прекращение расхода пара через корневые сечения лопаток последней ступени [99, 212]. При дальнейшем уменьшении объемного расхода зона корневого отрыва охватывает все большую часть лопатки, к. п. д. последней ступени существенно уменьшается, а затем эта ступень вообще перестает вырабатывать полезную мощность, а наоборот, отнимает ее от других ступеней. Такое неблагоприятное изменение режима обтекания рабочих, а затем и направляющих лопаток последней ступени приводит к появлению значительных пульсаций потока, возможности появления срывных колебаний и автоколебаний рабочих лопаток. Естественно, что исследования, проводимые при вибрационной нагрузке, не могут определить ни возможности появления подобных колебаний, ни уровни динамических напряжений при них.

Возможность возникновения автоколебаний оценивается на основании результатов специальных расчетов [132] и испытаний в аэродинамических трубах [163, 230], однако наиболее достоверные результаты могут быть получены только с помощью тензометрических испытаний лопаток в натурных или модельных экспериментальных турбинах при различных объемных пропусках пара. Как правило оказывается, что уровень динамических напряжений в лопатках при срывных колебаниях, возникающих при малых объемных расходах, возрастает при повышении давления в конденсаторе. Так как колебания подобного типа не кратны рабочей частоте вращения, то их отстройка, естественно, не может быть осуществлена.

В качестве нагрузки для экспериментальных модельных или натурных турбин обычно используются гидротормозы, что позволяет определять зависимость динамических напряжений в лопатках от расхода пара в широком диапазоне частот вращения. За счет изменения частоты вращения при испытаниях удается моделировать влияние как возможного изменения частоты сети, так и вызванного технологическими причинами некоторого различия в собственных частотах лопаток и облопаченных дисков однотипных турбин. Весьма желательно, чтобы при испытаниях в экспериментальных турбинах имела возможность изменять расход пара, по крайней мере, в тех же пределах, что и в условиях эксплуатации¹. Для выполнения последнего требования может быть использован посторонний источник энергии, например электродвигатель постоянного тока, вспомогательная турбина или генератор, работающий в режиме синхронного двигателя.

Помимо проверки возможности возникновения срывных колебаний или автоколебаний испытания в модельных и натурных тур-

бинах позволяют оценить зависимость уровня резонансных напряжений от нагрузки при неотстраиваемых собственных формах колебаний при рабочей частоте вращения, а также напряжения в лопатках при пусках и остановках турбины. Результаты испытаний в экспериментальных турбинах показывают, что уровень динамических напряжений в лопатках отработанных последних ступеней цилиндра низкого давления может быть весьма незначительным как при пусках, так и при различных нагрузках при номинальной частоте вращения [147].

Для обеспечения вибрационной надежности облопачивания весьма ценной является информация, получаемая при тензометрических испытаниях лопаток в условиях эксплуатации. Одна из возможных методик проведения подобных испытаний описана в [201], где приведены также результаты испытаний лопаток турбины мощностью 50 МВт. В работе [148] приведены результаты испытаний лопаток цилиндра низкого давления турбины мощностью 300 МВт, свидетельствующие о весьма низком уровне динамических напряжений в лопатках в обследованном диапазоне нагрузок, а также при пуске турбины, в процессе которого лопатки проходили через резонанс с третьей кратностью.

Основным методом вибрационных испытаний лопаток в эксплуатационных условиях является тензометрический, сходный с тем, который применяется при описанных выше испытаниях в Кемпбелл-машине. Отличие заключается главным образом в необходимости более тщательной защиты тензорезисторов от влаги, существенно ограничивающей срок их службы. Меньшее распространение в стационарном турбостроении получил так называемый дискретно-фазовый метод [66], основанный на измерении временных интервалов между моментами прохождения лопаток мимо импульсных датчиков, устанавливаемых неподвижно в корпусе турбины. Дискретно-фазовый метод обладает значительными преимуществами, заключающимися в возможности измерения амплитуд всех лопаток ступени, практической неограниченности времени работы импульсных датчиков и легкости препарировки. Однако дискретно-фазовый метод обладает и существенными недостатками, ограничивающими его применение в стационарном турбостроении: значительные трудности возникают при необходимости определения резонансных напряжений в лопатках после синхронизации турбины, чувствительность метода может оказаться недостаточной для определения динамических напряжений с частотой $n\omega$; затруднено размещение неподвижных импульсных датчиков при определении амплитуд колебаний лопаток, соединенных клепаными бандажами или бандажными полками. Тем не менее, полезная информация с помощью дискретно-фазового метода может быть получена относительно области возникновения и уровня напряжений при срывных колебаниях, которые могут иметь место в последних ступенях на малых нагрузках или холостом ходу.

¹ Обычно при работе с гидротормозом расход пара через экспериментальные турбины при холостом ходе превышает расход пара при холостом ходе в эксплуатационных условиях.

Большое значение для обеспечения вибрационной надежности имеет повышение усталостной прочности лопаток (см. п. II.10). Если не принимать специальных мер по уменьшению концентрации напряжений, то к поломкам в некоторых случаях могут привести и достаточно сложные, обычно не устраняемые собственные формы: например, при отсутствии утолщения в сечении, ослабленном отверстием под демпферную проволоку, имели место случаи усталостного разрушения лопаток с частотой первого тона около 150 Гц под действием импульсов от кромок сопл с частотой 2400 Гц; в [201] описан случай излома концов лопаток, частота первого тона которых составляла 112—118 Гц, под действием импульсов от кромок сопл с частотой 1800 Гц; в [229] отмечается поломка шипов лопаток при колебаниях со сложными неотстраиваемыми формами с 12—14-й кратностями и т. д. Понятна поэтому важность работ по повышению усталостной прочности материала и особенно конструктивной усталостной прочности лопаток.

При отработке лопаточного аппарата новых турбин большое внимание уделяется также снижению возмущающих сил (см. п. I.4), увеличению демпфирующих сил (см. п. II.6) и назначению режимов пуска и эксплуатации турбин, безопасных для динамической прочности лопаток.

Проведение указанного выше комплекса мероприятий позволяет существенно повысить надежность работы лопаточного аппарата стационарных паровых турбин.

II.13. ПРИЧИНЫ ПОВРЕЖДЕНИЙ И ОПЫТ ЭКСПЛУАТАЦИИ ЛОПАТОЧНОГО АППАРАТА ПАРОВЫХ ТУРБИН

Несмотря на все более широкое применение уточненных методов прочностных и вибрационных расчетов лопаточного аппарата с использованием ЭВМ, увеличение объема экспериментальных исследований, повышение механических свойств применяемых материалов и качества изготовления рабочих лопаток случаи их повреждения продолжают иметь место и значительно снижают эксплуатационную надежность турбоагрегатов в целом. Так, например, по данным работы [226], повреждения лопаточного аппарата паровых турбин ФРГ в 1967—1969 гг. составили 25—30% от общего числа повреждений, а в стоимостном выражении около 50%. Учитывая чрезвычайно важное значение надежности лопаточного аппарата и тяжелые последствия, к которым приводят его повреждения, необходимо тщательно изучать причины этих повреждений и учитывать предшествующий опыт при проектировании и эксплуатации. Причины повреждений рабочих лопаток можно разделить на три основные группы, обусловленные:

- 1) недостатками проектирования;
- 2) недостаточным качеством изготовления и монтажа;
- 3) отклонениями от нормальных режимов эксплуатации.

Естественно, в некоторых случаях повреждения лопаточного аппарата могут быть связаны одновременно с несколькими указанными выше причинами. Рассмотрим названные группы причин подробнее.

Недостатки проектирования. Одной из главных причин, вызывающих недостатки проектирования, является отсутствие возможности во многих случаях предварительной экспериментальной отработки лопаточного аппарата в натурных условиях до изготовления турбины.

Вибрационная отстройка в объеме, указанном в п. II.12, при использовании современных экспериментальных и расчетных методов может быть осуществлена практически всегда. Однако выполнение требований вибрационной настройки еще не гарантирует безаварийной работы лопаточного аппарата. Действительно, в некоторых случаях с увеличением единичной мощности турбин опасными могут оказаться обычно неотстраиваемые высокочастотные собственные формы, не приводившие к поломкам в турбинах меньшей мощности. Безусловно, относительная опасность таких форм не может быть выяснена на основании результатов вибрационной настройки, а требует проведения испытаний в экспериментальных турбинах или в условиях эксплуатации. Подобных же испытаний требует и выяснение опасности срывных колебаний при малых объемных расходах пара.

К недостаткам проектирования следует отнести несогласованность инструкций по пуску и обслуживанию турбины с характером работы лопаточного аппарата. Так, например, при разработке режимов пуска турбины назначается кратковременная ее работа на промежуточных скоростях вращения, необходимая для прогрева роторов и корпусных деталей, а также для проведения контрольных операций. Как указывалось выше, лопатки или облопаченные диски последних ступеней имеют целый спектр критических скоростей вращения, предшествующих рабочей. В таком случае, если этот частотный спектр не будет учтен при разработке режима пуска, то скорости, выбранные для прогрева турбины, могут оказаться критическими для облопачивания той или иной ступени. Работа турбины на таких скоростях в некоторых случаях может привести к возникновению в лопатках значительных динамических напряжений, которые уже через относительно небольшое число пусков могут вызвать появление усталостных трещин.

Большое значение имеет выбор режима пуска и для исключения осевых и радиальных задеваний, приводящих к механическому и усталостному повреждению облопачивания. Неравномерный прогрев статора или ротора при пусках может привести к радиальным задеваниям и далее к срыву бандажей и последующей работе отдельных несвязанных в пакеты лопаток. Если частотные характеристики отдельных лопаток окажутся неудовлетворительными, а уровень динамических напряжений достаточно высоким, то че-

через определенное время могут возникнуть усталостные трещины и разрушения отдельных лопаток.

Радиальные и осевые задевания могут иметь место, если инструкциями не будут предусмотрены отдельные режимы работы турбины, возможные при ее эксплуатации. Важное значение имеет также правильное назначение величины расчетных зазоров с учетом различных переменных режимов.

К этой же группе причин следует отнести и дефекты в работе системы регулирования, если последняя не обеспечивает исключения в условиях эксплуатации опасного для прочности лопаток и дисков заброса оборотов ротора турбины.

Недостатки изготовления и монтажа. Наиболее распространенными недостатками при изготовлении деталей облопачивания являются отступления от чертежных размеров, а также невыполнение требований технологического процесса, влекущее за собой снижение конструктивной усталостной прочности рабочих лопаток (см. п. II.10). Некачественное изготовление рабочих лопаток с отступлениями от чертежных размеров приводит к повышенному разбросу частот отдельных лопаток на колесе, а некачественная сборка лопаток в диске, установка демпферных и паяных проволок и бандажей приводит к изменению собственных частот облопаченных дисков, а следовательно, и к уменьшению запасов, принятых при их вибрационной настройке.

Возможными причинами повреждения облопачивания могут явиться технологические отклонения, допущенные при изготовлении диафрагм, приводящие к возрастанию амплитуд возмущающих сил (см. п. I.4).

Важное значение имеют отступления в свойствах применяемых материалов. Отклонения механических свойств от требований технических условий приводят к изменению расчетных запасов статической и динамической прочности, возможному повышению склонности к хрупкому разрушению и т. д. Снижение эксплуатационной надежности связано также с наличием в заготовках дефектов металлургического характера (см. п. I.3).

К недостаткам сборки и монтажа относится неправильная установка радиальных и осевых зазоров в проточной части турбины, некачественная сборка деталей статора, приводящая к механическим повреждениям облопачивания.

Отклонения от нормальных режимов эксплуатации. Отклонения от нормальных режимов эксплуатации турбины могут привести к усталостным и механическим повреждениям рабочих лопаток. Поскольку усталостные разрушения могут произойти через определенный, иногда довольно значительный, промежуток времени после имевшего место отклонения в условиях эксплуатации, то связь между ними остается неясной для обслуживающего персонала и опасные для лопаток отклонения в режимах могут повторяться. В связи с этим рассмотрим более подробно отклонения, которые могут вызвать повреждения и разрушения лопаток.

Отклонения в частоте сети. Аварийные ситуации в энергетической системе часто приводят к изменению частоты сети на время, которое необходимо для срабатывания аварийных защит. Изменение частоты сети в сторону снижения происходит также при дефиците мощности в энергосистеме. В этих случаях при отклонениях частоты сети от номинальной турбоагрегат будет работать в течение некоторого времени при пониженной или повышенной скорости вращения. В п. II.12 указывалось, что при вибрационной настройке обеспечиваются достаточные запасы между критическими и рабочими частотами вращения для отстраиваемых собственных форм. Естественно, что изменение частоты сети приводит к уменьшению этих запасов, а возможно и к совпадению измененной рабочей скорости вращения с критическими. Это прежде всего относится к лопаткам последних ступеней, которые отстраиваются от резонансов с частотой возмущающих сил, кратных частоте вращения.

Уровень динамических напряжений в лопатках при резонансе возрастает в десятки раз, а частоты колебаний столь велики, что опасной может оказаться и сравнительно кратковременная работа в условиях резонанса. Например, при колебаниях с частотой 200 Гц лопатка совершит 10^7 циклов за время менее, чем 15 ч, а при колебаниях с частотой 3000 Гц — менее, чем за 1 ч. Если уровень переменных напряжений превосходит допустимый, то разрушение может произойти при значительно меньшем числе циклов, чем 10^7 . Так, в работе [216] на основании оценок возмущающих и демпфирующих сил для конкретной турбины указывается, что поломка лопаток при изменении частоты сети на 3% может произойти всего через 10–15 мин, а при изменении частоты сети на 4% — даже через 1 мин. При работе с пониженной или повышенной частотой сети лопатка может и не разрушиться, однако, если при этом возникнет усталостная трещина, то разрушение ее в дальнейшем произойдет при нормальных условиях эксплуатации.

Нарушение пусковых инструкций. Нарушение пусковых инструкций может быть связано с отступлениями от заданного графика набора оборотов при пуске турбины и кратковременной работой ее на запрещенных оборотах при прогреве. Как указывалось выше, эти обороты могут быть критическими для рабочих лопаток. В отличие от критических частот вращения валопровода, кратковременная работа на скоростях, являющихся критическими для лопаток, не приведет к изменению уровня вибрации турбоагрегата и не будет воспринята эксплуатационным персоналом как опасная. Тем не менее, работа на этих скоростях может быть опасной для рабочих лопаток, особенно для лопаток последних ступеней.

Отступление от инструкций по поддержанию теплового состояния турбины может привести к различиям в температуре лопаток и ротора и вызвать изменение плотности сборки лопаток, а следовательно, изменение и их частот. Кроме того, неравномерный

прогрев турбины может привести к короблению корпуса, искривлению ротора и к выборке зазоров в проточной части с последующими механическими повреждениями, которые в ряде случаев приводят к усталостным поломкам рабочих лопаток, о чем упоминалось выше. Заметим, что при вскрытии турбины во время аварийного или планового ремонта указать сразу на первопричину поломки, которой является радиальное или осевое задевание, удается не всегда и причину поломки часто ошибочно связывают с неудовлетворительной вибрационной настройкой той или иной ступени.

Отклонения в режиме работы. Для лопаток последних ступеней цилиндра низкого давления особенно опасными могут быть режимы малых нагрузок и холостого хода при повышенном давлении в конденсаторе. В п. II.12 отмечалось, что при этих условиях возможно появление срывных колебаний лопаток последних ступеней, отстройка от которых, естественно, оказывается невозможной. В [216] отмечается, что повышение противодействия в конденсаторе вызвало поломки лопаток последних ступеней нескольких турбин. В связи с этим для рассматриваемых в [216] турбин указывается, что противодействие не должно превышать 0,0173 МПа, а при малых нагрузках — даже 0,014 МПа, причем давление следует замерять в патрубке вблизи лопаток, а не в конденсаторе.

Максимальное давление в конденсаторе указывается в инструкциях по эксплуатации турбины и не должно превышать этот уровень из-за снижения вибрационной надежности лопаток последних ступеней. По этой же причине не рекомендуется срывать вакуум при оборотах, превышающих 2/3 от номинальных, причем особенно опасным может оказаться срыв вакуума при оборотах, больших номинальных. Срыв вакуума при оборотах, больших номинальных, допускается только в аварийных ситуациях, например при неисправности масляной системы [216]. К возникновению срывных колебаний может привести и работа турбины в моторном режиме, в связи с чем применению подобного режима должно предшествовать определение уровня динамических напряжений в лопатках.

Дополнительным фактором, который ухудшает условия работы лопаток на малых нагрузках, является чрезмерный разогрев лопаток последних ступеней из-за потерь на трение и вентиляцию. Для предотвращения перегрева лопаток используют впрыск пара и воды через специальную систему охлаждения в выхлопном патрубке. Впрыск воды предотвращает перегрев лопаток, но усиливает эрозию выходных кромок из-за того, что пароводяная смесь из патрубка засасывается в межлопаточные каналы корневых сечений лопаток. Эрозия выходных кромок, как отмечалось в п. II.10, приводит к существенному снижению уровня допустимых переменных напряжений в лопатках и уменьшает их эксплуатационную надежность.

Отклонения начальных параметров пара. Повышение начального давления и температуры пара может оказаться опасным для прочности лопаток первых ступеней турбины, однако, как правило, такие отклонения на практике встречаются редко и они невелики. Относительно часто имеет место снижение начальной температуры пара или температуры пара после промперегрева. В этом случае возрастает влажность пара в последних ступенях, что увеличивает эрозию входных кромок и тем самым снижает усталостную прочность лопаток. Кроме того, эрозионное разрушение лопаток в определенной мере может привести к изменению их собственных частот и уменьшению запасов между критическими и рабочими частотами вращения.

Отклонение в режиме водоподготовки. В п. II.10 указывалось на возможность существенного снижения усталостной прочности лопаток при наличии в паре различных вредных примесей. Особенно сильно могут снижать усталостную прочность лопаток хлориды, соединения натрия и сульфиды, попадающие в проточную часть с недостаточно очищенной питательной водой, а также вместе с циркуляционной водой, проникающей в конденсат из поврежденных или плохо уплотненных конденсаторных трубок. С недостатками в режиме водоподготовки связано и отложение солей на лопатках и бандажах, которое может усилить коррозию, а также привести к некоторому изменению собственных частот и уменьшению конструкционного демпфирования. Последнее связано с изменением характера заделки лопаток в диске и соединения их со связями, а также с определенным изменением массы бандажа.

Стояночная коррозия. Одной из причин снижения усталостной прочности лопаток может явиться так называемая стояночная коррозия. Если турбина не блочная, а связана с общей паровой магистралью, то при наличии неплотностей в запорной арматуре пар может поступать в остановленную турбину, конденсироваться в ней и вызывать интенсивную коррозию лопаток и дисков. В [226] описан случай настолько сильного коррозионного повреждения ротора турбины мощностью 3,8 МВт за шесть месяцев стоянки, которое сделало ротор полностью непригодным к дальнейшей эксплуатации. Даже менее интенсивное коррозионное повреждение лопаток может, однако, сопровождаться столь значительным снижением их усталостной прочности, которое при дальнейшей эксплуатации приведет к вибрационному разрушению лопаток.

Абразивный износ лопаток. Этот вид повреждений характерен для лопаток первых ступеней цилиндров высокого и среднего давления и особенно лопаток регулирующих ступеней (см. п. II.10). Причиной абразивного износа является наличие в паре мелкодисперсных абразивных частиц, основным источником которых является окалинообразование на внутренних поверхностях труб пароперегревателей котлов [126]. Интенсивность абразивного

износа зависит от концентрации частиц в паре и скорости потока, т. е. связана с режимом работы турбины, резко увеличиваясь при частичных нагрузках.

Абразивный износ существенно снижает прочность лопаток как за счет изменения их собственных частот, так и за счет снижения конструктивной усталостной прочности. Снижение усталостной прочности связано с увеличением статических напряжений из-за утонения корневых сечений лопаток и появления дополнительных изгибающих напряжений, а также с существенным увеличением концентрации напряжений из-за сквозных промывов кромок лопаток. Известны случаи усталостного разрушения лопаток регулирующей ступени, которые предварительно подвергались сильному абразивному износу.

Попадание в проточную часть воды или пароводяной смеси. Весьма часто повреждения рабочих лопаток связаны с попаданием в проточную часть турбины воды или пароводяной смеси. Вода или пароводяная смесь могут попасть в турбину из подогревателей при повреждении трубных пучков; из подогревателей контактного типа при их неисправности; из трубопроводов отбора или из трубопроводов свежего пара во время пусков турбины при неисправности обратных клапанов и дренажей.

Попадание в проточную часть пароводяной смеси из отборов происходит не по всей окружности и если количество ее невелико, то это приводит к увеличению амплитуд действующих на рабочие лопатки возмущающих сил и к повышению в них динамических напряжений. Кроме того, в этом случае резко повышается интенсивность эрозийного износа лопаток, что снижает их усталостную прочность. Попадание большого количества воды или пароводяной смеси вызывает разрушение рабочих лопаток, часто сопровождающееся повреждением других элементов турбины.

К тяжелым последствиям приводит попадание воды на лопатки последних ступеней. Появляющиеся при этом чрезвычайно большие несбалансированные центробежные силы могут вызвать практически полное разрушение турбоагрегата.

Естественно, что рассмотренный перечень не является исчерпывающим, однако следует помнить, что все указанные выше факторы в той или иной степени снижают надежность лопаточного аппарата и турбоагрегата в целом. Необходимо иметь в виду, что даже при нормальном режиме эксплуатации имеется ряд факторов, способствующих повышению уровня динамических напряжений в лопатках, с одной стороны, и снижению их конструктивного предела выносливости — с другой. В п. I.4 указывалось, что амплитуды возмущающих сил связаны с величиной потерь в направляющих лопатках, а последние, в свою очередь, с шероховатостью поверхности этих лопаток. В процессе эксплуатации происходит повышение шероховатости поверхности направляющих лопаток и, следовательно, увеличение амплитуд возмущающих сил. Кроме того, в процессе эксплуатации может произойти и некоторое сни-

жение конструкционного демпфирования (см. п. II.6), вызванное уменьшением рассеяния энергии и т. д. Усталостная прочность рабочих лопаток снижается с повышением шероховатости поверхности, эрозии, коррозии и т. д. (см. п. II.10). Таким образом, даже при нормальных эксплуатационных условиях может произойти как возрастание динамических напряжений, так и снижение конструктивной усталостной прочности лопаток, что в конечном итоге приводит к снижению вибрационной надежности облоачивания. Поэтому следует всячески избегать отступлений от нормальных условий эксплуатации, приводящих к дополнительному увеличению уровня переменных напряжений или снижению усталостной прочности лопаток.

Условия работы лопаточного аппарата существенно усложняются из-за необходимости выполнения требований, предъявляемых развитием энергетики. Основные тенденции в развитии энергетики заключаются в следующем:

- 1) увеличение единичной мощности турбин и особенно увеличение массового расхода пара из-за снижения начальных параметров во влажнопаровых турбинах;
- 2) повышение требований к маневренности;
- 3) разуплотнение графика нагрузки;
- 4) ухудшение вакуума;
- 5) увеличение межремонтного периода.

Необходимость выполнения сформулированных выше условий существенно усложняет работу лопаточного аппарата турбин и не позволяет, несмотря на значительно более высокий уровень экспериментальных и расчетных исследований, добиться полного исключения повреждений рабочих лопаток. Особенно сильно усложняются условия работы лопаток последних ступеней цилиндра низкого давления. Возрастание расхода пара при ограничении числа цилиндров вызывает увеличение длины лопаток последних ступеней и уменьшение отношения D_{cr}/l (см. п. I.1). Возрастание теплоперепада, срабатываемого на последней ступени, делает лопатки более чувствительными к отклонениям в величине объемного расхода и более подверженными срывным колебаниям. Последнее обстоятельство, наряду с ухудшением вакуума, может привести к возрастанию уровня напряжений при срывных колебаниях. В связи с этим надежность работы лопаток последних ступеней все в большей степени определяется именно нерасчетными режимами эксплуатации. Учитывая сказанное выше, становится понятным, почему создание лопатки последней ступени цилиндра низкого давления до настоящего времени остается очень сложной задачей, несмотря на то, что вибрационная настройка при современном уровне экспериментальных и расчетных исследований, как правило, может быть обеспечена.

Необходимо иметь в виду, что отступления от расчетного режима работы лопаток последних ступеней могут привести к их усталостным поломкам, независимо от величины запасов между

критическими и рабочими частотами вращения, т. е. независимо от качества вибрационной настройки. В связи с этим, для работы при малых нагрузках и ухудшенном вакууме, может оказаться необходимым проектирование специальных лопаток, даже если до этого имел место длительный положительный опыт эксплуатации лопаток такой же длины при расчетных режимах. Например, в [219] приводится конструкция лопатки длиной 711 мм на 3600 об/мин, предназначенной для работы при противодавлении до 0,05 МПа. По сравнению с ранее применявшейся лопаткой подобной длины площадь корневого сечения вновь спроектированной лопатки была увеличена в 1,75 раза, а число рабочих лопаток уменьшено со 120 до 84. При создании лопатки была проведена не только вибрационная настройка, но и учтена опасность возникновения срывных и автоколебаний.

При использовании ранее выпущенных турбин для покрытия пиковых нагрузок в условиях повышенного противодавления может даже оказаться целесообразной работа без лопаток последней ступени цилиндра низкого давления. Это объясняется тем, что при частых пусках и остановках в условиях повышенного противодавления уровень напряжений при срывных колебаниях может оказаться опасным для усталостной прочности лопаток и через сравнительно небольшое число часов работы возникнут поломки лопаток несмотря на то, что ранее подобные лопатки могли успешно эксплуатироваться на протяжении десятков тысяч часов.

Весьма желательным является увеличение межремонтного периода. Необходимо, однако, учитывать, что по данным работы [226] примерно 40-50% повреждений лопаток обнаруживается при плановых ревизиях. Поэтому ясно, что увеличение срока межремонтного периода может привести к дальнейшему развитию повреждений, которые ранее обнаруживались при плановых ремонтах, и к необходимости возможных аварийных остановов турбины в период, когда потребность в электроэнергии наиболее велика. В [226] указывалось также, что среднее число часов до поломки рабочих лопаток паровых турбин весьма велико, что открывает путь к увеличению срока межремонтного периода при условии использования при эксплуатации паровых турбин методом технической диагностики — науки о распознавании состояния технической системы с целью раннего обнаружения дефектов и неисправностей в процессе технического обслуживания [14]. Для суждения о состоянии лопаточного аппарата весьма важным является анализ данных по вибрации турбины и ее акустическому излучению. Имеют значение не только параметры, замеренные в данный момент, но и их изменение во времени. Эффективным средством предотвращения вибрационных поломок лопаток являются визуальные наблюдения с помощью оптических трубок (бороскопов, эндоскопов), позволяющих обнаруживать усталостные трещины в лопатках на невращающемся роторе без вскрытия турбины [14, 184]. Отмечается, например, случай обнаружения

усталостных трещин на лопатках предпоследней ступени турбины мощностью 300 ВМт при осмотре лопаток в закрытой турбине с помощью гибких эндоскопов, изготовленных с использованием световодов на основе волоконной оптики [184].

Полезная информация может быть получена при сравнении опыта эксплуатации однотипных турбин на различных электростанциях. Анализ подобных данных может способствовать выявлению отклонений в условиях эксплуатации, приводящих к повреждению лопаточного аппарата.

Из сказанного ясно, что повышение надежности работы лопаточного аппарата может быть обеспечено только при одновременном повышении качества проектирования, изготовления и эксплуатации паровых турбин. Повышение качества эксплуатации может быть достигнуто только при более ясном понимании особенностей работы лопаток, особенно на нерасчетных режимах.

Существенным резервом повышения надежности работы турбины является внедрение на электростанциях автоматизированной системы пуска и нагружения, сводящей к минимуму термические напряжения в деталях статора и ротора, исключаяющей опасность задеваний в проточной части, повышающей вибрационную надежность лопаточного аппарата и маневренность турбины в целом.

Ниже будут рассмотрены вопросы статической (часть II) и динамической (часть III) прочности лопаток и дисков и получено обоснование ряда приведенных в части I результатов.

Часть вторая

РАСЧЕТ РАБОЧИХ ЛОПАТОК И ДИСКОВ НА ПРОЧНОСТЬ

При расчете рабочих лопаток на прочность будем предполагать следующее.

1. Размеры поперечных сечений лопатки малы по сравнению с ее длиной, а максимальная толщина сечения b к длине лопатки l и толщине сечения c к хорде малы по сравнению с единицей $b/l \ll 1$, $c/b \ll 1$.

2. Центры тяжести сечений и центры изгиба совпадают и расположены на линии, мало отличающейся от радиальной прямой. Эту линию будем называть осью лопатки (осевой линией).

3. Лопатки в общем случае имеют переменное сечение с непрерывным законом изменения угла закрутки по высоте.

С учетом этих предположений лопатку можно рассматривать как тонкий, естественно закрученный стержень, падающий под действием центробежных сил и паровых усилий.

Как уже указывалось выше, при выборе расчетной схемы будем подразделять лопатки на «жесткие» и «гибкие». Для жестких лопаток примем, что упругие прогибы и углы поворота сечений малы и не изменяют геометрическую форму ее осевой линии. В этом случае напряжения в лопатке от действия центробежных сил и паровых усилий можно определять раздельно. Для расчета жестких лопаток практически достаточную точность дает теория прямых стержней (теория балок) [170]. Расчеты показывают, что к жестким могут быть отнесены лопатки большинства ступеней паровой турбины, а именно: все лопатки ступеней высокого и среднего давлений и лопатки первых ступеней низкого давления. Для гибких лопаток упругие прогибы и углы поворота сечений, приводящие к существенному изменению формы осевой линии и изменению закрученности профиля, нельзя считать малыми. В этом случае необходимо учитывать совместное действие центробежных сил и паровых усилий. При этом теория прямых стержней не позволяет выявить все особенности напряженного состояния естественно закрученной лопатки и для расчета необходимо использовать техническую теорию тонких закрученных стержней [128, 135, 176, 206, 208]. Как показывают расчеты, к гибким

должны быть отнесены рабочие лопатки последних ступеней, имеющие большую длину.

Наиболее полное представление о напряженно-деформированном состоянии рабочих лопаток и элементов ротора паровой турбины могут дать универсальные методы расчетов, такие, как метод конечных элементов [68, 146, 156], численные методы потенциала [37] и др. Применение этих методов позволяет отказаться от многих упрощающих расчетную схему предположений и решить задачу в наиболее полной постановке. Так, например, используя криволинейные конечные элементы, можно с достаточной точностью вычислять местные напряжения в зонах концентрации, учитывать объемность напряженного состояния и т. п. Однако численные методы остаются пока еще весьма трудоемкими и не всегда являются необходимыми для оценки прочности в процессе проектирования. Часто их достаточно применить только для выяснения справедливости тех или иных предположений, положенных в основу приближенных методов и для оценки точности этих методов.

Глава III

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ЖЕСТКИХ ЛОПАТОК

III.1. РАСЧЕТ НА РАСТЯЖЕНИЕ РАБОЧЕЙ ЧАСТИ ЛОПАТКИ

Рассмотрим лопатку переменного сечения, посаженную на диск и вращающуюся с угловой скоростью ω (рис. III.1).

Найдем центробежную силу, действующую в ее сечении на радиусе r . Центробежная сила элемента лопатки длиной dR на радиусе R

$$dC_{\text{ц}} = (\gamma \omega^2 / g) F(R) R dR,$$

где $F(R)$ — площадь сечения лопатки на радиусе R ; γ — удельный вес материала лопатки; g — ускорение свободного падения.

Центробежная сила, действующая в сечении на радиусе r , получится интегрированием этого выражения по R в пределах от r до R_1

$$C_{\text{ц}}(r) = \frac{\gamma \omega^2}{g} \int_r^{R_1} F(R) R dR, \quad (\text{III.1})$$

где R_1 — радиус периферийного сечения лопатки.

Учитывая, что $r = R_0 + z$, $R = R_0 + \tilde{z}$ и $R_1 = R_0 + l$, перейдем к относительной координате, положив:

$$z/l = \xi; \quad \tilde{z}/l = \rho,$$

где l — длина рабочей части лопатки; z и $\tilde{z}$ — расстояния от корневого сечения лопатки до сечений на радиусах r и R соответственно.

Тогда

$$C_{\pi}(\xi) = \frac{\gamma\omega^2}{g} l^2 \int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho. \quad (III.2)$$

Для лопаток переменного сечения кривая площадей $F(\rho)$ задается, как правило, таблично или графически. Тогда численным интегрированием можно вычислить центробежную силу $C_{\pi}(\xi)$ в любом сечении лопатки.

Помимо нагрузки от собственной массы сечения лопатки нагружены еще центробежными силами связей (проволоки, бандаж) и утолщений, которые выполняются в местах установки связей. Так, центробежная сила одного шага проволоки, очевидно, равна

$$C_{\pi} = (\gamma_{\pi}\omega^2 g) V_{\pi} R_{\pi} = (\gamma_{\pi}\omega^2 g) F_{\pi} t_{\pi} R_{\pi}, \quad (III.3)$$

где V_{π} — объем одного шага проволоки; F_{π} — площадь поперечного сечения проволоки; t_{π} — шаг проволоки; R_{π} — радиус центра тяжести проволоки; γ_{π} — удельный вес материала проволоки.

Аналогичную формулу можно записать и для бандажа.

Центробежную силу утолщения можно подсчитать по формуле

$$C_{y_1} = (\gamma\omega^2 g) V_{y_1} R_{y_1} = (\gamma\omega^2 g) F_{y_1} h_{y_1} R_{y_1}, \quad (III.3a)$$

где V_{y_1} — объем утолщения; F_{y_1} — площадь утолщения; h_{y_1} — высота утолщения; R_{y_1} — радиус центра тяжести утолщения.

Суммарная центробежная сила, действующая в поперечных сечениях лопатки,

$$C(\xi) = C_{\pi}(\xi) + \sum C_c$$

или в развернутом виде

$$C(\xi) = \frac{\gamma\omega^2}{g} l^2 \left\{ \int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \frac{V_c}{l} \right\}, \quad (III.4)$$

где C_c — центробежная сила одного шага связи и утолщения; $\rho_c = z_c/l$ — относительная координата сечения, в котором расположены связь или утолщение; γ_c — удельный вес материала связи; V_c — объем одного шага связи и утолщения.

В этой формуле сумма распространяется на все связи и утолщения, лежащие выше расчетного сечения. В частности, макси-

мальная центробежная сила, действующая в корневом сечении лопатки ($\xi = 0$),

$$C(0) = \frac{\gamma\omega^2}{g} l^2 \left\{ \int_0^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \frac{V_c}{l} \right\}. \quad (III.5)$$

Зная центробежные силы $C(\xi)$ в сечениях лопатки, легко построить кривую растягивающих напряжений

$$\sigma_{\rho} = C(\xi) F(\xi), \quad (III.6)$$

где $F(\xi)$ — площадь сечений лопатки в общем случае переменная по ее длине.

Указанный способ расчета, применимый для любой лопатки переменного сечения, не обладает наглядностью и не может служить для исследования качественных особенностей напряженного состояния лопатки.

Рассмотрим некоторые законы изменения площадей сечения по высоте лопатки, допускающие аналитическое решение. Тогда интегралы (III.2) для центробежных сил и напряжения (III.6) в сечениях могут быть вычислены без помощи численного интегрирования. Так как центробежные силы бандажа и проволок невелики по сравнению с центробежной силой самой лопатки, в целях упрощения будем рассматривать (для сравнения профилей) отдельную лопатку, не учитывая нагрузку от связей. Центробежная сила, действующая в корневом сечении лопатки, согласно (III.1)

$$C_{\pi}(0) = \frac{\gamma\omega^2}{g} \int_{R_0}^{R_1} R F(R) dR. \quad (III.7)$$

Лопатки постоянного сечения. Вынося F в формуле (III.7) как постоянную за знак интеграла, получим

$$C_{\pi}(0) = \frac{\gamma\omega^2}{g} F \int_{R_0}^{R_1} R dR = \frac{\gamma\omega^2}{g} F \frac{R_1^2 - R_0^2}{2},$$

но

$$(R_1^2 - R_0^2) \cdot 2 = (R_1 - R_0)(R_1 + R_0) = 2lR_{cp},$$

где R_{cp} — средний радиус ступени.

Выражение для центробежной силы лопатки примет вид

$$C_{\pi}(0) = (\gamma\omega^2 g) F l R_{cp}.$$

Тогда напряжения в корневом сечении

$$\sigma(0) = (\gamma\omega^2 g) l R_{cp}.$$

Преобразуем правую часть полученной формулы. Умножим и разделим ее на 2π

$$\sigma(0) = (\gamma\omega^2 2\pi g) 2\pi l R_{cp};$$

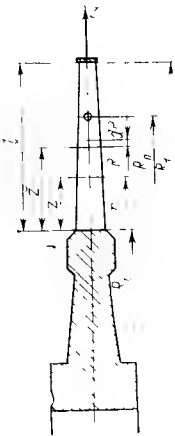


Рис. III.1. Эскиз диска с лопаткой

Таблица III.1

D_{cp}/l	Значения k при F_0/F_1					
	1	2	4	6	8	9
2,0	1,0	1,470	2,082	2,508	2,836	2,976
2,5	1,0	1,452	2,030	2,427	2,730	2,859
3,0	1,0	1,441	2,000	2,376	2,664	2,786
4,0	1,0	1,427	1,958	2,315	2,586	2,700
5,0	1,0	1,418	1,935	2,280	2,541	2,651

пряжениях. Значения k сведены в табл. III.1, из которой следует, что изменение D_{cp}/l мало влияет на значение коэффициента k .

Видно, что лопатки переменного сечения могут обеспечить увеличение выхлопной площади (в два три раза) по сравнению с лопатками постоянного сечения при сохранении одинаковых допущенных в них растягивающих напряжений.

Таблица III.2

σ МПа	Сталь ($\gamma = 7,85 \cdot 10^{-5}$ Н/мм ²)		Титан ($\gamma = 4,51 \cdot 10^{-5}$ Н/мм ²)	
	$n = 3000$ об/мин	$n = 1500$ об/мин	$n = 3000$ об/мин	$n = 1500$ об/мин
200	3,99	15,98	6,96	27,84
300	5,99	23,98	10,44	41,76
400	7,99	31,98	13,92	55,68

Найдем для примера торцевую площадь выхлопа с лопаткой, для которой $F_0/F_1 = 6,5$, а $D_{cp}/l = 2,5$. Эти значения характерны для лопаток последних ступеней конденсационных турбин большой мощности. Для такой лопатки коэффициент разгрузки $k = 2,509$. В табл. III.2 приведены значения торцевой площади Ω (м²) в зависимости от максимально допущенных растягивающих напряжений для лопатки, изготовленной из стали ($\gamma = 7,85 \times 10^{-5}$ Н/мм²) и высокопрочного сплава титана ($\gamma = 4,51 \times 10^{-5}$ Н/мм²). Из приведенных данных следует, что применяя высокопрочные сплавы титана, можно существенно увеличить торцевую площадь выхлопа, а следовательно, и повысить мощность турбины.

III.2. РАСЧЕТ ЛОПАТКИ НА ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ ОТ ДЕЙСТВИЯ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

Центробежные силы могут вызвать в сечениях лопатки не только растяжение, но также изгиб и кручение. В лопатках постоянного поперечного сечения напряжения изгиба появятся в том случае, если прямая, на которой расположены центры

но $2\pi/R_{cp}$ — площадь поперечного сечения выхода пара с лопаток, называемая торцевой площадью выхлопа; обозначим $\Omega = 2\pi/R_{cp}$, тогда

$$\sigma(0) = (\gamma\omega^2/2\pi g)\Omega,$$

отсюда

$$\Omega = (2\pi g/\gamma\omega^2)\sigma(0)$$

или площадь выхлопа (м²)

$$\Omega = (2\pi g/\gamma\omega^2)10^{-4}\sigma(0). \quad (III.8)$$

Таким образом, величина торцевой площади выхлопа, образованной лопатками постоянного сечения, зависит только от допущаемого напряжения и плотности материала лопатки.

Лопатки переменного сечения с показательным законом изменения площадей сечений. Для того чтобы получить большую проходную площадь ступени при одних и тех же допущенных растягивающих напряжениях, лопатка должна быть облегчена в верхней части. Это позволит, во-первых, сделать ее более длинной и, во-вторых, увеличить средний диаметр ступени. Для лопаток, у которых $F_0/F_1 > 2$ (F_0 — площадь корневого сечения лопатки, F_1 — площадь верхнего периферийного сечения), закон изменения площадей сечений может быть представлен уравнением

$$F = F_0(F_1/F_0)^{(R-R_0)/l}. \quad (III.9)$$

Подставим значение F в формулу (III.7)

$$G_{\text{т}}(0) = \frac{\gamma\omega^2}{g} F_0 \int_{R_0}^R R (F_1/F_0)^{(R-R_0)/l} dR$$

Интегрируя, получим

$$G_{\text{т}}(0) = \frac{\gamma\omega^2}{g} F_0 R_{cp} \left\{ 1 + \frac{1}{D_{cp}/l} \left[\frac{2}{\ln(F_0/F_1)} - \frac{1 + F_1/F_0}{1 - F_1/F_0} \right] \right\},$$

отсюда

$$\sigma(0) = \frac{\gamma\omega^2}{2\pi g} \Omega \left\{ 1 + \frac{1}{D_{cp}/l} \left[\frac{2}{\ln(F_0/F_1)} - \frac{1 + F_1/F_0}{1 - F_1/F_0} \right] \right\}.$$

Из этого уравнения найдем торцевую площадь выхлопа (м²)

$$\Omega = \frac{2\pi g}{\gamma\omega^2} 10^{-4} \sigma(0) k, \quad (III.10)$$

где

$$k = \frac{\ln(F_0/F_1)}{(1 - F_1/F_0) \left\{ 1 + \frac{1}{D_{cp}/l} \left[\frac{2}{\ln(F_0/F_1)} - \frac{1 + F_1/F_0}{1 - F_1/F_0} \right] \right\}}. \quad (III.11)$$

Коэффициент k показывает, во сколько раз торцевая площадь выхлопа ступени, образованная лопатками переменного сечения с показательным законом изменения площадей сечений по длине, больше площади выхлопа, образованной лопатками постоянного сечения при одинаковых допущенных в них растягивающих на-

тяжести сечений, не проходит через центр диска, т. е. не является радиальной линией. В лопатках переменного сечения линия, соединяющая центры тяжести сечений, в общем случае является пространственной кривой. При этом в сечениях лопатки всегда будут иметь место изгибающие и крутящие моменты от центробежных сил. При вычислении моментов от центробежных сил для жестких лопаток будем ограничиваться первым приближением, вычисляя их без учета упругих прогибов

Примем систему координат XYZ , показанную на рис. III.2 и III.3. Ось Z направлена по радиусу вдоль лопатки от диска к вершине. Ось X параллельна оси вращения и направлена от входной кромки лопатки в сторону выходной. Ось Y перпендикулярна к плоскости XOZ и поправлена от спинки в сторону вогнутой

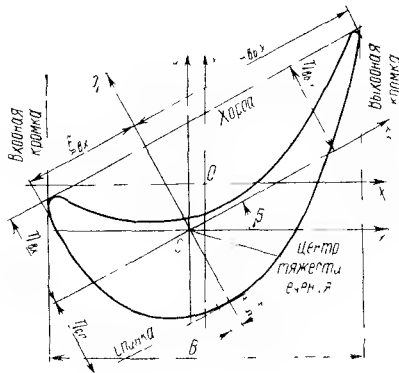


Рис. III.2. Принятая система координат

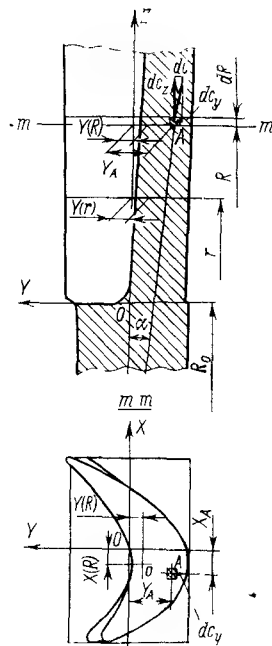


Рис. III.3. Разрез лопатки и схема действия центробежных сил

части профиля. Плоскость YOZ перпендикулярна к оси вращения и, как правило, выбирается так, что совпадает со средней плоскостью диска. Для лопатки правого вращения принятая система координат является правой. В каждом сечении лопатки будем вводить местную систему центральных осей xuz . Оси этой системы параллельны осям XYZ , а начало координат совпадает с центром тяжести сечения (рис. III.2). Кроме того, будем рассматривать местную систему главных центральных осей $\xi\eta$ (рис. III.2). Оси ξ и η повернуты относительно осей x и y на некоторый угол β , который для сечений турбинных лопаток, как правило, мало отличается от угла установки профиля. Вычисления показывают, что это отличие составляет не более $2-3^\circ$, т. е. практически можно считать, что ось минимального момента инерции

(ось ξ) параллельна хорде профиля, а ось максимального момента инерции (ось η) перпендикулярна к ней. Будем считать, что необходимые геометрические характеристики сечений (площади, моменты инерции и моменты сопротивлений, координаты центров тяжести и углы установки профиля) известны.

Для вычисления моментов, действующих в сечении лопатки на радиусе r , рассмотрим элемент на радиусе R , выделенный вблизи точки A (рис. III.3). Пусть площадь этого элемента будет dF , а высота dR . Ввиду малости dR можно принять, что центр масс этого элемента находится в сечении с радиусом R и имеет координаты X_1 и Y_A (рис. III.3). Центробежная сила элемента равна

$$dc = (\gamma \omega^2 g) R dF dR$$

Эта сила направлена по радиусу, проходящему через центр масс элемента. Угол, составляемый этим радиусом с плоскостью XOZ (рис. III.3),

$$\operatorname{tg} \alpha = Y_1 / R \sim \alpha$$

Ввиду малости угла α можно считать, что

$$\sin \alpha = Y_1 / R, \quad \cos \alpha = 1.$$

Разложим силу dc на составляющие по координатным осям xuz :

$$dc_x = 0,$$

$$dc_y = dc \sin \alpha = dc (Y_1 / R),$$

$$dc_z = dc \cos \alpha = dc$$

Составляющая dc_x равна нулю, так как плоскость, в которой действует сила dc , перпендикулярна к оси X . Составляющая dc_y лежит в плоскости сечения на радиусе R , а dc_z перпендикулярна к этому сечению.

Найдем изгибающие моменты в сечении лопатки на радиусе r относительно центральных осей x и y . Момент будем считать положительным, если наблюдая со стороны положительного направления оси, поворот, который он осуществляет, происходит против часовой стрелки. Из рис. III.3 следует:

$$dm_x = -dc_y (R - r) + dc_z [Y_A - Y(r)];$$

$$dm_y = -dc_z [X_A - X(r)];$$

где $X(r)$ и $Y(r)$ — координаты центра тяжести сечения на радиусе r .

Крутящий момент¹ найдем относительно оси z , проходящей через центр тяжести сечения на радиусе r ,

$$dm_z = dc_y [X_A - X(r)].$$

¹ Здесь крутящий момент определяется без учета закрученности профиля. Более полный расчет лопаток с учетом закрученности профиля рассмотрен в гл. V.

Координаты точки A , очевидно, можно представить так:

$$X_A = X(R) + x; Y_A = Y(R) + y,$$

где $X(R)$ и $Y(R)$ — координаты центра тяжести сечения на радиусе R ; x и y — координаты точки A в системе осей xy .

Заменяя в формулах для моментов dc_y , dc_z и X_A , Y_A их значениями и интегрируя по сечению на радиусе R , найдем:

$$\begin{aligned} dM_{x,1} &= (\gamma\omega^2/g) F(R) [rY(R) - RY(r)] dR; \\ dM_{y,1} &= -(\gamma\omega^2/g) F(R) R [X(R) - X(r)] dR; \\ dM_{z,1} &= (\gamma\omega^2/g) \{J_{xy}(R) + Y(R)[X(R) - X(r)]F(R)\} dR, \end{aligned}$$

где $J_{xy}(R) = \int_F xy dF$ — центробежный момент инерции относительно центральных осей xy . При этом учитывалось, что $\int_F x dF = \int_F y dF = 0$, как статические моменты относительно центральных осей.

Тогда моменты, действующие в сечении на радиусе r от центробежных сил части лопатки, расположенный выше этого сечения, равны:

$$\left. \begin{aligned} M_{x,1} &= \frac{\gamma\omega^2}{g} \left[r \int_r^{R_1} Y(R) F(R) dR - Y(r) \int_r^{R_1} RF(R) dR \right]; \\ M_{y,1} &= -\frac{\gamma\omega^2}{g} \left[\int_r^{R_1} X(R) F(R) R dR - X(r) \int_r^{R_1} RF(R) dR \right]; \\ M_{z,1} &= \frac{\gamma\omega^2}{g} \left[\int_r^{R_1} J_{xy}(R) dR + \int_r^{R_1} X(R) Y(R) F(R) dR - \right. \\ &\quad \left. - X(r) \int_r^{R_1} Y(R) F(R) dR \right]. \end{aligned} \right\} \quad (III.12)$$

Изгибающие и крутящий моменты в сечениях лопатки будут создавать также центробежные силы связей и утолщений. Так как расположение связи или утолщения по отношению к сечению известно, то можно найти положение их центров тяжести в системе координат XY . Пусть координаты центра тяжести одного шага связи или утолщения будут X_c и Y_c .

Центробежная сила шага связи

$$C_c = (\gamma\omega^2/g) V_c R_c.$$

Как и выше, находим составляющие этой силы по координатным осям xyz : $C_{cx} = 0$; $C_{cy} = C_c (Y_c/R_c)$; $C_{cz} = C_c$. Тогда моменты

этих сил относительно центральных осей xyz в сечении на радиусе r равны:

$$\begin{aligned} M_{xc} &= -C_{cy}(R_c - r) + C_{cz}[Y_c - Y(r)]; \\ M_{yc} &= -C_{cz}[X_c - X(r)]; \\ M_{zc} &= C_{cy}[X_c - X(r)]. \end{aligned}$$

Подставляя в эти формулы значения C_{cy} и C_{cz} , получим:

$$\left. \begin{aligned} M_{xc} &= (\gamma\omega^2/g) V_c [rY_c - R_c Y(r)]; \\ M_{yc} &= -(\gamma\omega^2/g) V_c R_c [X_c - X(r)]; \\ M_{zc} &= (\gamma\omega^2/g) V_c [X_c Y_c - X(r) Y_c]. \end{aligned} \right\} \quad (III.13)$$

Учитывая (III.12) и (III.13) находим суммарные моменты, действующие в сечении на радиусе r :

$$\left. \begin{aligned} M_x(r) &= M_{x,1}(r) + \sum M_{xc} = \frac{\gamma\omega^2}{g} \left\{ r \left[\int_r^{R_1} Y(R) F(R) dR + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum \frac{Y_c}{\gamma} V_c \right] - Y(r) \left[\int_r^{R_1} RF(R) dR + \sum \frac{Y_c}{\gamma} R_c V_c \right] \right\}; \\ M_y(r) &= M_{y,1}(r) + \sum M_{yc} = -\frac{\gamma\omega^2}{g} \left\{ \left[\int_r^{R_1} X(R) F(R) R dR + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum \frac{X_c}{\gamma} V_c \right] - X(r) \left[\int_r^{R_1} RF(R) dR + \sum \frac{X_c}{\gamma} R_c V_c \right] \right\}; \\ M_z(r) &= M_{z,1}(r) + \sum M_{zc} = \frac{\gamma\omega^2}{g} \left\{ \int_r^{R_1} J_{xy}(R) dR + \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_r^{R_1} X(R) Y(R) F(R) dR - \sum \frac{X_c Y_c}{\gamma} V_c \right] - \right. \\ &\quad \left. - X(r) \left[\int_r^{R_1} Y(R) F(R) dR + \sum \frac{Y_c}{\gamma} V_c \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (III.14)$$

где сумма распространяется на все связи и утолщения, лежащие выше расчетного сечения.

Для определения напряжений удобнее иметь выражения для изгибающих моментов относительно главных центральных осей (ξ , η). Воспользуемся для этого известными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} M_{\xi} &= M_x \cos \beta + M_y \sin \beta; \\ M_{\eta} &= -M_x \sin \beta + M_y \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (III.15)$$

Тогда учитывая, что

$$r = R_0 + z, \quad R = R_0 + \tilde{z} \quad \text{и} \quad R_1 = R_0 + l$$

и вводя относительные координаты

$$\xi = z/l, \quad \rho = \tilde{z}/l, \quad dR = l \, d\rho,$$

окончательно получим:

$$\begin{aligned} M_{\xi}(\xi) = & \frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left\{ [X(\xi) \sin \beta - Y(\xi) \cos \beta] \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \right. \right. \\ & + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \frac{V_c}{l} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \left. \right] - \sin \beta \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) X(\rho) F(\rho) d\rho + \right. \\ & + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \frac{V_c}{l} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) X_c \left. \right] + \cos \beta \left(\frac{R_0}{l} + \xi \right) \left[\int_{\xi}^1 Y(\rho) F(\rho) d\rho + \right. \\ & + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \frac{V_c}{l} Y_c \left. \right] \left. \right\}; \\ M_{\eta}(\xi) = & \frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left\{ [X(\xi) \cos \beta + Y(\xi) \sin \beta] \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \right. \right. \\ & + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \frac{V_c}{l} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \left. \right] - \cos \beta \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) X(\rho) F(\rho) d\rho + \right. \\ & + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \frac{V_c}{l} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) X_c \left. \right] - \sin \beta \left(\frac{R_0}{l} + \xi \right) \left[\int_{\xi}^1 Y(\rho) F(\rho) d\rho + \right. \\ & + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \frac{V_c}{l} Y_c \left. \right] \left. \right\}; \\ M_z(\xi) = & \frac{\gamma \omega^2}{g} l \left\{ \int_{\xi}^1 J_{yy}(\rho) d\rho + \left[\int_{\xi}^1 X(\rho) Y(\rho) F(\rho) d\rho + \right. \right. \\ & + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \frac{V_c}{l} X_c Y_c \left. \right] - X(\xi) \left[\int_{\xi}^1 Y(\rho) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \frac{V_c}{l} Y_c \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (III.16)$$

где сумма распространяется на все связи и утолщения, лежащие выше расчетного сечения.

Зная моменты, можно вычислить напряжения. Напряжения изгиба в произвольной точке поперечного сечения с координатами ξ и η определяются по формуле

$$\sigma_{изг} = (M_{\xi}/J_{\xi}) \eta - (M_{\eta}/J_{\eta}) \xi, \quad (III.17)$$

где J_{ξ} и J_{η} — главные моменты инерции сечения.

Обычно напряжения изгиба вычисляют в трех характерных точках сечения, в которых они максимальны. Это точки, наиболее

удаленные от осей ξ и η , — на спинке, на входной и выходной кромках (рис. III.2):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{изг}^{сп} &= -M_{\xi}/W_{\xi}^{сп}; \\ \sigma_{изг}^{вх} &= M_{\xi}/W_{\xi}^{вх} + M_{\eta}/W_{\eta}^{вх}; \quad \sigma_{изг}^{вых} = M_{\xi}/W_{\xi}^{вых} - M_{\eta}/W_{\eta}^{вых}, \end{aligned} \right\} \quad (III.18)$$

где

$$W_{\xi}^{сп} = J_{\xi} \eta_{сп}; \quad W_{\xi}^{вх} = J_{\xi} \eta_{вх}; \quad W_{\xi}^{вых} = J_{\xi} \eta_{вых};$$

$$W_{\eta}^{вх} = J_{\eta} \xi_{вх}; \quad W_{\eta}^{вых} = J_{\eta} \xi_{вых};$$

$W_{\xi}^{сп}$, $W_{\xi}^{вх}$, $W_{\xi}^{вых}$, $W_{\eta}^{вх}$, $W_{\eta}^{вых}$ — моменты сопротивления сечения в соответствующих точках относительно главных центральных осей.

Максимальные касательные напряжения можно определить по приближенной формуле

$$\tau_{max} = M_z c T, \quad (III.19)$$

где c — максимальная толщина сечения; T — геометрическая жесткость на кручение.

Геометрическую жесткость на кручение можно приближенно оценить по формуле [13]

$$T = \pi b c^3 / 16, \quad (III.20)$$

где b — хорда профиля.

Максимальные напряжения кручения имеют место на контуре профиля — в районе его максимальной толщины (рис. III.4). В некоторых случаях более точные значения напряжений дает другая приближенная формула [108]

$$\tau_{max} = (M_z T) L, \quad (III.21)$$

где

$$L = \frac{c}{1 + \pi^2 c^4 / 16 F^2} \left[1 + 0,15 \left(\frac{\pi c^1}{16 F^2} - \frac{c}{2R} \right) \right].$$

Здесь F — площадь сечения; R — радиус закругления контура сечения со стороны спинки в месте максимальной толщины.

Как показывают расчеты, второе и третье слагаемые в формуле (III.16) для крутящего момента малы по сравнению с первым, вследствие чего при вычислении крутящего момента для турбинных лопаток в формуле (III.16) можно сохранять только первое слагаемое.

III.3. РАСЧЕТ ЛОПАТКИ НА ИЗГИБ ОТ ПАРОВОГО УСИЛИЯ

Паровые усилия, развиваемые потоком пара на рабочих лопатках, найдем исходя из данных теплового расчета ступени. Воспользуемся теоремой об изменении количества движения среды,

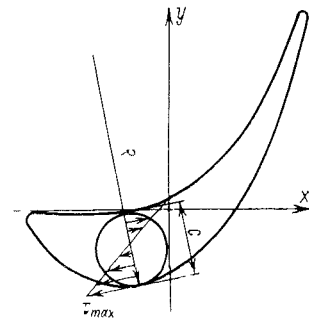


Рис. III.4. Распределение касательных напряжений

проходящей через рабочую решетку [212] Рассмотрим поток пара через лопаточный канал в некотором сечении, изображенном на рис III 5 Допустим, что за промежуток времени δt в канал со скоростью C_1 входит элементарная масса δm При установившемся течении такая же масса выходит из канала со скоростью C_2 Изменение скорости потока или количества движения элементарной массы происходит под влиянием реактивной силы dP' , действующей со стороны лопатки на поток, и усилия, определяемого разностью давлений $p_1 - p_2$ при входе и выходе из канала

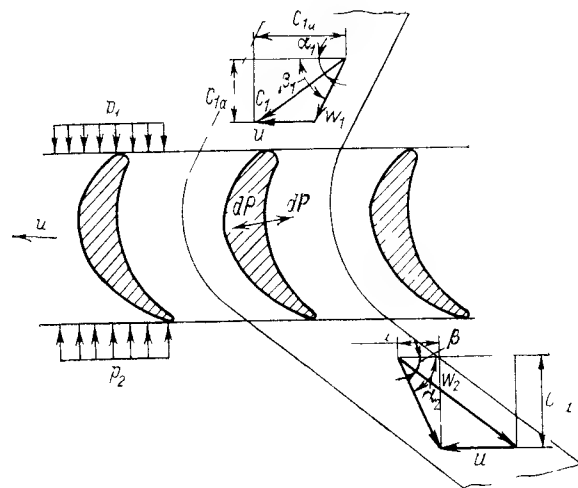


Рис III 5 Схема потока пара через рабочую решетку

Изменение количества движения элементарной массы, равное импульсу действующих на нее усилий, запишем в виде векторного уравнения

$$\frac{d(\delta m)}{dR} dR (C_2 - C_1) = [dP' + (p_1 - p_2) l dR] \delta \tau,$$

где l — шаг рабочих лопаток на радиусе R

Усилие, развиваемое потоком пара на лопатках, равно, но прямо противоположно усилию dP' , т.е. $dP = -dP'$ Тогда из уравнения находим

$$dP = \frac{d}{dR} \left(\frac{\delta m}{\delta \tau} \right) dR (C_1 - C_2) + (p_1 - p_2) l dR \quad (\text{III 22})$$

Отношение $\delta m / \delta \tau$ представляет секундную массу пара, протекающего через канал, которая при установившемся течении с учетом парциальности ступени равна

$$\delta m / \delta \tau = G / \epsilon z_1,$$

где G — расход пара через ступень, кг/с, ϵ — парциальность ступени, z_1 — число рабочих лопаток на колесе.

Подставляя полученное в (III 22) имеем

$$dP = \frac{dG}{dR} dR \frac{C_1 - C_2}{\epsilon z_1} + (p_1 - p_2) l dR \quad (\text{III 22a})$$

Представим расход пара через ступень, отнесенный к единице длины лопатки, в виде

$$\left(\frac{dG}{dR} \right) \Delta R = \Delta G$$

Тогда, проектируя векторное равенство (III 22a) на направление окружной скорости u (рис III 6) и перпендикулярное к ней, окончательные расчетные формулы для составляющих парового усилия получим в виде

$$\left. \begin{aligned} q_u &= (\Delta G \epsilon z_1) (C_1 \cos \alpha_1 - C_2 \cos \alpha_2), \\ q_t &= (\Delta G \epsilon z_1) (C_1 \sin \alpha_1 - C_2 \sin \alpha_2) + (p_1 - p_2) l, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III 23})$$

где q_u и q_a — составляющие парового усилия, отнесенные к единице длины лопатки, соответственно в окружном и аксиальном направлениях

Зная нагрузки, распределенные по длине лопатки, можно найти изгибающие моменты в любом расчетном сечении Действительно из условия равновесия элемента лопатки следует

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q_t, \quad \frac{d^2 M_y}{dz^2} = q_u,$$

где M_x и M_y — изгибающие моменты относительно центральных осей x и y (рис III 6)

Найдем изгибающие моменты в сечении лопатки с радиусом r Имея в виду, что $r = R_0 + z$, $R = R_0 + \tilde{z}$, $R_1 = R_0 + l$ (рис III 1) и вводя относительные координаты $\xi = z/l$, $\rho = \tilde{z}/l$, $dz = dR$, после двукратного интегрирования получим

$$M_x(\xi) = l^2 \int_{\xi}^1 \left(\int_{\rho}^1 q_u d\rho \right) d\rho, \quad M_y(\xi) = l^2 \int_{\xi}^1 \left(\int_{\rho}^1 q_t d\rho \right) d\rho$$

Используя соотношения (III 15), получим выражения для изгибающих моментов относительно главных центральных осей

$$\left. \begin{aligned} M_{\xi}(\xi) &= l^2 \left[\cos \beta \int_{\xi}^1 \left(\int_{\rho}^1 q_u d\rho \right) d\rho + \sin \beta \int_{\xi}^1 \left(\int_{\rho}^1 q_t d\rho \right) d\rho \right], \\ M_{\eta}(\xi) &= -l^2 \left[\sin \beta \int_{\xi}^1 \left(\int_{\rho}^1 q_u d\rho \right) d\rho - \cos \beta \int_{\xi}^1 \left(\int_{\rho}^1 q_t d\rho \right) d\rho \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III 24})$$

Крутящий момент от действия паровых усилий можно найти, если известно положение центра давления (точка приложения

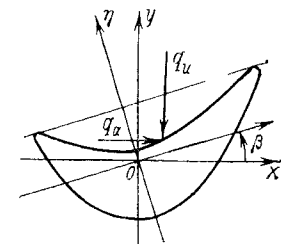


Рис III 6 Схема действия паровых усилий

равнодействующей паровых усилий на профиле). Вычисления показывают, что напряжения кручения от действия паровых усилий для турбинных профилей, как правило, малы и ими можно пренебрегать при оценке прочности лопаток.

Приведем далее упрощенные формулы, которые можно использовать для приближенной оценки напряжений парового изгиба в относительно коротких лопатках. Расчеты показывают, что даже для относительно длинных лопаток окружное усилие q_u мало изменяется по высоте лопатки. Для коротких лопаток с отношением $D_{cp}/l \geq 10$ его практически можно считать постоянным. Кроме того, для коротких лопаток можно пренебречь напряжениями парового изгиба в осевом направлении, так как жесткость лопатки в этом направлении относительно велика. Тогда напряжения парового изгиба можно определять, учитывая только окружную составляющую q_u , причем равномерно распределенную по высоте лопатки.

В соответствии с (III.23) окружное усилие, действующее на лопатку, в этом случае будет:

$$P_u = q_u l = (G \varepsilon z_1) (C_{1u} - C_{2u}), \quad (III.25)$$

где $C_{1u} = C_1 \cos \alpha_1$ и $C_{2u} = C_2 \cos \alpha_2$ — составляющие скоростей в окружном направлении.

Ввиду того что угол, образуемый усилием P_u с осью максимального момента инерции, у таких лопаток невелик, можно принять, что окружное усилие действует нормально к оси минимального момента инерции сечения (рис. III.6). Тогда максимальный изгибающий момент, имеющий место в корневом сечении лопатки, и напряжения изгиба в этом сечении равны:

$$M(0) = q_u l^2 / 2 = P_u l / 2 \text{ и } \sigma_{изг} = M(0) / W(0), \quad (III.26)$$

где $W(0)$ — минимальный момент сопротивления корневого сечения лопатки.

Для определения окружного усилия P_u (Н) возможны и другие варианты расчетных формул, вытекающие из (III.25), например

$$P_u = 427 G h_{ad} \eta_u (u \varepsilon z_1) = 102 N_u / (u \varepsilon z_1), \quad (III.27)$$

где h_{ad} — адиабатный перепад на ступень, ккал/кг; η_u — коэффициент полезного действия; u — окружная скорость, м/с; N_u — мощность на ободе колеса, кВт.

Приведенные здесь формулы (III.25)—(III.27) служат для вычисления так называемых статических напряжений парового изгиба, которые, как указывалось в пп. I.4 и I.5, приблизительно пропорциональны динамическим напряжениям, возникающим в лопатках при работе турбины. Допускаемый уровень этих статических напряжений парового изгиба является одним из критериев, который используется при подборе рабочих лопаток в процессе проектирования турбины (см. п. I.5).

В заключение заметим, что расчет напряжений изгиба от паровых усилий необходимо вести на тот режим, при котором эти усилия будут максимальными.

III.4. ПОНЯТИЕ О ВЫБОРЕ УСТАНОВКИ РАБОЧЕЙ ЛОПАТКИ

Определив напряжения растяжения и изгиба, возникающие в сечениях рабочей лопатки от действия центробежных и паровых усилий, можно найти суммарные напряжения. В точках, наиболее удаленных от главных центральных осей ξ , η , т. е. на спинке, входной и выходной кромках они равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{сп} &= \sigma_p + (\sigma_{изг}^{сп})_\omega + (\sigma_{изг}^{сп})_q; \\ \sigma_{вл} &= \sigma_p + (\sigma_{изг}^{вл})_\omega + (\sigma_{изг}^{вл})_q; \\ \sigma_{вых} &= \sigma_p + (\sigma_{изг}^{вых})_\omega + (\sigma_{изг}^{вых})_q, \end{aligned} \right\} \quad (III.28)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{сп} &= C(\xi) F + (M_\xi^\omega + M_\xi^q) (\eta_{сп} J_\xi) - (M_\eta^\omega + M_\eta^q) (\xi_{сп} J_\eta); \\ \sigma_{вл} &= C(\xi) F + (M_\xi^\omega + M_\xi^q) (\eta_{вл} J_\xi) - (M_\eta^\omega + M_\eta^q) (\xi_{вл} J_\eta); \\ \sigma_{вых} &= C(\xi) F + (M_\xi^\omega + M_\xi^q) (\eta_{вых} J_\xi) - (M_\eta^\omega + M_\eta^q) (\xi_{вых} J_\eta). \end{aligned} \right\} \quad (III.29)$$

Здесь индекс ω обозначает напряжения и моменты от действия центробежных сил, а индекс q — от действия паровых усилий.

Касательные напряжения, возникающие в сечениях жесткой лопатки от действия крутящих моментов, обычно невелики, поэтому при оценке прочности ими, как правило, пренебрегают.

Напряжения изгиба от паровых усилий полностью определяются данными аэродинамического и теплового расчета ступени и зависят только от выбранной геометрии профиля рабочей лопатки и заданного режима работы турбины. Напряжения изгиба от действия центробежных сил зависят еще, как это было показано выше, и от положения рабочей лопатки на диске, а также от взаимного расположения сечений по высоте профиля. Последнее обстоятельство позволяет в определенных пределах, не нарушая аэродинамических и режимных характеристик ступени, изменять суммарные напряжения в лопатке.

Очевидно, изменяя наклон рабочей лопатки на диске относительно радиальной оси или изменяя взаимное расположение сечений по высоте профиля (т. е. изменяя геометрическую форму оси лопатки), можно добиться такого положения, что напряжения изгиба от центробежных сил будут полностью компенсировать напряжения изгиба от паровых усилий, по крайней мере при номинальной нагрузке.

РАСЧЕТ ПАКЕТОВ ЛОПАТОК

IV.1. УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ ЛОПАТОК СО СВЯЗЯМИ

Практически, особенно для длинных лопаток переменного сечения, полной взаимной компенсации изгибных напряжений получить не удастся, так как необходимо учитывать еще технологические возможности изготовления лопаток и конструктивные особенности ступени в целом. Однако свести суммарные напряжения к определенному минимуму можно. Выбор такого положения лопатки на диске, а также расположения сечений по ее высоте, при котором достигается оптимально возможная минимизация действующих напряжений изгиба, называют выбором установки рабочей лопатки. Выбор установки рабочей лопатки по существу является задачей оптимизации. Однако решение ее удается получить только в отдельных простейших случаях [115]. Поэтому для длинных лопаток переменного сечения, у которых центры тяжести расположены на пространственной кривой, выбор установки проводят так называемым методом вариантных расчетов.

При первом расчете определяются суммарные напряжения исходя из установки лопатки, полученной при аэродинамическом расчете. Учитывая уровень максимальных напряжений и характер распределения напряжений по высоте, изменяют наклон лопатки в окружном или осевом направлениях, а также форму ее оси до тех пор, пока максимальные напряжения не будут лежать в допустимых пределах. При этом закон изменения напряжений по высоте лопатки должен иметь плавный характер, без резких скачков в отдельных сечениях, в частности в сечениях, ослабленных отверстиями под проволочные связи. При необходимости можно изменять наклон только части рабочей лопатки, начиная от некоторого промежуточного сечения, или придавать лопатке начальный погиб («навал») определенной формы. Существенное значение при выборе установки имеет рациональное расположение связей, а также выполнение специальных утолщений профиля в местах расположения этих связей.

Выбор установки рабочих лопаток должен производиться с учетом возможных технологических отклонений, возникающих при их изготовлении. Такие отклонения (смещение сечений относительно друг друга, погиб лопатки и пр.) могут привести к изменению расчетной формы оси лопатки, изменению положения профильной части относительно хвоста, что безусловно приведет к изменению ее напряженного состояния. Ввиду этого, учитывая неизбежность технологических отклонений в чертеже задают границы этих отклонений, при которых максимальные напряжения в лопатке не будут превосходить допустимые значения. Эти границы определяются серией специальных расчетов. Появлению больших погибов, или «навалов», особенно подвержены гибкие лопатки большой длины, изготовление которых отличается многообразием технологических операций, приводящих к их неравномерному нагреву. Влияние навалов на напряженное состояние гибких лопаток может быть выявлено путем расчета с использованием теории тонких закрученных стержней (см. гл. V).

При действии на пакет лопаток внешних нагрузок — центробежных сил и паровых усилий — в местах крепления связей (проволоки или бандаж) появляются реактивные моменты и усилия, вызванные упругостью этих связей и лопаток. Рассмотрим вывод формул для моментов, действующих от связи на лопатку при изгибе пакета паровыми усилиями в предположении, что все лопатки работают в одинаковых условиях. При рассмотрении совместной деформации лопаток и связей примем следующие упрощающие предположения.

1. Будем пренебрегать естественной закрученностью лопатки и рассматривать ее изгиб как изгиб раскрученной лопатки отдельно в двух направлениях — по осям максимальной и минимальной жесткостей. Считая лопатку раскрученной, будем принимать для угла установки β его значение, равное углу для среднего сечения ($z = l/2$). Принятое предположение не окажет большого влияния на точность расчета, так как в пакеты обычно соединяются относительно короткие лопатки, имеющие малые углы закрутки.

2. Будем считать, что паровые усилия действуют перпендикулярно к главной оси минимального момента инерции раскрученной лопатки, и изгиб лопатки происходит вокруг этой оси. Рассмотрим пакет лопаток со связью, расположенной на высоте z_c (рис. IV.1, а). Пусть прогиб лопатки в плоскости минимальной жесткости будет v , а угол, составляемый этой плоскостью с плоскостью диска, — β (рис. IV.2). Разлагая прогиб лопатки v на составляющие: v_1 — в плоскости диска и v_2 — перпендикулярную к ней, получим:

$$v_1 = v \cos \beta; \quad v_2 = v \sin \beta.$$

Наклон касательной к кривой прогиба лопатки в месте крепления связи ($z = z_c$)

$$\alpha = \left. \frac{dv(z)}{dz} \right|_{z=z_c} = \frac{dv(z_c)}{dz}.$$

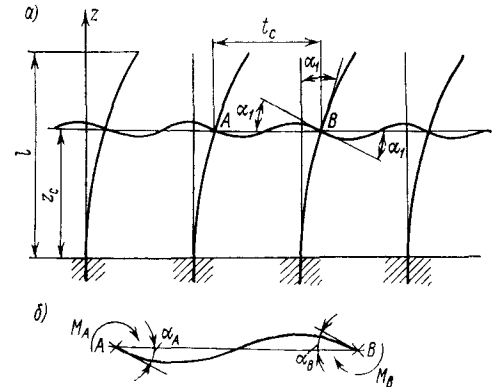


Рис. IV.1. Изгиб пакета лопаток

Наклоны касательных к кривым v_1 и v_2 в этом же сечении таковы:

$$\alpha_1 = \frac{dv(z_c)}{dz} \cos \beta; \alpha_2 = \frac{dv(z_c)}{dz} \sin \beta.$$

Наклон α , вызывает лишь поворот всей связи в целом, не создавая в ней напряженного состояния. Благодаря наклону α_1 связь деформируется, как это показано на рис IV.1 а. Найдём зависимость между углом наклона лопатки α_1 и изгибающим моментом в сечении связи B (рис. IV.1). Воспользуемся известным решением [7; 170] для шарнирно опертой балки, нагруженной в крайних сечениях моментами M_A и M_B . Это решение имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha_A = M_A t_c (3EJ_c) - M_B t_c (6EJ_c); \\ \alpha_B = M_B t_c (3EJ_c) - M_A t_c (6EJ_c), \end{cases} \quad (IV.1)$$

где t_c — шаг в месте крепления связи; E — модуль упругости связи; J_c — момент инерции сечения связи.

Считая, что все лопатки пакета находятся в одинаковых условиях, имеем:

$$\alpha_A = \alpha_B = \alpha_1; M_A = M_B = M'_c,$$

где M'_c — изгибающий момент в сечении связи, в месте соединения с лопаткой.

Тогда из (IV.1) находим

$$M'_c = (6EJ_c t_c) \alpha_1. \quad (IV.2)$$

Следовательно, момент, действующий на лопатку в плоскости изгиба связи,

$$M = 2M'_c = (12EJ_c t_c) \alpha_1. \quad (IV.3)$$

Разложим этот момент на составляющие, действующие в плоскости изгиба лопатки и в плоскости, перпендикулярной к ней (рис. IV.2). В результате получим, что момент, действующий от связи в плоскости изгиба лопатки равен $M \cos \beta$. Второй составляющей момента, действующей в плоскости, перпендикулярной к плоскости изгиба, пренебрегаем учитывая большую жесткость лопатки в этой плоскости.

Выше мы считали, что при изгибе угол наклона связи в месте ее крепления в лопатке (точка B) равен углу наклона оси лопатки в этом же сечении, т. е. считали, что связь жестко скреплена с лопаткой. В действительности это соединение не жесткое. Кроме того, мы не учитывали толщину лопатки в месте крепления связи. Поправка на жесткость крепления связи с учетом толщины лопатки должна быть определена опытным путем. Тогда действитель-

ный момент, действующий от связи на лопатку, может быть представлен в виде

$$\tilde{M}_c^c = MH_c \cos \beta = \frac{12EH_c J_c \cos^2 \beta}{t_c} \frac{dv(z_c)}{dz}, \quad (IV.4)$$

где H_c — поправочный коэффициент, равный отношению действительного момента, действующего при изгибе связи на лопатку к расчетному моменту. Величина H_c зависит от геометрических размеров сечения и шага связи, а также от толщины профиля лопатки в месте ее крепления. Средние ориентировочные значения этого коэффициента для бандажа, приклепанного к лопаткам одним шипом [107], таковы:

$$H_c = 0,1 \div 0,3.$$

Для проволочных связей, припаянных к лопаткам, коэффициент $H_{II} - H_I$ можно найти по кривым (рис. IV.3), которые получены экспериментально А. З. Шемтовым [202]. Рассмотренная схема изгиба пакета рабочих лопаток приближенно отражает работу проволочных связей, припаянных к лопаткам и бандажа, прикрепленного к лопаткам одним шипом.

Для цельнофрезерованного бандажа или бандажных полок, сваренных между собой (рис. IV.4, а), а также для бандажа, при-

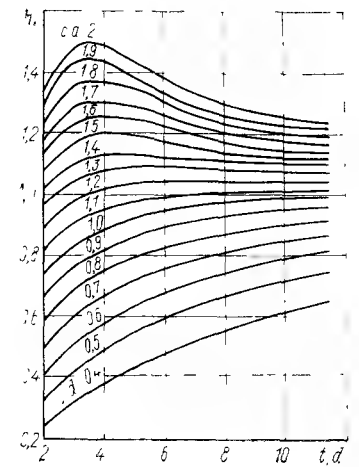


Рис. IV.3. Кривые зависимости поправочного коэффициента H_1 от отношения шага связи к диаметру проволоки t/d при различных значениях отношения толщины лопатки в месте установки проволоки к диаметру проволоки c/d

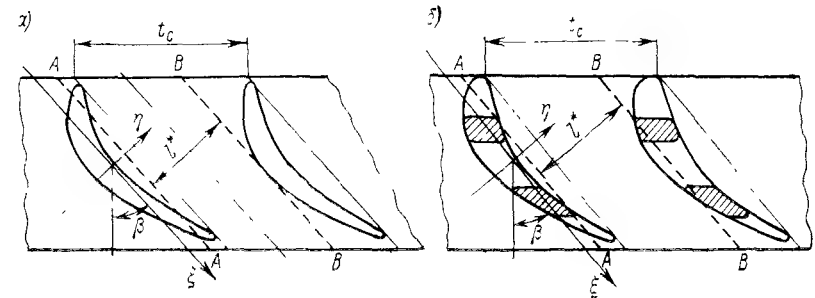


Рис. IV.4. Схема расчета бандажа с закреплением по косым сечениям

клепанного к лопатке двумя шипами (б) при относительно большом угле установки профиля β эта схема будет далека от действительных условий изгиба пакета. В этом случае участок бандажа между

лопатками будет представлять собой пластину, заделанную по контуру сечений лопаток (цельнофрезерованный бандаж) или опертую по контуру шипов (клепанный бандаж) [173]. Приближенно изгиб такого бандажа будем рассматривать как изгиб балки, заделанной по косым сечениям, параллельным оси минимального момента инерции сечения лопатки. Длина балки в этом случае l^* может быть выбрана приблизительно, как показано на рис. IV.4. Необходимую зависимость между моментом в косом сечении бандажа (заделанном) и наклоном касательной к кривой прогиба лопатки и плоскости минимальной жесткости лопатки найдем, как и выше, используя равенства (IV.1). Учитывая, что $\alpha_A = \alpha_B = \alpha$; $M_A = M_B = M_0$, получим

$$M_0' = \frac{6EJ_0}{l^* \cos \beta} \alpha, \quad (IV.5)$$

где J_0 — момент инерции поперечного сечения бандажа, перпендикулярного к плоскости диска.

Тогда момент от бандажа, действующий на лопатку относительно оси минимального момента инерции, с учетом поправочного коэффициента H_0^* равен

$$\tilde{M}_0^0 = \frac{12EH_0^*J_0}{l^* \cos \beta} \frac{dv(z_0)}{dz}. \quad (IV.6)$$

Значение поправочного коэффициента H_0^* может быть определено экспериментально или расчетным путем численными методами, например методом конечных элементов.

Для бандажа, приклепанного к лопаткам (рис. IV.4 б), условия сопряжения лопаток с бандажом будут зависеть от технологии и качества выполнения клепки и должны быть проверены экспериментально.

При выводе выражений для изгибающего момента, действующего от связи на лопатки, предполагали, что все лопатки пакета работают в одинаковых условиях. Однако на крайние лопатки пакета момент от связи действует лишь с одной стороны. Кроме того, хотя давление пара на все лопатки пакета и одинаково, прогиб и напряжения в них будут различны в зависимости от расположения лопатки в пакете. При изгибе пакета паровыми усилиями средние лопатки будут более напряжены, чем крайние. Бандаж или проволока в этом случае сильнее напряжены в сечениях, примыкающих к крайним лопаткам, чем в любом другом месте. Как показывают соответствующие расчеты, разница в значениях моментов, действующих в корневых сечениях средних и крайних лопаток пакета может достигать до 10%, а разница в значениях моментов, действующих в сечениях бандажа или проволоки, примыкающих к крайним лопаткам, и в сечениях, примыкающих к средним, может достигать до 40% и выше [107].

Конечное число лопаток в пакете приближенно может быть учтено следующим образом. При числе лопаток в пакете m число

моментов от связи на пакет равно $m - 1$. Взяв среднее значение момента, будем считать, что на каждую лопатку действует момент

$$M_\xi^c = \frac{m-1}{m} \tilde{M}_\xi^c.$$

Заменив $\tilde{M}_\xi^c$ его выражением (IV.4) или (IV.6), окончательно получим:

$$M_\xi^c = \frac{12E(m-1)H_cJ_c \cos^2 \beta}{mt_c} \frac{dv(z_c)}{dz}; \quad (IV.7)$$

$$M_\xi^0 = \frac{12E(m-1)H_0^*J_0}{ml^* \cos \beta} \frac{dv(z_0)}{dz}. \quad (IV.7a)$$

Как следует из вышеизложенного, момент, действующий в сечении связи:

$$M_c = \frac{6E(m-1)H_cJ_c \cos \beta}{mt_c} \frac{dv(z_c)}{dz}; \quad (IV.8)$$

$$M_c = \frac{6E(m-1)H_0^*J_0}{ml^* \cos \beta} \frac{dv(z_0)}{dz}. \quad (IV.8a)$$

Формулы (IV.7a) и (IV.8a) относятся к бандажу с двумя шипами или к бандажным полкам, сваренным между собой при относительно большом угле установки профиля лопатки.

Учет конечного числа лопаток в пакете значительно усложняет расчет и является для пакета, связанного более чем одной проволокой или бандажом, задачей громоздкой. В приближенных расчетах можно предположить, что все лопатки пакета работают в одинаковых условиях (или, что эквивалентно предположению бесконечного числа их в пакете). Однако необходимо отдавать себе отчет в том, что получаемые при этом напряжения являются средними.

С применением современных вычислительных методов и ЭВМ решение задачи об изгибе пакета лопаток с учетом конечного их числа не представляет затруднений.

IV.2. ПАКЕТ ЛОПАТОК, СВЯЗАННЫХ БАНДАЖОМ

Рассмотрим изгиб пакета лопаток предполагая, что все лопатки в пакете работают в одинаковых условиях. Вырежем из пакета отдельную лопатку. На нее действует равномерно распределенное паровое усилие интенсивности q , а на вершине момент от бандажа, определяемый выражением (IV.7) — рис. IV.5

$$M_\xi^0 = \frac{12E(m-1)H_0J_0 \cos^2 \beta}{mt_0} \frac{dv(1)}{dz}$$

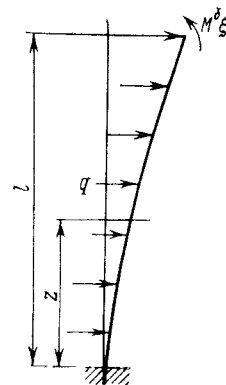


Рис. IV.5. Силы, действующие на лопатку в пакете

или выражением (IV 7a) для бандажных полок, сваренных между собой, и бандажа с двумя шипами при относительно большом угле установки β

$$M_{\xi}^{\sigma} = \frac{12E(m-1)H_0^*J_0}{ml^*\cos\beta} \frac{dv(1)}{dz}.$$

Дифференциальное уравнение изгиба лопатки запишется в виде

$$EJ \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{q(l-z)^2}{2} - M_{\xi}^{\sigma} \quad \text{при } 0 \leq z \leq l \quad (\text{IV.9})$$

или

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{ql^2}{2EJ_0} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 \frac{J_0}{J} - \frac{M_{\xi}^{\sigma}}{EJ_0} \frac{J_0}{J},$$

где $J = J_{\xi}(z)$ — минимальный момент инерции сечения лопатки; $J_0 = J_{\xi}(0)$ — минимальный момент инерции корневого сечения.

Предполагая, что хвосты лопаток жестко заделаны в диске, имеем следующие граничные условия при $z = 0$:

$$\frac{dv(0)}{dz} = 0; \quad v(0) = 0. \quad (\text{IV.10})$$

Перейдем к относительной координате

$$\xi = z/l; \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{при } 0 \leq z \leq l$$

и введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} f''(\xi) &= (1-\xi)^2 (J_0/J); \quad \varphi''(\xi) = J_0/J; \\ M_0 &= ql^2/2; \quad dv(1)/d\xi = \lambda_6; \\ k_6 &= \frac{12(m-1)H_0^*J_0\cos^2\beta}{mJ_0l^6} \\ k_6 &= \frac{12(m-1)H_0^*J_0l}{mJ_0l^*\cos\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.11})$$

или

Очевидно, что M_0 — момент, действующий в корневом сечении лопатки от равномерного давления пара.

Тогда уравнение изгиба примет вид

$$v'' = (M_0l^2/EJ_0) f''(\xi) - k_6\lambda_6\varphi''(\xi). \quad (\text{IV.12})$$

Имея для лопатки кривую моментов инерции, можно подсчитать функции $f''(\xi)$ и $\varphi''(\xi)$. Интегрируя уравнение (IV 12):

$$v' = \frac{M_0l^2}{EJ_0} \int_0^{\xi} f''(\xi) d\xi - k_6\lambda_6 \int_0^{\xi} \varphi''(\xi) d\xi + C_1;$$

$$v' = (M_0l^2/EJ_0) f'(\xi) - k_6\lambda_6\varphi'(\xi) + C_1, \quad (\text{IV.13})$$

где

$$f'(\xi) = \int_0^{\xi} f''(\xi) d\xi; \quad \varphi'(\xi) = \int_0^{\xi} \varphi''(\xi) d\xi. \quad (\text{IV.13a})$$

Функции $f'(\xi)$ и $\varphi'(\xi)$ могут быть легко вычислены, например, по правилу трапеций. Для определения постоянных C_1 и λ_6 имеем два граничных условия:

$$\xi = 0; \quad v' = 0;$$

$$\xi = 1; \quad v' = \lambda_6,$$

или, заменив v' его выражением (IV.13), получим:

$$(M_0l^2/EJ_0) f'(0) - k_6\lambda_6\varphi'(0) + C_1 = 0;$$

$$(M_0l^2/EJ_0) f'(1) - k_6\lambda_6\varphi'(1) + C_1 = \lambda_6.$$

Из (IV 13a) имеем

$$f'(0) - \varphi'(0) = 0,$$

отсюда

$$C_1 = 0; \quad \lambda_6 = \frac{f'(1)}{1 + k_6\varphi'(1)} \frac{M_0l^2}{EJ_0},$$

тогда

$$M_{\xi}^{\sigma} = \frac{EJ_0}{l^2} k_6\lambda_6 = \frac{k_6f'(1)}{1 + k_6\varphi'(1)} M_0. \quad (\text{IV.14})$$

Подставив найденные значения C_1 и λ_6 в выражение (IV.13), получим

$$v' = \left[f'(\xi) - \frac{k_6f'(1)}{1 + k_6\varphi'(1)} \varphi'(\xi) \right] \frac{M_0l^2}{EJ_0}. \quad (\text{IV.15})$$

Из уравнения (IV.9) следует, что момент, действующий в любом сечении лопатки,

$$M = EJ \frac{d^2v}{dz^2} = M_0(1-\xi)^2 - M_{\xi}^{\sigma}.$$

Заменив M_{ξ}^{σ} его выражением (IV.14), найдем

$$M = \left[(1-\xi)^2 - \frac{k_6f'(1)}{1 + k_6\varphi'(1)} \right] M_0. \quad (\text{IV.16})$$

Момент, действующий в корневом сечении лопатки

$$M(0) = M_0 - M_{\xi}^{\sigma} = \frac{1 + k_6[\varphi'(1) - f'(1)]}{1 + k_6\varphi'(1)} M_0. \quad (\text{IV.17})$$

При отсутствии бандажа в этом же сечении действует момент

$$M_0 = ql^2/2.$$

Следовательно, разгрузка корневого сечения от наличия бандажа

$$\kappa_6 = \frac{M_0 - M(0)}{M_0} 100\% = \frac{M_{\xi}^{\sigma}}{M_0} 100\% = \frac{100k_6f'(1)}{1 + k_6\varphi'(1)} \%. \quad (\text{IV.18})$$

Напряжения изгиба в корневом сечении лопатки

$$\sigma(0) = M(0) W(0),$$

где $W(0)$ — минимальный момент сопротивления корневого сечения. Заменив $M(0)$ его выражением (IV.17), получим

$$\sigma(0) = \frac{1 + k_6[\varphi'(1) - f'(1)]}{1 + k_6\varphi'(1)} \frac{M_0}{W(0)}. \quad (\text{IV.19})$$

Момент, действующий в заделанном сечении бандажа, определяется по формуле

$$M_6 = \frac{M_6^0}{2 \cos \beta} = \frac{k_6 f'(1)}{1 + k_6 \varphi'(1)} \frac{M_0}{2 \cos \beta}, \quad (\text{IV.20})$$

а для бандажных полок, сваренных между собой или бандажа с двумя шипами при относительно большом угле установки профиля,

$$M_6 = \frac{M_6^0}{2} = \frac{k_6 f'(1)}{1 + k_6 \varphi'(1)} \frac{M_0}{2}. \quad (\text{IV.20a})$$

Напомним, что в формулах (IV.20) и (IV.20a) параметр k_6 не один и тот же, а определяется в соответствии с (IV.11). Тогда напряжения изгиба в заделанном сечении бандажа таковы

$$\sigma_6 = M_6 / W_6 \text{ или } \sigma_6 = M_6 \cos \beta / W_6,$$

где W_6 — момент сопротивления поперечного сечения бандажа.

Момент, действующий на бандажные шипы, определяется так:

$$M_{\text{ш}} = M_6^0 / (z_{\text{ш}} \cos \beta) \text{ или } M_{\text{ш}} = M_6^0 / z_{\text{ш}},$$

где $z_{\text{ш}}$ — число шипов на лопатке.

Заменив M_6^0 его выражением (IV.14), соответственно получим:

$$M_{\text{ш}} = \frac{k_6 f'(1)}{1 + k_6 \varphi'(1)} \frac{M_0}{z_{\text{ш}} \cos \beta}; \quad (\text{IV.21})$$

$$M_{\text{ш}} = \frac{k_6 f'(1)}{1 + k_6 \varphi'(1)} \frac{M_0}{z_{\text{ш}}}. \quad (\text{IV.21a})$$

В этих формулах параметр k_6 будет также иметь различные значения. Напряжения изгиба в бандажном шипе

$$\sigma_{\text{ш}} = M_{\text{ш}} / W_{\text{ш}},$$

где $W_{\text{ш}}$ — момент сопротивления сечения шипа.

Полученные таким образом напряжения в шипах являются условными, так как при их определении шип рассматривается как балка, что не соответствует соотношению между его высотой и поперечным сечением.

Для вычисления кривой прогиба лопатки при изгибе интегрируем выражение (IV.15)

$$v(\xi) = \left[f(\xi) - \frac{k_6 f'(1)}{1 + k_6 \varphi'(1)} \varphi(\xi) \right] \frac{M_0 l^2}{E J_0} + C_2,$$

где

$$f(\xi) = \int_0^\xi f'(\xi) d\xi; \quad \varphi(\xi) = \int_0^\xi \varphi'(\xi) d\xi.$$

Функции $f(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ могут быть вычислены по правилу трапеций, если известны табличные значения функций $f'(\xi)$ и $\varphi'(\xi)$. Постоянная C_2 определится из второго граничного условия (IV.10):

$\xi = 0, v = 0$. Заменив v его выражением и имея в виду, что $f(0) = \varphi(0) = 0$, найдем $C_2 = 0$. Тогда для кривой прогиба окончательно получим

$$v(\xi) = \left[f(\xi) - \frac{k_6 f'(1)}{1 + k_6 \varphi'(1)} \varphi(\xi) \right] \frac{M_0 l^2}{E J_0}. \quad (\text{IV.22})$$

Рассмотрим частный случай лопаток постоянного сечения ($J = \text{const}$). В этом случае

$$f''(\xi) = (1 - \xi)^2; \quad \varphi''(\xi) = 1.$$

Следовательно:

$$f'(\xi) = \int_0^\xi (1 - \xi)^2 d\xi = \frac{1}{3} [1 - (1 - \xi)^3], \quad \varphi'(\xi) = \int_0^\xi d\xi = \xi;$$

$$f(\xi) = \int_0^\xi f'(\xi) d\xi = \frac{1}{12} [4\xi + (1 - \xi)^4 - 1];$$

$$\varphi(\xi) = \int_0^\xi \varphi'(\xi) d\xi = \xi^2/2.$$

Отсюда

$$f'(1) = 1/3; \quad \varphi'(1) = 1;$$

$$f(1) = 1/4; \quad \varphi(1) = 1/2.$$

Заменив в выражениях для напряжений и кривой прогиба $f'(1)$ и $\varphi'(1)$ полученными для них численными значениями, найдем окончательные расчетные формулы для лопаток постоянного сечения:

$$\sigma(0) = \frac{2k_6 + 3}{3(k_6 + 1)} \frac{M_0}{W};$$

$$\sigma_6 = \frac{k_6}{6(k_6 + 1)} \frac{M_0}{W_6 \cos \beta} \text{ или } \sigma_6 = \frac{k_6}{6(k_6 + 1)} \frac{M_0}{W_6} \cos \beta;$$

$$\sigma_{\text{ш}} = \frac{k_6}{3(k_6 + 1)} \frac{M_0}{z_{\text{ш}} W_{\text{ш}} \cos \beta} \text{ или } \sigma_{\text{ш}} = \frac{k_6}{3(k_6 + 1)} \frac{M_0}{z_{\text{ш}} W_{\text{ш}}};$$

$$v(\xi) = \{4\xi + (1 - \xi)^4 - 1 - [2k_6/(k_6 + 1)]\xi^2\} [M_0 l^2 / (12 E J_0)].$$

Пример. Рассчитать на статический изгиб от давления пара пакет лопаток, связанных бандажом. Число лопаток на колесе $z_1 = 126$. Число лопаток в пакете $m = 5$. Число шипов на лопатке $z_{\text{ш}} = 1$. Необходимые данные по лопатке и бандажу: $l = 250$ мм, $J_0 = 0,73 \cdot 10^4$ мм⁴; $\beta = 38^\circ$; $t_6 = 37,2$ мм, $J_6 = 0,364 \cdot 10^3$ мм⁴; $W_6 = 0,146 \cdot 10^3$ мм³; $W_{\text{ш}} = 0,256 \cdot 10^3$ мм³; $H_6 = 0,2$.

В табл. IV.1 вычислены функции f' , φ' , f и φ . При расчете лопатка разбивалась на десять равных участков. Интегрирование выполнялось по правилу трапеций. В таблице вычислен также относительный прогиб лопатки по формуле

$$\bar{v}(\xi) = \frac{v(\xi)}{v(1)} = \frac{f(\xi) - k_6 \eta_6 \varphi(\xi)}{f(1) - k_6 \eta_6 \varphi(1)},$$

где

$$\eta_6 = f'(1) / [1 + k_6 \varphi'(1)].$$

ξ	$J \cdot 10^{-4}$ мм ⁴	$\varphi''(\xi)$	$\varphi'(\xi)$	$\varphi(\xi)$	$(1-\xi)^2$	$f''(\xi)$	$f'(\xi)$	$f(\xi)$	$k_6 \eta_6 \varphi(\xi)$	$f(\xi) \cdot k_6 \eta_6 \varphi(\xi)$	$\bar{v}(\xi)$
0,05	0,657	1,111	0	0,0014	0,9025	1,003	0	0,0012	0,0001	0,0011	0,0039
0,15	0,530	1,377	0,1111	0,0125	0,7225	0,995	0,1003	0,0113	0,0013	0,0100	0,0350
0,25	0,430	1,698	0,2488	0,0374	0,5625	0,955	0,1998	0,0313	0,0038	0,0275	0,0962
0,35	0,368	1,984	0,4186	0,0792	0,4225	0,838	0,2953	0,0608	0,0080	0,0528	0,1848
0,45	0,309	2,362	0,6170	0,1409	0,3025	0,714	0,3791	0,0987	0,0143	0,0844	0,2954
0,55	0,242	3,016	0,8532	0,2262	0,2025	0,611	0,4505	0,1438	0,0229	0,1209	0,4232
0,65	0,180	4,056	1,1548	0,3417	0,1225	0,497	0,5116	0,1949	0,0346	0,1603	0,5611
0,75	0,140	5,214	1,5604	0,4978	0,0625	0,326	0,5613	0,2510	0,0505	0,2005	0,7018
0,85	0,112	6,518	2,0818	0,7060	0,0225	0,147	0,5939	0,3104	0,0716	0,2388	0,8358
0,95	0,093	7,849	2,7336	0,9793	0,0025	0,020	0,6086	0,3713	0,0993	0,2720	0,9520
			3,5185				0,6106				

Примечание. В таблице $\varphi''(\xi) = J_0/J(\xi, \eta'(0,0)) - 0,0125 \cdot \eta'(\xi) \cdot \eta(\xi)$; $\varphi'(\xi) = 0,0125 \cdot \eta(\xi) \cdot \eta'(\xi) + \eta'(\xi) \cdot \eta(\xi)$; $\varphi(\xi) = 0,0125 \cdot \eta(\xi) \cdot \eta'(\xi) + \eta'(\xi) \cdot \eta(\xi)$; $\eta_6 = f'(1)/[1 + k_6 \varphi'(1)] - 0,2538$; $f(1) = k_6 \eta_6 \varphi(1) = 0,2857$; $\eta_6 = f'(1)/[1 + k_6 \varphi'(1)] - 0,2538$; $f(1) = k_6 \eta_6 \varphi(1) = 0,2857$; $\eta_6 = f'(1)/[1 + k_6 \varphi'(1)] - 0,2538$; $f(1) = k_6 \eta_6 \varphi(1) = 0,2857$.

В табл. IV.2 подсчитаны изгибающие моменты в сечениях лопатки и напряжения изгиба в этих же сечениях. При этом из теплового расчета ступени принято, что максимальный расход пара $G = 51,7$ кг/с, а разность скоростей потока в окружном направлении $\Delta C_u = C_{1u} - C_{2u} = 244,8$ м/с. Парциальность ступени $\epsilon = 1$. Тогда

$$M_0 = \frac{G l \sum C_u}{2 \epsilon z_1} = \frac{51,7 \cdot 250 \cdot 244,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 1 \cdot 126} = 12,8 \text{ кН} \cdot \text{мм};$$

$$M_\xi^6 = k_6 \eta_6 M_0 = 0,3995 \cdot 0,2538 \cdot 12,8 = 1,3 \text{ кН} \cdot \text{мм}.$$

Таблица IV.2

ξ	$(1-\xi)^2$	$M_\xi(1-\xi)^2$		$M(\xi)$			$\sigma(\xi)$, МПа		
		кН мм		кН мм			спинка	входная кромка	выходная кромка
0,0	1,00	12,8	11,5	0,800	0,600	0,540	-14,4	19,2	21,3
0,1	0,81	10,4	9,1	0,705	0,510	0,485	-12,9	17,8	18,7
0,2	0,64	8,2	6,9	0,600	0,445	0,415	-11,5	15,5	16,6
0,3	0,49	6,3	5,0	0,535	0,390	0,365	-9,3	12,7	13,6
0,4	0,36	4,6	3,3	0,475	0,340	0,320	-7,0	9,7	10,3
0,5	0,25	3,2	1,9	0,410	0,285	0,270	-4,6	6,7	7,0
0,6	0,16	2,05	0,75	0,340	0,240	0,215	-2,2	3,1	3,5
0,7	0,09	1,15	-0,15	0,295	0,205	0,190	0,5	-0,7	-0,8
0,8	0,04	0,51	-0,79	0,250	0,180	0,155	3,2	-4,4	-5,1
0,9	0,01	0,13	-1,17	0,210	0,145	0,125	5,6	-8,1	-9,4
1,0	0,00	0,0	-1,3	0,165	0,120	0,100	7,9	-10,8	-13,0

Моменты в сечениях лопатки подсчитывались по формуле

$$M(\xi) = M_0(1-\xi)^2 - M_\xi^6.$$

С использованием формул (IV.20) и (VI.21) вычислим напряжения в бандаже

$$\sigma_6 = \frac{M_\xi^6}{2W_6 \cos \beta} = \frac{1,3 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,146 \cdot 10^3 \cdot 0,788} = 5,7 \text{ МПа};$$

и напряжения в шипах

$$\sigma_{ш} = \frac{M_\xi^6}{z_{ш} W_{ш} \cos \beta} = \frac{1,3 \cdot 10^3}{1 \cdot 0,256 \cdot 10^3 \cdot 0,788} = 6,4 \text{ МПа}.$$

Для рассчитанного пакета разгрузка корневое сечения лопатки от влияния бандажа составляет

$$\eta = 100k_6\eta_6 = 10,1\%.$$

Расчеты показывают, что разгрузка корневое сечения в большей степени зависит от параметра k_6 , т. е. от соотношения изгибных жесткостей бандажа и лопатки. Зависимость степени разгрузки корневое сечения лопатки от параметра k_6 представлена на рис. IV.6. Из кривой следует, что с увеличением относительной жесткости бандажа разгрузка лопатки возрастает.

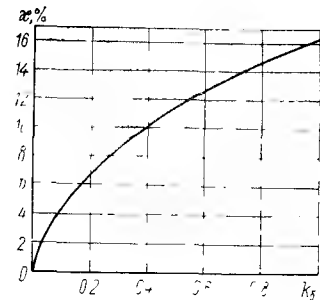


Рис. IV.6. Зависимость степени разгрузки корневое сечения лопатки от параметра k_6

Решение рассмотренной здесь задачи при учете конечного числа лопаток в пакете приведено в работе [107 и 233]. В первой из них решение получено для лопаток постоянного сечения, во второй — переменного. Расчеты показывают, как уже отмечалось, что максимальные напряжения бандаж испытывает в месте крепления его к крайней лопатке пакета, а из лопаток наиболее напряженной будет средняя в пакете. Для рассчитанного пакета напряжения в бандаже у крайней лопатки будут составлять 7,7 МПа, а максимальные напряжения в средней лопатке — 21,8 МПа. Таким образом, при учете конечного числа лопаток в пакете напряжения в бандаже оказываются на 35% выше средних, а в лопатках всего лишь на 2,3%.

IV.3. НАПРЯЖЕНИЯ В ПАКЕТЕ ЛОПАТОК ОТ ДЕЙСТВИЯ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ И ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим пакет лопаток, связанных бандажом, вращающийся вместе с диском. Будем считать, что бандаж, рабочие лопатки и диск имеют неодинаковый нагрев. Вследствие растяжения лопаток и деформации диска от действия центробежных сил, а также из-за их нагрева, периферийные сечения лопаток и бандаж переместятся на радиус $R_6 + \Delta R_6$ (рис. IV.7 и IV.8). По условию совместной деформации лопаток и бандажа такое перемещение должно сопровождаться растяжением бандажа и изгибом лопаток. Естественно, в месте соединения бандажа с лопатками появятся реактивные усилия, величина которых будет зависеть от соотношения жесткостей бандажа и лопаток соответственно на растяжение и изгиб. Найдем эти усилия, а вместе с ними растягивающие напряжения в бандаже, напряжения изгиба в лопатках и напряжения среза в шипах.

При решении задачи будем считать, что в силу симметрии среднее сечение бандажа при растяжении остается неподвижным.

Если с этим сечением совпадает средняя лопатка (нечетное число лопаток в пакете), то она при деформации будет оставаться в строго радиальном положении, а остальные лопатки будут изгибаться симметрично по отношению к ней. Примем это сечение за начало отсчета и будем рассматривать деформацию одной половины пакета. Обозначим через n — номер лопатки в пакете, считая от среднего сечения: Q_n^l — силу, действующую в периферийном сечении n -й лопатки в плоскости диска; Q_n — силу, действующую на бандаж от n -й лопатки (рис. IV.7).

При абсолютно жестких лопатках, как следует из рис. IV.8, периферийное сечение n -й лопатки (точка A) переместилось бы

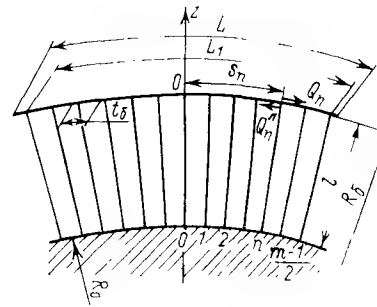


Рис. IV.7. Расчетная схема пакета лопаток

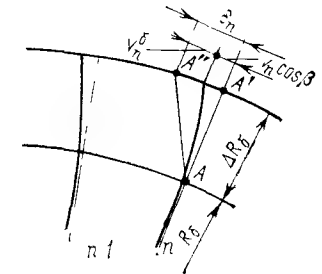


Рис. IV.8. Схема деформации лопаток и бандажа

в точку A' и сечение бандажа, совпадающее с этой лопаткой, получило бы перемещение

$$\delta_n = \frac{(R_6 + \Delta R_6) \varphi - R_6 \varphi}{R_6 \varphi} s_n = \frac{\Delta R_6}{R_6} s_n, \quad (IV.23)$$

где

$$\varphi = 2\pi (m - 1) z_1;$$

s_n — длина участка бандажа от среднего сечения до n -й лопатки; m — число лопаток в пакете; z_1 — число лопаток на диске

Величина $\Delta R_6 / R_6$ представляет собой относительную деформацию бандажа при абсолютно жестких лопатках

$$\Delta R_6 / R_6 = (\Delta R_d + \Delta l) / R_6 - \varepsilon_T,$$

где

$$\Delta R_d = R_0 (\sigma_\varphi - \nu \sigma_r) E + \alpha_d T_d R_0;$$

ΔR_d — перемещение диска на наружном радиусе R_0 ; $\Delta l =$

$$\frac{1}{E} \int_0^l \sigma dz + \alpha_d T_d l — \text{удлинение лопатки}; \quad \varepsilon_T = \alpha_6 T_6 — \text{темпе}$$

ратурная деформация бандажа вследствие его нагрева; σ_r , σ_φ и σ — радиальные и окружные напряжения на наружном радиусе диска и растягивающие напряжения в лопатке; T_d , T_l и T_6 — темпера-

тура нагрева диска, лопаток и бандажа; α_n , α_n и α_0 — коэффициенты линейного расширения; ν — коэффициент Пуассона

Заметим, что для относительно коротких лопаток можно принять

$$\Delta l = l \sigma_{cp} / E + \alpha_n T_n l,$$

где σ_{cp} — растягивающие напряжения в среднем сечении лопатки.

В силу того что лопатки не являются абсолютно жесткими, при их изгибе периферийные сечения под действием сил Q_n^n получают в плоскости диска перемещения $v_n \cos \beta$. В этом случае периферийное сечение n -й лопатки займет положение в точке A'' (рис. IV 8), а сечение бандажа, совпадающее с n -й лопаткой получит перемещение v_n^6 . Тогда уравнение совместности деформации n -й лопатки и бандажа можно записать в виде

$$v_n^6 + v_n \cos \beta = \delta_n. \quad (IV.24)$$

Условие равновесия сил в месте соединения лопатки и бандажа дает уравнение

$$Q_n = -Q_n^n. \quad (IV.25)$$

Изгибной жесткостью бандажа в этом случае пренебрегаем. Прогиб лопатки v_n под действием силы Q_n^n , приложенной в периферийном сечении, определится из уравнения

$$EJ \frac{d^2 v_n}{dz^2} = -(l - z) Q_n^n \cos \beta,$$

где J_0 — минимальный момент инерции сечения лопатки.

Переходя к относительной координате

$$\zeta = z/l; \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq z \leq l$$

и вводя обозначение

$$\psi''(\zeta) = (1 - \zeta) J_0 J,$$

получим

$$\frac{d^2 v_n}{d\zeta^2} = -Q_n^n \frac{l^3 \cos \beta}{EJ_0} \psi''(\zeta),$$

где J_0 — минимальный момент инерции корневого сечения.

После двукратного интегрирования с учетом того, что при $\zeta = 0$ $v_n = 0$; $v_n' = 0$, найдем

$$v_n = -Q_n^n \frac{l^3 \cos \beta}{EJ_0} \psi(\zeta),$$

где

$$\psi(\zeta) = \int_0^\zeta \psi'(\zeta) d\zeta; \quad \psi'(\zeta) = \int_0^\zeta (1 - \zeta) \frac{J_0}{J} d\zeta.$$

Тогда прогиб лопатки на вершине, с учетом (IV.25) будет

$$v_n = Q_n \frac{l^3 \cos \beta}{EJ_0} \psi(1). \quad (IV.26)$$

Найдем далее перемещение сечения бандажа совпадающего с n -й лопаткой. Относительная деформация бандажа в пролете между $(i - 1)$ -й и i -й лопатками

$$\varepsilon_i = \sigma_p^i / E,$$

где σ_p^i — растягивающее напряжение в бандаже в указанном пролете.

Суммируя абсолютные удлинения по всем пролетам от среднего сечения до n -й лопатки, получим: для нечетного числа лопаток в пакете

$$v_n^6 = l_6 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \frac{l_6}{E} \sum_{i=1}^n \sigma_p^i \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \dots, (m - 1) / 2; \quad (IV.27)$$

для четного числа

$$v_n^6 = \frac{l_6}{2} \varepsilon_1 + l_6 \sum_{i=2}^n \varepsilon_i = \frac{1}{2} \frac{l_6}{E} \sigma_p^1 + \frac{l_6}{E} \sum_{i=2}^n \sigma_p^i \quad \text{при} \quad n = 2, 3, \dots, m / 2. \quad (IV.27a)$$

Из уравнения равновесия отсеченной части бандажа находим: для нечетного числа лопаток в пакете

$$\sigma_p^i = \frac{1}{F_6} \sum_{j=i}^{\frac{m-1}{2}} Q_j; \quad (IV.28)$$

для четного числа

$$\sigma_p^i = \frac{1}{F_6} \sum_{j=i}^{\frac{m}{2}} Q_j, \quad (IV.28a)$$

где F_6 — площадь поперечного сечения бандажа.

Подставляя значения напряжений в формулы (IV.27) и (IV.27a), имеем: для нечетного числа лопаток в пакете

$$v_n^6 = \frac{l_6}{EF_6} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^{\frac{m-1}{2}} Q_j \right) \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \dots, (m - 1) / 2; \quad (IV.29)$$

для четного числа

$$v_n^6 = \frac{1}{2} \frac{l_6}{EF_6} \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} Q_j + \frac{l_6}{EF_6} \sum_{i=2}^n \left(\sum_{j=i}^{\frac{m}{2}} Q_j \right) \quad \text{при} \quad n = 2, 3, \dots, m / 2. \quad (IV.29a)$$

Подставив теперь значения перемещений (IV.23), (IV.26), (IV.29) и (IV.29a) в условие совместности деформации лопаток и

бандажа (IV.24), получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных усилий Q_n : для нечетного числа лопаток в пакете

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^{\frac{m-1}{2}} Q_j \right) + kQ_n = nD \text{ при } n = 1, 2, \dots, (m-1)/2; \quad (\text{IV } 30)$$

для четного числа

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} Q_i + \sum_{i=2}^n \left(\sum_{j=i}^{\frac{m}{2}} Q_j \right) + kQ_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) D \text{ при } n = 2, 3, \dots, m/2, \quad (\text{IV } 30a)$$

где

$$k = \frac{F_6 l^3}{J_0 l_0^3} \Psi(1) \cos^2 \beta; \quad D = \frac{\Delta R_6}{R_6} E F_6$$

Запишем для примера одну из этих систем в развернутом виде. Так, для пятилопаточного пакета ($m = 5$) система (IV.30) будет иметь вид.

$$(1 + k)Q_1 + Q_2 = D; \\ Q_1 + (2 + k)Q_2 = 2D;$$

для семилопаточного пакета ($m = 7$)

$$(1 + k)Q_1 + Q_2 + Q_3 = D, \\ Q_1 + (2 + k)Q_2 + 2Q_3 = 2D, \\ Q_1 + 2Q_2 + (3 + k)Q_3 = 3D;$$

для девятилопаточного пакета ($m = 9$)

$$(1 + k)Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = D; \\ Q_1 + (2 + k)Q_2 + 2Q_3 + 2Q_4 = 2D; \\ Q_1 + 2Q_2 + (3 + k)Q_3 + 3Q_4 = 3D; \\ Q_1 + 2Q_2 + 3Q_3 + (4 + k)Q_4 = 4D$$

и т. д.

Для пяти- и семилопаточного пакетов можно записать расчетные формулы для определения максимальных усилий:

$$Q_{\max}^{(5)} = dD, \quad Q_{\max}^{(7)} = (1 + kd)D [1 + k(1 + d)],$$

где

$$d = (2k + 1)/(k^2 + 3k + 1).$$

Определив усилия Q_n , действующие на бандаж и на каждую лопатку в пакете, можно вычислить напряжения растяжения в бандаже, напряжения изгиба в лопатках и напряжения среза в шп

пах. В соответствии с (IV.28) и (IV.28a) максимальные напряжения в бандаже будут: для нечетного числа лопаток в пакете

$$\sigma_p^{\max} = \frac{1}{F_6} \sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} Q_j; \quad (\text{IV } 31)$$

для четного числа

$$\sigma_p^{\max} = \frac{1}{F_6} \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} Q_j \quad (\text{IV.31a})$$

Изгибающий момент в корневом сечении лопатки

$$M_n(0) = lQ_n^1 \cos \beta.$$

Тогда напряжения изгиба в этом сечении

$$\sigma_{изг}(0) = Q_n^1 l \cos \beta W(0), \quad (\text{IV } 32)$$

где $W(0)$ — минимальный момент сопротивления корневого сечения лопатки

Напряжения среза в шпцах

$$\sigma_{ср} = Q_n^{1'}(z_{ш} l'_{ш}), \quad (\text{IV } 33)$$

где $z_{ш}$ — число шпцов на лопатке, $F_{ш}$ — площадь среза шипа

Вычисления показывают, что максимальные напряжения имеют место в крайней лопатке пакета. Это следует из физического смысла задачи. Реализация полученного решения, как это было показано, связана с решением системы алгебраических уравнений. Порядок системы будет определяться числом лопаток в пакете. В силу этого расчет пакетов с большим числом лопаток, в частности «пакетов», замкнутых на круг с одним разъемом, будет являться трудоемким. В этом случае более эффективным может оказаться приближенное решение, основанное на том, что число лопаток в пакете велико и их воздействие на бандаж можно заменить распределенной нагрузкой. Приближенно расчетную схему бандажа будем представлять в виде полосы длиной L , нагруженной непрерывно распределенной нагрузкой q , интенсивность которой на каждом шаге определяется усилием воздействия лопатки на бандаж (рис. IV.9). Интенсивность нагрузки и закон ее распределения по длине бандажа должны определяться из условия совместности деформации лопаток и бандажа. Условие совместности деформации (IV.24) в этом случае может быть записано в виде

$$v^6(s) + v_n \cos \beta = \delta(s), \quad (\text{IV.34})$$

где $v^6(s)$ — перемещение сечения бандажа с координатой s ; v_n — прогиб n -й лопатки, определяемый равенством (IV.26); s — текущая координата по длине бандажа, определяющая положение n -й лопатки

Величина $\delta(s)$ определяется равенством (IV.23), которое в данном случае примет вид

$$\delta(s) = (\Delta R_6 / R_6) s. \quad (IV.35)$$

Учитывая, что в соответствии с постановкой задачи

$$Q_n = q(s) t_6;$$

из равенства (IV.26) находим

$$v_n \cos \beta = q(s) \frac{l^3 t_6}{E J_0} \cos^2 \beta \psi(1).$$

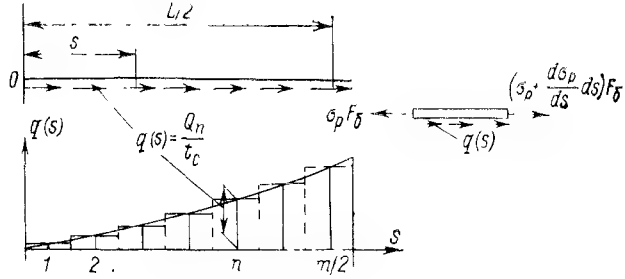


Рис. IV.9. Расчетная схема пакета при большом числе лопаток

Из уравнения равновесия элемента бандажа следует (рис. IV.9)

$$F_6 \frac{d\sigma_p}{ds} = -q(s),$$

где σ_p — растягивающее напряжение в бандаже.

Учитывая, что

$$\sigma_p = E \varepsilon_6 = E \frac{dv_6}{ds},$$

получим

$$q(s) = -E F_6 \frac{d^2 v_6}{ds^2},$$

тогда

$$v_n \cos \beta = - \frac{l^3 F_6 t_6}{J_0} \frac{d^2 v_6}{ds^2} \psi(1) \cos^2 \beta. \quad (IV.36)$$

Подставляя (IV.35) и (IV.36) в равенство (IV.34), окончательно имеем:

$$\frac{d^2 v_6}{ds^2} - \lambda^2 v_6 = -\lambda^2 \frac{\Delta R_6}{R_6} s, \quad (IV.37)$$

где $\lambda^2 = J_0 / [l^3 F_6 t_6 \cos^2 \beta \psi(1)]$.

Полученное уравнение является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка относительно неизвестного перемещения $v_6(s)$. Решение однородного уравнения будем искать в виде $\exp(\alpha s)$.

Подставляя это решение в уравнение (IV.37) без правой части, получим $\alpha^2 - \lambda^2 = 0$, откуда

$$\alpha_{1,2} = \pm \lambda.$$

Тогда решение однородного уравнения будет

$$v_0^6 = C_1 e^{\lambda s} + C_2 e^{-\lambda s},$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Частное решение представим так:

$$v_1^6 = A s.$$

Подставив его в уравнение (IV.37), находим

$$A = \Delta R_6 / R_6$$

Окончательно полное решение уравнения (IV.37) будет иметь вид

$$v_6 = v_0^6 + v_1^6 = C_1 e^{\lambda s} + C_2 e^{-\lambda s} + \frac{\Delta R_6}{R_6} s. \quad (IV.38)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из следующих граничных условий:

$$s = 0, \quad v_6(0) = 0;$$

$$s = L/2, \quad \sigma_p(L/2) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dv_6}{ds} \Big|_{s=L/2} = 0,$$

где $L = m t_6$ — длина пакета.

Используя решение (IV.38), получаем алгебраическую систему двух уравнений относительно C_1 и C_2 , откуда находим

$$C_1 = - \frac{1}{\lambda} \frac{\Delta R_6}{R_6} \frac{1}{e^{-\lambda L/2} (e^{\lambda L} + 1)} = - C_2.$$

Подставляя полученные значения постоянных в (IV.38), получим

$$v_6 = \frac{1}{\lambda} \frac{\Delta R_6}{R_6} \left[\lambda s - e^{-\lambda(L/2-s)} \frac{1 - e^{-2\lambda s}}{1 + e^{-\lambda L}} \right]. \quad (IV.39)$$

Теперь можно определить растягивающие напряжения в бандаже

$$\sigma_p = E \frac{dv_6}{ds} = E \frac{\Delta R_6}{R_6} \left(1 - e^{-\lambda(L/2-s)} \frac{1 + e^{-2\lambda s}}{1 + e^{-\lambda L}} \right). \quad (IV.40)$$

Максимальные напряжения будут иметь место в среднем сечении бандажа¹ при $s = 0$

$$\sigma_p^{\max} = E \frac{\Delta R_6}{R_6} \left(1 - \frac{2e^{-\lambda L/2}}{1 + e^{-\lambda L}} \right). \quad (IV.41)$$

¹ Для учета ослабления бандажа отверстиями под шипы полученные значения напряжений нужно умножить на $F_6 / F_6^{\text{с.п.}}$.

В предельном случае, для достаточно большого λL , второе слагаемое в формуле (IV.41) стремится к нулю, а напряжения приближаются к своему предельному значению и перестают зависеть от числа лопаток в пакете

$$\sigma_p^{pr} = E (\Delta R_6 / R_6). \quad (IV.42)$$

При относительно жестких лопатках (лопатки первых ступеней части высокого давления) максимальные напряжения в бандаже

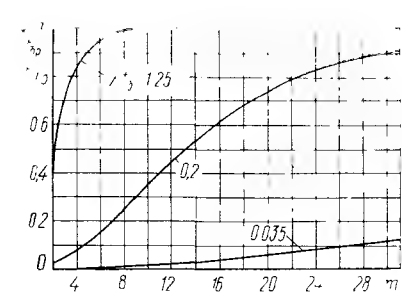


Рис. IV.10. Отношение максимальных напряжений в бандаже к предельным в зависимости от относительной жесткости лопаток и числа их в пакете

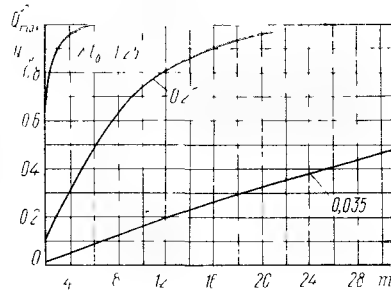


Рис. IV.11. Отношение максимальных усилий, действующих на лопатки, к предельным в зависимости от относительной жесткости лопаток и числа их в пакете

будут близки к своему предельному значению уже при пяти—десяти лопатках в пакете. Для гибких лопаток, даже при объединении их в единый «пакет» с одним разъемом, эти напряжения будут существенно меньше предельных (рис. IV.10).

Определим далее усилия, действующие на лопатки. Как было показано выше,

$$Q_n = q(s) t_6 = -EF_6 t_6 \frac{d^2 v}{ds^2}.$$

Найдя вторую производную от перемещения v и учитывая (IV.25), окончательно будем иметь

$$Q_n^{pr} = -\lambda F_6 t_6 E \frac{\Delta R_6}{R_6} e^{-\lambda(L/2-s)} \frac{1 - e^{-2\lambda s}}{1 + e^{-\lambda L}}. \quad (IV.43)$$

При $s = L_1/2$, где $L_1 = (m-1)t_6$, получим усилие, действующее на крайнюю лопатку в пакете, которое будет максимальным:

$$|Q_{max}^{pr}| = \lambda F_6 t_6 E \frac{\Delta R_6}{R_6} e^{-\frac{\lambda L_1}{2}} \frac{1 - e^{-\lambda L_1}}{1 + e^{-\lambda L}}. \quad (IV.44)$$

Из полученной формулы следует, что для достаточно большого λL максимальное усилие будет также стремиться к своему предельному значению, не зависящему от числа лопаток в пакете:

$$Q_{pr}^{pr} = \lambda F_6 t_6 E \frac{\Delta R_6}{R_6} e^{-\lambda L_1/2}. \quad (IV.45)$$

Как и напряжения в бандаже, усилия Q_{max}^{pr} будут достигать своего предельного значения при небольшом числе лопаток в пакете, если их жесткость велика. Для лопаток с малой жесткостью эти усилия будут оставаться значительно меньше предельных даже при замыкании их в единый пакет с одним разъемом (рис. IV.11). Зная усилия, действующие на лопатки, можно подсчитать напряжения изгиба в лопатках и напряжения среза в шипах по формулам (IV.32) и (IV.33).

Таким образом, представленное приближенное решение позволяет получить простые расчетные формулы для определения напряжений в бандаже и усилий, действующих на лопатки с любым числом их в пакете. Сопоставление показывает, что погрешность, которую дает приближенное решение, невелика. Уже при пяти—семи лопатках в пакете значения напряжений в бандаже и усилий, вычисленные по двум предложенным методам, практически совпадают. Нужно иметь в виду, что в силу наличия возможных технологических зазоров и неплотности между шипами лопаток и бандажом, а также между хвостами фактические значения напряжений как в бандаже, так и в лопатках будут ниже расчетных.

Пример. Рассчитать пакет лопаток, связанных бандажом, находящийся под действием центробежных сил и температурного поля. Число лопаток в пакете $m = 7$. Необходимые данные по лопатке и бандажу: $l = 94$ мм; $J_0 = 14,6 \cdot 10^4$ мм⁴; $W(0) = 5,8 \cdot 10^3$ мм³; $\beta = 27^\circ$; $t_6 = 54$ мм; $F_6 = 3,4 \times 10^2$ мм²; $R_6 = 515$ мм; $z_{ш} = 2$; $F_{ш} = 1,35 \cdot 10^2$ мм²; $R_0 = 421$ мм.

Значения напряжений на наружном радиусе диска и растягивающие напряжения в среднем сечении лопатки равны: $\sigma_r = 52,0$ МПа; $\sigma_\phi = 49,0$ МПа; $\sigma_{cr}^{pr} = 21,5$ МПа. В табл. IV.3 дано вычисление функции $\psi(1)$.

Температура нагрева диска, лопаток и бандаж одинакова и равна $T_d = T_n = T_6 = 500^\circ\text{C}$. При этой температуре: $\alpha_d = 13,72 \cdot 10^{-6}$; $E_d = 1,86 \times 10^5$ МПа; $\alpha_n = \alpha_6 = 11,7 \cdot 10^{-6}$; $E_n = E_6 = E = 1,8 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$.

Таблица IV.3

ξ	$1 - \xi$	J_0 / l	$\psi''(\xi)$	$\psi'(\xi)$	$\psi(\xi)$
0,05	0,95	1,092	1,037	0	0,0013
0,15	0,85	1,281	1,089	0,1037	0,0117
0,25	0,75	1,430	1,072	0,2126	0,0329
0,35	0,65	1,620	1,053	0,3198	0,0649
0,45	0,55	1,845	1,015	0,4251	0,1074
0,55	0,45	2,130	0,958	0,5266	0,1601
0,65	0,35	2,520	0,882	0,6224	0,2223
0,75	0,25	2,980	0,745	0,7106	0,2934
0,85	0,15	3,610	0,541	0,7851	0,3719
0,95	0,05	4,430	0,221	0,8392	0,4558
				0,8613	

Примечание. В таблице: $\psi''(\xi) = J_0 / l \times \times (1 - \xi)$; $\psi(1) = \psi(0,95) + 0,0125 [\psi'(1) + \psi'(0,9)] = 0,499$

Вычисляем радиальное перемещение диска на наружном радиусе и удлинение лопатки:

$$\Delta R_d = R_0 [(\sigma_\varphi - \nu \sigma_r)/E_d + \alpha_d T_d] =$$

$$\Rightarrow 421 [(49,0 - 0,3 \cdot 52,0)/1,86 \cdot 10^5 + 13,72 \cdot 10^{-6} \cdot 500] = 2,96 \text{ мм};$$

$$\Delta l = l(\sigma_{cp}^n/E + \alpha_d T_d) = 94 (21,5/1,8 \cdot 10^5 + 11,7 \cdot 10^{-6} \cdot 500) = 0,56 \text{ мм}.$$

Т а б л и ц а IV.4

Величина	n			
	0	1	2	3
$s = nt_\delta$, мм	0	54	108	162
$2\lambda s$	0	0,531	1,063	1,594
$\lambda (L/2 - s)$	0,930	0,664	0,399	0,133
Q_n^n , Н	0	2940	6080	9660
Q_n^n (точн.), Н	0	2939	6075	9651

Относительная деформация бандажа

$$\Delta R_6/R_6 = (\Delta R_d - \Delta l)/R_6 =$$

$$= (2,96 - 0,56)/515 =$$

$$= 11,7 \cdot 10^{-6} \cdot 500 = 0,985 \cdot 10^{-3}.$$

Постоянная

$$\lambda = \sqrt{J_0/[I^3 F \delta \Phi (1) \cos^2 \beta]} =$$

$$= 14,6 \cdot 10^4 / 94^3 \cdot 3,4 \cdot 10^2 \times$$

$$\times 54 \cdot 0,499 \cdot 0,891^2 = 0,492 \times$$

$$\times 10^{-2} \text{ 1/мм}.$$

Имея в виду, что $L = mt_\delta = 378$ мм и $e^{-\lambda L} = 0,156$, для вычисления усилий, действующих на лопатки, в соответствии с (IV.43) получаем формулу

$$|Q_n^n| = 13850 (1 - e^{-2\lambda s}) e^{-\lambda (L/2 - s)} \text{ Н}.$$

Дальнейшие вычисления усилий Q_n^n сведены в табл. IV.4. В этой же таблице приведены значения усилий, полученные из решения алгебраической системы уравнений (IV.30) при $k = 14,16$; $D = 60280$ Н. Значения этих усилий условно названы точными.

Зная усилия, подсчитаем напряжения изгиба в корневом сечении крайней лопатки ($n = 3$) и напряжения среза в шипах по формулам (IV.32) и (IV.33):

$$\sigma_{изг}(0) = Q_3^n l \cos \beta / W(0) = 9660 \cdot 94 \cdot 0,891 / 5,8 \cdot 10^3 = 139 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{ср} = Q_3^n (z_{ш} F_{ш}) = 9660 / 2 \cdot 1,35 \cdot 10^2 = 35,8 \text{ МПа}.$$

Максимальные растягивающие напряжения в бандаже вычисляем по формуле (IV.41)

$$\sigma_p^{max} = E \frac{\Delta R_6}{R_6} \left(1 - \frac{2e^{-\lambda L/2}}{1 + e^{-\lambda L}} \right) =$$

$$= 1,8 \cdot 10^5 \cdot 0,985 \cdot 10^{-3} \cdot 0,318 = 56,2 \text{ МПа}.$$

Заметим, что предельные значения напряжений в бандаже и усилий, действующих на лопатки, в соответствии с формулами (IV.42) и (IV.45) равны:

$$\sigma_p^{up} = E (\Delta R_6 / R_6) = 1,8 \cdot 10^5 \cdot 0,985 \cdot 10^{-3} = 177,3 \text{ МПа};$$

$$Q_{np}^n = \lambda F \delta t_\delta E (\Delta R_6 / R_6) \exp(-\lambda t_\delta/2) =$$

$$= 0,492 \cdot 10^{-2} \cdot 3,4 \cdot 10^2 \cdot 54 \cdot 1,8 \cdot 10^5 \cdot 0,985 \cdot 10^{-3} \cdot 0,875 = 14020 \text{ Н}.$$

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ГИБКИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ЛОПАТОК

V.1. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА И ПРИНЯТЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

Особенность расчета гибких естественно закрученных лопаток заключается в том, что при рассмотрении их деформации необходимо учитывать взаимосвязанность деформаций растяжения, изгиба и кручения. Кроме того, при вычислении изгибающего и крутящего моментов нельзя считать малыми упругие прогибы и углы поворота сечений и пренебрегать ими, как это делалось при расчете жестких лопаток. Необходимо также учитывать совместное действие на лопатку центробежных сил и паровых усилий.

При выборе расчетной схемы лопатку будем представлять как тонкий естественно закрученный стержень переменного сечения. При этом, кроме принятых выше предположений (см. гл. III), будем считать следующее.

1. Линии, соединяющие соответственные точки в двух близлежащих сечениях, являются винтовыми линиями (точки M и M' на рис. V.1), а совокупность этих винтовых линий образует тело лопатки.

2. В соответствии с теорией тонких стержней поперечным сжатием волокон, а также сдвигами в плоскости сечений лопатки можно пренебречь.

3. Лопатки могут иметь демпферные связи и бандаж, ограничивающий их раскрутку в поле центробежных сил.

Будем рассматривать лопатку в прямоугольной системе координат XYZ , жестко связанной с диском (рис. V.1). Ось Z направим по радиусу вдоль лопатки в сторону вершины, а ось X — параллельно оси вращения в сторону выходной кромки. Как правило, ось X или совмещают с осью симметрии хвоста лопатки, или проводят через центр тяжести корневое сечения. Ось Y перпендикулярна к плоскости XOZ и направлена от спинки в сторону вогнутой части профиля. Плоскость XOZ обычно совмещается со средней плоскостью диска. Как и выше (см. п. III.2), принятая система координат для лопатки правого вращения является правой. В каждом сечении лопатки будем вводить местную систему центральных осей $\xi\eta\zeta$. Оси этой системы параллельны осям XYZ , а начало координат совпадает с центром тяжести сечения (рис. V.1). В каждом сечении лопатки будем рассматривать также главные центральные оси $\xi\eta\zeta$ (рис. V.1), повернутые относительно осей $\xi\eta\zeta$ на угол β , соответствующий углу начальной закрутки профиля лопатки. Угол $\beta(z)$ считается положительным, если в принятой

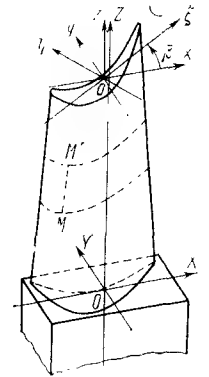


Рис. V.1. Принятая система координат

системе координат со стороны положительного направления оси z поворот сечения происходит против часовой стрелки.

Для принятых осей координат имеются известные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \cos \beta + y \sin \beta; \\ \eta &= -x \sin \beta + y \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (V.1)$$

и обратные им

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos \beta - \eta \sin \beta; \\ y &= \xi \sin \beta + \eta \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (V.1a)$$

Рассмотрим элемент винтового волокна 1 длиной ds , ограниченный двумя сечениями лопатки, расстояние между которыми равно dz (рис. V.2). Проекция этого элемента на ось z будет равна dz , а на плоскость поперечного сечения 2 $ds_z = d\beta r_1$, где r_1 — расстояние от центра тяжести сечения до рассматриваемого волокна.

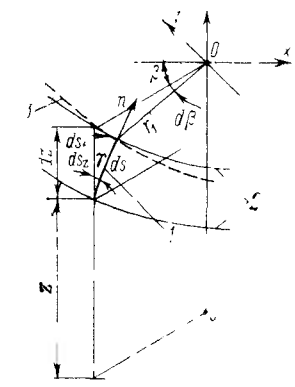


Рис. V.2. Сечения лопатки (плоское 2 и ортогональное 3) и винтовое волокно 1

Пусть γ — угол наклона винтового волокна к оси, параллельной оси z . Тогда из рис. V.2 следует

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{ds_z}{dz} = \frac{d\beta}{dz} r_1 = \tau_0 r_1,$$

где $\tau_0 = d\beta/dz$ — относительный угол начальной закрутки профиля.

Можно показать, что для гурбинных профилей угол наклона винтового волокна настолько мал, что

$$\tau_0 r_1 \ll 1. \quad (V.2)$$

В соответствии с этим будем полагать, что

$$\sin \gamma = \tau_0 r_1; \quad \cos \gamma = 1,0. \quad (V.2a)$$

В дальнейшем, наряду с плоским сечением лопатки 2, будем рассматривать ортогональное сечение 3 (рис. V.2), представляющее собой поверхность, ортогональную ко всем винтовым линиям [206; 208]. Напряжения растяжения — сжатия, действующие вдоль винтовых линий, будут являться нормальными к ортогональному сечению.

V.2. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЯ

Пусть $U(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ — перемещения любой точки винтового волокна в направлениях осей x и y . Будем представлять эти перемещения как перемещения центра тяжести поперечного сече-

ния в своей плоскости и поворот этого сечения относительно центра тяжести на некоторый угол $\theta(z)$ (рис. V.3). Тогда:

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= u(z) - \theta(z) y; \\ V(x, y, z) &= v(z) + \theta(z) x, \end{aligned} \right\} \quad (V.3)$$

где $u(z)$ и $v(z)$ — перемещения центра тяжести в направлениях осей x и y ; $\theta(z)$ — упругий угол поворота сечения при кручении лопатки; x и y — координаты точки сечения.

Радиальное перемещение точки, лежащей на винтовой линии, обозначим $W(x, y, z)$. Оно будет складываться из поступательного перемещения сечения в направлении оси z и перемещений, которые появляются в результате поворота этого сечения относительно осей x и y при изгибе лопатки. Углы поворота сечения при изгибе таковы:

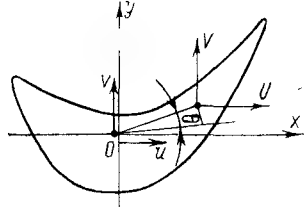


Рис. V.3. Положительные направления перемещений

$$\begin{aligned} \frac{dU(z)}{dz} &= \frac{du}{dz}; \\ \frac{dV(z)}{dz} &= \frac{dv}{dz}. \end{aligned}$$

При кручении лопатки ее сечения будут деформироваться. Это приведет к появлению дополнительного осевого перемещения точки, пропорционального относительному углу поворота $d\theta/dz$. В результате полное осевое перемещение точки, лежащей на винтовой линии, с учетом положительных направлений u и v определится равенством

$$W(x, y, z)$$

$$= w(z) - \frac{du}{dz} x - \frac{dv}{dz} y + \frac{d\theta}{dz} \varphi(x, y, z), \quad (V.4)$$

где $w(z)$ — поступательное перемещение сечения в направлении оси z ; $\varphi(x, y, z)$ — функция кручения, определяемая формой поперечного сечения стержня (лопатки).

Для закрученного стержня постоянного сечения функция φ в системе главных центральных осей сохраняет свое значение, а для закрученного стержня переменного сечения — свой характер. Поэтому в дальнейшем функцию кручения будем представлять в главных центральных осях $\varphi = \varphi(\xi, \eta, z)$.

Найдем теперь относительные деформации и сдвиги. Заметим, что в соответствии с теорией тонких стержней

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Дифференцируя выражение (V.4) по z , находим относительное удлинение винтового волокна лопатки, учитывая, что его наклон к оси z мал:

$$\varepsilon = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{dw}{dz} - \frac{d^2u}{dz^2} x - \frac{d^2v}{dz^2} y + \frac{d\theta}{dz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + \frac{d\theta}{dz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{d^2\theta}{dz^2} \varphi(\xi, \eta, z).$$

В соответствии с тем, что форма и размеры лопатки плавно изменяются по высоте, слагаемое $\frac{d\theta}{dz} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ мало и им можно пренебречь [44]. Последнее слагаемое в полученном равенстве определяет стесненность кручения, эффект которого проявляется вблизи заделки лопатки. Учитывая местное влияние стесненности кручения для длинного тонкого стержня, это слагаемое в дальнейшем будем отбрасывать.

По формуле (V.1) получаем:

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = -x \sin \beta \frac{d\beta}{dz} + y \cos \beta \frac{d\beta}{dz} = \eta \frac{d\beta}{dz};$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = -x \cos \beta \frac{d\beta}{dz} - y \sin \beta \frac{d\beta}{dz} = -\xi \frac{d\beta}{dz}.$$

Тогда выражение для относительного удлинения винтового волокна примет вид

$$\varepsilon = \frac{dw}{dz} - \frac{d^2u}{dz^2} x - \frac{d^2v}{dz^2} y + \tau_0 \tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \eta - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \xi \right), \quad (V.5)$$

где $\tau = d\theta/dz$ — относительный угол упругого поворота сечений.

Определить деформации сдвига можно с помощью известных формул [172]:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Подставляя сюда (V.3) и (V.4) и замечая, что в соответствии с (V.1)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \cos \beta;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} = \sin \beta,$$

находим:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cos \beta - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \sin \beta - y \right); \\ \gamma_{yz} &= \tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \sin \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cos \beta + x \right). \end{aligned} \right\} \quad (V.6)$$

Для дальнейших вычислений определим сдвиги в плоскостях, одна из которых содержит ось z и радиус r_1 , а другая перпендикулярна к ней (рис. V.4). Радиус $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ определяет положение точки с координатами x и y .

Используя формулы преобразования составляющих тензора деформаций при повороте осей [172], получим:

$$\gamma_{rz} = \gamma_{xz} \cos \alpha + \gamma_{yz} \sin \alpha; \quad \gamma_{tz} = \gamma_{yz} \cos \alpha - \gamma_{xz} \sin \alpha,$$

где γ_{rz} и γ_{tz} — сдвиги в плоскости r_1oz и перпендикулярной к ней. Подставляя сюда (V.6) и замечая, что

$$\sin \alpha = y/r_1; \quad \cos \alpha = x/r_1,$$

окончательно находим:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{rz} &= \frac{\tau}{r_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \eta \right); \\ \gamma_{tz} &= \frac{\tau}{r_1} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \eta + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \xi + r_1^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (V.7)$$

Для удлиненных профилей сдвиги в плоскостях, перпендикулярных к радиусу r_1 , в точках, где $r_1 \gg c$ (c — максимальная толщина профиля), оказываются малыми величинами [41; 44]. В этих точках можно принять, что $\gamma_{tz} \approx 0$ и в соответствии с (V.7)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \eta - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \xi \approx r_1^2. \quad (V.8)$$

С учетом полученного равенства (V.8) выражение для относительного удлинения волокна можно записать в виде

$$\varepsilon = \frac{dw}{dz} - \frac{d^2u}{dz^2} x - \frac{d^2v}{dz^2} y + \tau_0 \tau r_1^2. \quad (V.9)$$

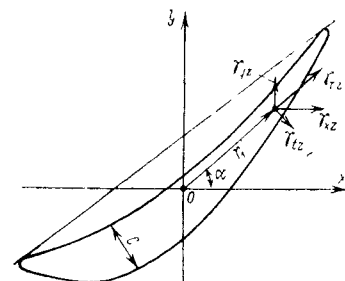


Рис. V.4. Деформация сдвига

Последнее слагаемое в формуле (V.9) определяет относительное удлинение винтового волокна вследствие кручения лопатки. Эту составляющую можно получить также из рассмотрения рис. V.2

Выше было показано, что проекции элемента винтового волокна на ось z и в плоскости поперечного сечения равны:

$$ds_z = dz; \quad ds_t = d\beta r_1.$$

Длину этого элемента найдем как:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(ds_z)^2 + (ds_t)^2} = dz \sqrt{1 + (\tau_0 r_1)^2} \approx \\ &\approx dz (1 + 0,5 \tau_0^2 r_1^2). \end{aligned}$$

Это будет длина элемента винтового волокна до деформации лопатки. После деформации проекции винтового волокна станут равными:

$$ds_z^* = dz (1 + \varepsilon_0); \quad ds_t^* = d(\beta + \theta) r_1,$$

где ε_0 — относительная деформация в направлении оси z вследствие растяжения и изгиба лопатки.

Тогда длина элемента

$$ds^4 = \sqrt{(ds_z^*)^2 + (ds_t^*)^2} = dz \sqrt{(1 + \epsilon_0)^2 + (\tau_0 + \tau)^2 r_1^2} \approx [1 + \epsilon_0 + 0,5(\tau_0 + \tau)^2 r_1^2] dz.$$

Относительная деформация волокна определится отношением

$$\epsilon = (ds^* - ds)/ds.$$

Подставляя сюда значения ds и ds^* и отбрасывая члены, порядок которых выше $\tau_0 \tau$, получим

$$\epsilon = \epsilon_0 + \tau_0 \tau r_1^2. \quad (V.9a)$$

Зная относительные деформации, согласно закону Гука, находим:

$$\sigma = E\epsilon; \quad \bar{\tau}_{rz} = G\gamma_{rz}; \quad \bar{\tau}_{tz} = G\gamma_{tz},$$

где E и G — модуль продольной упругости и модуль сдвига материала.

В соответствии с (V.7) и (V.9) выражения для напряжений в ортогональном сечении можно записать в виде:

$$\sigma = E \left(\frac{dw}{dz} - \frac{d^2u}{dz^2} x - \frac{d^2v}{dz^2} y + \tau_0 \tau r_1^2 \right); \quad (V.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{rz} &= G \frac{\tau}{r_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \eta \right); \\ \bar{\tau}_{tz} &= G \frac{\tau}{r_1} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \eta + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \xi + r_1^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (V.11)$$

Для перехода от ортогонального сечения к плоскому поперечному сечению лопатки воспользуемся формулами преобразования составляющих тензора напряжений при переходе к наклонной площадке [172]. В данном случае площадка, принадлежащая плоскому сечению, наклонена к площадке, принадлежащей ортогональному сечению, на угол γ . Тогда:

$$\sigma_z = \sigma \cos^2 \gamma - \bar{\tau}_{tz} \sin^2 \gamma;$$

$$\tau_{rz} = \bar{\tau}_{rz} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma);$$

$$\tau_{tz} = \bar{\tau}_{tz} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) + \sigma \sin \gamma \cos \gamma,$$

где σ_z , τ_{rz} , $\bar{\tau}_{tz}$ — нормальные и касательные напряжения в плоском сечении лопатки.

В силу (V.2) и (V.2a) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \sigma - 2\bar{\tau}_{tz} \tau_0 r_1; \\ \tau_{rz} &= \bar{\tau}_{rz}; \\ \tau_{tz} &= \bar{\tau}_{tz} + \sigma \tau_0 r_1. \end{aligned} \right\} \quad (V.12)$$

Второе слагаемое в первом равенстве можно в дальнейшем отбросить, как малое по сравнению с величиной σ .

Подставляя сюда (V.10) и (V.11) и учитывая (V.1a), окончательно будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= E \left[\frac{dw}{dz} - \frac{d^2u}{dz^2} (\xi \cos \beta - \eta \sin \beta) - \frac{d^2v}{dz^2} \times \right. \\ &\quad \times (\xi \sin \beta + \eta \cos \beta) + \tau_0 \tau r_1^2 \Big]; \\ \tau_{rz} &= G \frac{\tau}{r_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \eta \right); \\ \tau_{tz} &= G \frac{\tau}{r_1} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \eta + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \xi + r_1^2 \right) + E \tau_0 r_1 \left[\frac{dw}{dz} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d^2u}{dz^2} (\xi \cos \beta - \eta \sin \beta) - \frac{d^2v}{dz^2} (\xi \sin \beta + \eta \cos \beta) + \tau_0 \tau r_1^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (V.13)$$

Положительные направления нормальных и касательных напряжений в принятой системе координат представлены на рис. V.5. Формулы (V.12) могут быть получены также из рассмотрения условий равновесия элементарного параллелепипеда, одна грань которого принадлежит ортогональному, а другая (косая) — поперечному сечению лопатки.

Таким образом, полученные формулы для напряжений содержат четыре неизвестные функции: перемещения u , v , w и упругий угол поворота θ . Для определения этих неизвестных необходимо рассмотреть уравнения равновесия отсеченной части лопатки.

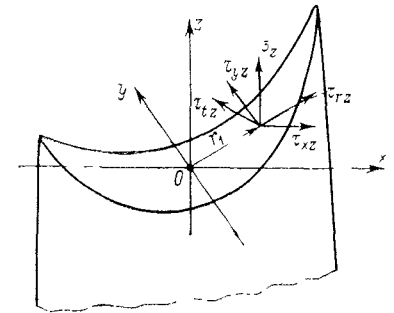


Рис. V.5. Положительные направления напряжений

V.3. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Условия равновесия отсеченной части лопатки можно записать в виде уравнений (рис. V.5):

$$\left. \begin{aligned} \int_F \sigma_z dF &= C; \quad \int_F \sigma_z \eta dF = M_\xi; \quad \int_F \sigma_z \xi dF = -M_\eta; \\ \int_F \tau_{tz} r_1 dF &= \int_F (\bar{\tau}_{tz} + \sigma \tau_0 r_1) r_1 dF = M_z, \end{aligned} \right\} \quad (V.14)$$

где C — осевое усилие; M_ξ и M_η — изгибающие моменты внешних сил относительно главных центральных осей; M_z — крутящий момент внешних сил относительно оси z .

В соответствии с формулами гл. III запишем выражения для изгибающих и крутящих моментов и осевого усилия. При этом будем учитывать упругие прогибы лопатки и углы поворота

сечений. С учетом (V.3) координаты центров тяжести сечений после деформации лопатки таковы:

$$\begin{aligned} X(r) &= X_0(r) + u(r); \\ Y(r) &= Y_0(r) + v(r), \end{aligned}$$

а угол закрутки профиля

$$\beta(r) = \beta_0(r) + \psi(r),$$

где $X_0(r)$, $Y_0(r)$ и $\beta_0(r)$ — координаты центров тяжести поперечных сечений и угол закрутки профиля до деформации лопатки под действием приложенных нагрузок.

Подставляя значения координат центров тяжести поперечных сечений после деформации лопатки в выражения (III.16) для изгибающих моментов и учитывая (III.24), получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} M_z(\zeta) &= \frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left\{ [u(\zeta) \sin \beta - v(\zeta) \cos \beta] \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \frac{V_c}{l} \right] - \sin \beta \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) u(\rho) F(\rho) d\rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) u_c \frac{V_c}{l} \right] + \cos \beta \left(\frac{R_0}{l} + \zeta \right) \left[\int_{\xi}^1 v(\rho) F(\rho) d\rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} v_c \frac{V_c}{l} \right] \right\} + M_z^0(\zeta); \\ M_n(\zeta) &= \frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left\{ [u(\zeta) \cos \beta + v(\zeta) \sin \beta] \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \frac{V_c}{l} \right] - \cos \beta \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) u(\rho) F(\rho) d\rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) u_c \frac{V_c}{l} \right] - \sin \beta \left(\frac{R_0}{l} + \zeta \right) \left[\int_{\xi}^1 v(\rho) F(\rho) d\rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} v_c \frac{V_c}{l} \right] \right\} + M_n^0(\zeta), \end{aligned} \right\} \quad (V.15)$$

где u_c и v_c — упругие перемещения центра тяжести сечения, в котором расположена связь;

$$\begin{aligned} M_z^0(\zeta) &= \frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left\{ [X_0(\zeta) \sin \beta - Y_0(\zeta) \cos \beta] \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \frac{V_c}{l} \right] - \sin \beta \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) X_0(\rho) F(\rho) d\rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) X_c \frac{V_c}{l} \right] - \cos \beta \left(\frac{R_0}{l} + \zeta \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\int_{\xi}^1 Y_0(\rho) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} Y_c \frac{V_c}{l} \right] \right\} + \\ &\quad + l^2 \left\{ \cos \beta \int_{\xi}^1 \left[\int_{\rho}^1 q_u(\rho) d\rho \right] d\rho + \sin \beta \int_{\xi}^1 \left[\int_{\rho}^1 q_v(\rho) d\rho \right] d\rho \right\}; \\ M_n^0(\zeta) &= \frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left\{ [X_0(\zeta) \cos \beta + Y_0(\zeta) \sin \beta] \times \right. \\ &\quad \times \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \frac{V_c}{l} \right] - \\ &\quad - \cos \beta \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) X_0(\rho) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) X_c \frac{V_c}{l} \right] - \\ &\quad - \sin \beta \left(\frac{R_0}{l} + \zeta \right) \left[\int_{\xi}^1 Y_0(\rho) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} Y_c \frac{V_c}{l} \right] \right\} + \\ &\quad + l^2 \left\{ \sin \beta \int_{\xi}^1 \left[\int_{\rho}^1 q_u(\rho) d\rho \right] d\rho - \cos \beta \int_{\xi}^1 \left[\int_{\rho}^1 q_v(\rho) d\rho \right] d\rho \right\}. \end{aligned}$$

Здесь сумма распространяется на все связи, лежащие выше расчетного сечения.

Для крутящего момента в выражении (III.16) будем сохранять только первое слагаемое. Остальными слагаемыми, а также крутящим моментом от паровых усилий будем пренебрегать, так как они обычно малы. Тогда

$$M_z(\zeta) = \frac{\gamma \omega^2}{g} l \int_{\xi}^1 J_{xy}(\rho) d\rho \quad (V.16)$$

Осевое усилие в соответствии с (III.4) будет

$$C(\zeta) = \frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left\{ \int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \frac{V_c}{l} \right\}. \quad (V.17)$$

Подставляя в уравнения (V.14) значения напряжений в соответствии с (V.13) и проводя интегрирование по площади поперечного сечения лопатки, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{dz} + \frac{J_p}{F} \tau_0 \frac{d\theta}{dz} &= \frac{C}{EF}; \\ \frac{d^2u}{dz^2} \sin \beta - \frac{d^2v}{dz^2} \cos \beta + \frac{J_{p\xi}}{J_\xi} \tau_0 \frac{d\theta}{dz} &= \frac{M_\xi}{EJ_\xi}; \\ \frac{d^2u}{dz^2} \cos \beta + \frac{d^2v}{dz^2} \sin \beta - \frac{J_{p\eta}}{J_\eta} \tau_0 \frac{d\theta}{dz} &= \frac{M_\eta}{EJ_\eta}; \\ \frac{1}{F\tau_0} (GT_0 + E\tau_0^2 J_{4p}) \frac{d\theta}{dz} + J_{p\xi} \left(\frac{d^2u}{dz^2} \sin \beta - \frac{d^2v}{dz^2} \cos \beta \right) - \\ - J_{p\eta} \left(\frac{d^2u}{dz^2} \cos \beta + \frac{d^2v}{dz^2} \sin \beta \right) + J_p \frac{d\omega}{dz} &= \frac{1}{E\tau_0} M_z, \end{aligned} \right\} \quad (V.18)$$

где $J_\xi = \int_F \eta^2 dF$; $J_\eta = \int_F \xi^2 dF$ — моменты инерции относительно главных центральных осей; $J_p = \int_F r_1^2 dF$ — полярный момент инерции относительно центра тяжести; $J_{F\xi} = \int_F \eta r_1^2 dF$; $J_{F\eta} = - \int_F \xi r_1^2 dF$ — полярно-осевые моменты инерции; $J_{4p} = \int_F r_1^4 dF$ — биполярный момент инерции относительно центра тяжести сечения; $T_0 = \int_F \left(-\frac{d\varphi}{d\xi} \eta + \frac{d\varphi}{d\eta} \xi + r_1^2 \right) dF$ — геометрическая жесткость на кручение.

При выводе этих уравнений учитывалось, что

$$\int_F \xi dF = \int_F \eta dF = \int_F \xi \eta dF = 0$$

как статические моменты и центробежный момент инерции относительно главных центральных осей.

Выполним некоторые преобразования полученной системы уравнений. Первые три уравнения решим относительно производных $d\omega/dz$, d^2u/dz^2 и d^2v/dz^2 , а из последнего уравнения исключим эти производные. Тогда система примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{dz} &= \frac{C}{EF} - \frac{J_p}{F} \tau_0 \frac{d\theta}{dz}; \\ \frac{d^2u}{dz^2} &= \frac{M_\xi}{EJ_\xi} \sin \beta + \frac{M_\eta}{EJ_\eta} \cos \beta + J_1 \tau_0 \frac{d\theta}{dz}; \\ \frac{d^2v}{dz^2} &= -\frac{M_\xi}{EJ_\xi} \cos \beta + \frac{M_\eta}{EJ_\eta} \sin \beta + J_2 \tau_0 \frac{d\theta}{dz}; \\ \frac{d\theta}{dz} &= -\frac{1}{ET\tau_0} \left[\frac{J_p}{F} C + \frac{J_{p\xi}}{J_\xi} M_\xi - \frac{J_{p\eta}}{J_\eta} M_\eta - \frac{1}{\tau_0} M_z \right], \end{aligned} \right\} \quad (V.19)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{J_{p\xi}}{J_\xi} \sin \beta + \frac{J_{p\eta}}{J_\eta} \cos \beta; \\ J_2 &= \frac{J_{p\xi}}{J_\xi} \cos \beta + \frac{J_{p\eta}}{J_\eta} \sin \beta; \\ T &= \frac{GT_0}{F\tau_0^2} + J_{4p} - \frac{J_p^2}{F} - \frac{J_{p\xi}^2}{J_\xi} - \frac{J_{p\eta}^2}{J_\eta}. \end{aligned}$$

Исключая из первых трех уравнений производную от угла поворота и переходя к относительной координате $\zeta = z/l$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{l} \frac{d\omega}{d\zeta} &= \frac{C(\zeta)}{EF} \left(1 + \frac{J_p^2}{FT} \right) + \frac{1}{EF} \frac{J_p}{T} \left[\frac{J_{p\xi}}{J_\xi} M_\xi(\zeta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{J_{p\eta}}{J_\eta} M_\eta(\zeta) - \frac{1}{\tau_0} M_z(\zeta) \right]; \\ \frac{1}{l^2} \frac{d^2u}{d\zeta^2} &= \frac{M_\xi(\zeta)}{EJ_\xi} m_1 + \frac{M_\eta(\zeta)}{EJ_\eta} n_1 - \\ &\quad - \frac{1}{E} \frac{J_1}{T} \left[\frac{J_p}{F} C(\zeta) - \frac{1}{\tau_0} M_z(\zeta) \right]; \\ \frac{1}{l^2} \frac{d^2v}{d\zeta^2} &= -\frac{M_\xi(\zeta)}{EJ_\xi} m_2 + \frac{M_\eta(\zeta)}{EJ_\eta} n_2 - \\ &\quad - \frac{1}{E} \frac{J_2}{T} \left[\frac{J_p}{F} C(\zeta) - \frac{1}{\tau_0} M_z(\zeta) \right]; \\ \frac{1}{l} \frac{d\theta}{d\zeta} &= -\frac{1}{ET\tau_0} \left[\frac{J_p}{F} C(\zeta) + \frac{J_{p\xi}}{J_\xi} M_\xi(\zeta) - \frac{J_{p\eta}}{J_\eta} M_\eta(\zeta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\tau_0} M_z(\zeta) \right], \end{aligned} \right\} \quad (V.20)$$

где

$$\begin{aligned} m_1 &= \sin \beta - J_{p\xi} (J_1/T); \\ m_2 &= \cos \beta + J_{p\xi} (J_2/T); \quad n_1 = \cos \beta + J_{p\eta} (J_1/T); \\ n_2 &= \sin \beta + J_{p\eta} (J_2/T). \end{aligned}$$

Полученные уравнения представляют систему четырех интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных перемещений u , v , ω и неизвестного угла упругой раскрутки θ . Решение этой системы должно удовлетворять граничным условиям в корневом сечении лопатки и на вершине.

Считая, что хвосты лопаток жестко заделаны в диске, при $\zeta = 0$ имеем следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} u(0) = v(0) = \omega(0) &= 0; \\ \frac{du}{d\zeta} = \frac{dv}{d\zeta} &= 0; \quad \theta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (V.21)$$

Для периферийного сечения лопатки рассмотрим два случая.

1. Лопатка со свободной вершиной. В этом случае при $\xi = 1$ должно иметь место равенство

$$M_{\xi}(1) = M_{\eta}(1) = M_z(1) = C(1) = 0. \quad (V.22)$$

Как следует из (V.15)–(V.17), эти условия будут выполняться автоматически.

2. Лопатка с банджом, исключающим ее раскрутку. В этом случае на вершине лопатки будет действовать реактивный крутящий момент M_{kr} , для определения которого имеем уравнение

$$\xi = 1; \theta(1) = 0. \quad (V.23)$$

Интегрируя последнее уравнение из системы (V.20), находим

$$\theta(\xi) = -\frac{l}{E} \int_0^{\xi} \frac{1}{T\tau_0} \left[\frac{J_p}{F} C + \frac{J_{p\xi}}{J_{\xi}} M_{\xi} - \frac{J_{p\eta}}{J_{\eta}} M_{\eta} - \frac{1}{\tau_0} (M_z + M_{kr}) \right] d\xi + A \quad (V.24)$$

Из условий (V.21) следует, что постоянная интегрирования $A = 0$. Тогда уравнение (V.23) можно записать в виде

$$0(1) = -\frac{l}{E} \int_0^1 \frac{1}{T\tau_0} \left[\frac{J_p}{F} C + \frac{J_{p\xi}}{J_{\xi}} M_{\xi} - \frac{J_{p\eta}}{J_{\eta}} M_{\eta} - \frac{1}{\tau_0} (M_z + M_{kr}) \right] d\xi = 0$$

Из полученного равенства найдем

$$M_{kr} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{T\tau_0} \left[\frac{J_p}{F} C + \frac{J_{p\xi}}{J_{\xi}} M_{\xi} - \frac{J_{p\eta}}{J_{\eta}} M_{\eta} - \frac{1}{\tau_0} M_z \right] d\xi}{\int_0^1 \frac{d\xi}{T\tau_0^2}}. \quad (V.25)$$

Заметим, что формула (V.24) может быть использована для приближенного вычисления угла упругой раскрутки лопатки. В этом случае значения моментов M_{ξ} и M_{η} подсчитываются по формулам (см. гл. III) без учета упругих прогибов лопатки. Полученное таким образом значение угла θ будет представлять первое приближение искомого решения системы (V.20). Кроме того, расчеты показали, что если вообще пренебречь действием изгибающих моментов, то ошибка увеличится не более чем на 10%.

Запишем далее расчетные формулы для напряжений. Подставляя значения производных в соответствии с (V.19) в первое равенство (V.13), для нормальных напряжений получим

$$\sigma = \frac{C}{F} + \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}} \eta - \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}} \xi + \frac{1}{T} \left(\frac{J_p}{F} C + \frac{J_{p\xi}}{J_{\xi}} M_{\xi} - \frac{J_{p\eta}}{J_{\eta}} M_{\eta} - \frac{1}{\tau_0} M_z \right), \quad (V.26)$$

где

$$I = \frac{J_p}{F} + \frac{J_{p\xi}}{J_{\xi}} \eta + \frac{J_{p\eta}}{J_{\eta}} \xi - r_1^2.$$

В этой формуле первые три слагаемых представляют собой обычные нормальные напряжения, возникающие при растяжении и изгибе незакрученной лопатки. Последнее слагаемое определяет систему самоуравновешенных нормальных напряжений, возникающую вследствие закрученности лопатки.

При вычислении касательных напряжений будем находить наибольшие напряжения, возникающие в месте максимальной толщины профиля (см. рис. III.4). Для их вычисления можно воспользоваться приближенной формулой из [108]

$$\tau_{\max} = GL(d\theta/dz);$$

$$L = \frac{c}{1 + \pi^2 c^4 / (16F^2)} \left[1 + 0,15 \left(\frac{\pi c^4}{16F^2} - \frac{c}{2R} \right) \right],$$

где c — максимальная толщина сечения; F — площадь сечения; R — радиус закругления контура сечения со стороны спинки в месте максимальной толщины (см. рис. III.4).

Подставляя в эту формулу значения относительного угла поворота в соответствии с (V.19), получим

$$\tau_{\max} = \frac{G}{E} \frac{L}{T\tau_0} \left[\frac{1}{\tau_0} M_z - \frac{J_p}{F} C - \frac{J_{p\xi}}{J_{\xi}} M_{\xi} + \frac{J_{p\eta}}{J_{\eta}} M_{\eta} \right]. \quad (V.27)$$

V.4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Из рассмотрения системы уравнений (V.20) следует, что взаимосвязанными являются три последних уравнения. В операторной форме эти уравнения можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{l^2} \frac{d^2 u}{d\xi^2} &= L_u(\xi, u, v, \theta); \\ \frac{1}{l^2} \frac{d^2 v}{d\xi^2} &= L_v(\xi, u, v, \theta); \\ \frac{1}{l} \frac{d\theta}{d\xi} &= L_{\theta}(\xi, u, v, \theta), \end{aligned} \right\} \quad (V.28)$$

где L_u, L_v, L_{θ} — операторы, представляющие собой правую часть уравнений (V.20).

Эта система уравнений может быть решена методом последовательных приближений по схеме групповой итерации [128]. Суть метода заключается в том, что в исходном приближении принимается равным нулю угол поворота θ , а $\beta = \beta_0$, где β_0 — угол усадки профиля в недеформированном состоянии лопатки. При фиксированном значении угла β решаются совместно первые два уравнения относительно u и v . Их решение дает первое приближение для перемещений u_1 и v_1 . Далее, вычислив новые значения изгибающих моментов по (V.15), из третьего уравнения находим первое приближение угла поворота θ_1 . Во втором приближении принимаем, что

$$\beta_1 = \beta_0 + \theta_1,$$

и снова решаем совместно первые два уравнения

В общем случае схема групповой итерации для решаемой системы уравнений в n -м приближении может быть записана в виде.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{l^2} \frac{d^2 u_n}{d\xi^2} &= L_u(\xi, u_n, v_n, \beta_{n-1}); \\ \frac{1}{l^2} \frac{d^2 v_n}{d\xi^2} &= L_v(\xi, u_n, v_n, \beta_{n-1}); \\ \frac{1}{l} \frac{d\theta_n}{d\xi} &= L_\theta(\xi, u_n, v_n, \beta_{n-1}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{V } 29)$$

Число приближений определяется заданной точностью расчета. Как правило, практически достаточную точность дает уже третье — пятое приближение.

Найдя перемещения u , v и угол поворота сечений θ , вычислив изгибающие моменты M_ξ и M_η , а также крутящий момент M_z , из первого уравнения системы (V.20) можем найти продольное перемещение путем однократного интегрирования

$$\begin{aligned} w(\xi) = l \int_0^\xi \left\{ \frac{C(\xi)}{EF} \left(1 + \frac{J_p^2}{TF} \right) + \frac{1}{F} \frac{J_p}{ET} \left[\frac{J_{p\xi}}{J_\xi} M_z(\xi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{J_{p\eta}}{J_\eta} M_\eta(\xi) - \frac{1}{\tau_0(\xi)} M_z(\xi) \right] \right\} d\xi + B \end{aligned} \quad (\text{V } 30)$$

Из условия (V.21) следует, что постоянная интегрирования $B = 0$. Заметим, что при расчете лопатки с бандажом в каждом приближении крутящий момент $M_{кр}$ необходимо вычислить в соответствии с равенством (V.25) и суммировать его с моментом от внешних нагрузок (V.16).

Для реализации указанного метода последовательных приближений, как уже упоминалось, перемещения u и v необходимо определять из совместного решения первых двух интегро-дифференциальных уравнений системы (V.28). Решение указанных уравнений может быть найдено с помощью метода дискретной ортогонализации Годунова [48]. Запишем эти уравнения в явном виде,

для чего подставим во второе и третье уравнения системы (V.20) значения $C(\xi)$, $M_\xi(\xi)$, $M_\eta(\xi)$ и $M_z(\xi)$ в соответствии с равенствами (V.15)—(V.17). Выполнив несложные преобразования, окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{l^2} \frac{d^2 u}{d\xi^2} &= A_1(\xi) u(\xi) + B_1(\xi) v(\xi) + K_1(\xi) \times \\ &\times \left[\int_\xi^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) u(\rho) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) u_c \frac{V_c}{l} \right] + \\ &+ N_1(\xi) \left[\int_\xi^1 v(\rho) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} v_c \frac{V_c}{l} \right] + D_1(\xi); \\ \frac{1}{l^2} \frac{d^2 v}{d\xi^2} &= A_2(\xi) u(\xi) + B_2(\xi) v(\xi) + K_2(\xi) \times \\ &\times \left[\int_\xi^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) u(\rho) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) u_c \frac{V_c}{l} \right] + \\ &+ N_2(\xi) \left[\int_\xi^1 v(\rho) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} v_c \frac{V_c}{l} \right] + D_2(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (\text{V } 31)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(\xi) &= \frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left[\int_\xi^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \frac{V_c}{l} \right] \times \\ &\times \left(\frac{m_1}{EJ_\xi} \sin \beta + \frac{n_1}{EJ_\eta} \cos \beta \right); \\ B_1(\xi) &= \frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left[\int_\xi^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \frac{V_c}{l} \right] \times \\ &\times \left(-\frac{m_1}{EJ_\xi} \cos \beta + \frac{n_1}{EJ_\eta} \sin \beta \right); \\ K_1(\xi) &= -\frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left(\frac{m_1}{EJ_\xi} \sin \beta + \frac{n_1}{EJ_\eta} \cos \beta \right); \\ N_1(\xi) &= -\frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left(\frac{R_0}{l} + \xi \right) \left(-\frac{m_1}{EJ_\xi} \cos \beta + \frac{n_1}{EJ_\eta} \sin \beta \right); \\ D_1(\xi) &= -\frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \frac{1}{E} \frac{J_1}{T} \left\{ \left[\int_\xi^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \right. \right. \\ &+ \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \frac{V_c}{l} \right] \frac{J_p}{F} - \frac{1}{\tau_0} \frac{1}{l} \int_\xi^1 J_{xy}(\rho) d\rho \left. \right\} + \\ &+ \frac{M_\xi^0}{EJ_\xi} m_1 + \frac{M_\eta^0}{EJ_\eta} n_1; \end{aligned}$$

$$A_2(\xi) = \frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \frac{V_c}{l} \right] \times \\ \times \left(-\frac{m_2}{EJ_{\xi}} \sin \beta + \frac{n_2}{EJ_{\eta}} \cos \beta \right);$$

$$B_2(\xi) = \frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \frac{V_c}{l} \right] \times \\ \times \left(\frac{m_2}{EJ_{\xi}} \cos \beta + \frac{n_2}{EJ_{\eta}} \sin \beta \right);$$

$$K_2(\xi) = -\frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left(-\frac{m_2}{EJ_{\xi}} \sin \beta + \frac{n_2}{EJ_{\eta}} \cos \beta \right);$$

$$N_2(\xi) = -\frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \left(\frac{R_0}{l} + \xi \right) \left(\frac{m_2}{EJ_{\xi}} \cos \beta + \frac{n_2}{EJ_{\eta}} \sin \beta \right),$$

$$D_2(\xi) = -\frac{\gamma \omega^2}{g} l^2 \frac{1}{E} \frac{J_2}{T} \left\{ \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) F(\rho) d\rho + \right. \right.$$

$$\left. + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) \frac{V_c}{l} \right] \frac{J_p}{F} - \frac{1}{\tau_0} \frac{1}{l} \int_{\xi}^1 J_{xy}(\rho) d\rho \left\} - \right.$$

$$\left. - \frac{M_{\xi}^0}{EJ_{\xi}} m_2 + \frac{M_{\eta}^0}{EJ_{\eta}} n_2, \right.$$

$$m_1 = \sin \beta - J_{p\xi} (J_1/T); \quad m_2 = \cos \beta + J_{p\xi} (J_2/T),$$

$$n_1 = \cos \beta + J_{p\eta} (J_1/T); \quad n_2 = \sin \beta + J_{p\eta} (J_2/T)$$

Преобразуем эту систему двух интегро-дифференциальных уравнений в систему шести уравнений первого порядка

Введем обозначения:

$$\frac{1}{l} \frac{du}{d\xi} = g(\xi); \quad \frac{1}{l} \frac{dv}{d\xi} = h(\xi),$$

$$p(\xi) = \left[\int_{\xi}^1 \left(\frac{R_0}{l} + \rho \right) u(\rho) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{R_0}{l} + \rho_c \right) u_c \frac{V_c}{l} \right];$$

$$q(\xi) = \int_{\xi}^1 v(\rho) F(\rho) d\rho + \sum \frac{\gamma_c}{\gamma} v_c \frac{V_c}{l}.$$

Отсюда найдем:

$$\frac{dp}{d\xi} = -\left(\frac{R_0}{l} + \xi \right) u(\xi) F(\xi); \quad \frac{dq}{d\xi} = -v(\xi) F(\xi)$$

Тогда система может быть записана в виде:

$$\frac{1}{l} \frac{du}{d\xi} = g(\xi);$$

$$\frac{1}{l} \frac{dg}{d\xi} = A_1(\xi) u(\xi) + B_1(\xi) v(\xi) + K_1(\xi) p(\xi) + N_1(\xi) q(\xi) + D_1(\xi);$$

$$\frac{1}{l} \frac{dv}{d\xi} = h(\xi);$$

$$\frac{1}{l} \frac{dh}{d\xi} = A_2(\xi) u(\xi) + B_2(\xi) v(\xi) + K_2(\xi) p(\xi) + N_2(\xi) q(\xi) + D_2(\xi);$$

$$\frac{dp}{d\xi} = -\left(\frac{R_0}{l} + \xi \right) u(\xi) F(\xi); \quad \frac{dq}{d\xi} = -v(\xi) F(\xi).$$

В представленном виде система допускает решение методом дискретной ортогонализации Годунова [48]

У.5. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГИБКИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ЛОПАТОК

Некоторые особенности напряженно-деформированного состояния гибких закрученных лопаток рассмотрим на примере расчета рабочей лопатки последней ступени одной из мощных паровых турбин. Для этой лопатки $D_{cp}/l = 2,58$, а угол начальной закрутки

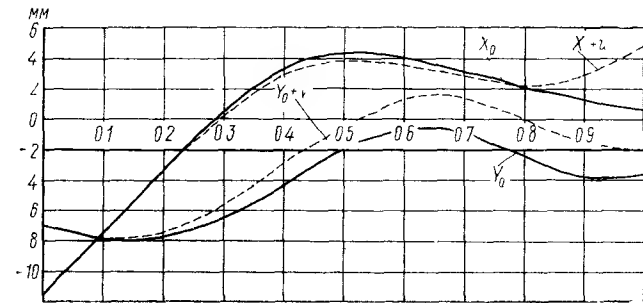


Рис V 6 Перемещения центров тяжести сечений при деформации рабочей лопатки

профиля равен $\Delta\beta = \beta_n - \beta_k = 67^\circ$, где β_n и β_k — углы установки периферийного и корневого сечений. Лопатка находится под действием центробежных сил.

Прежде всего обратим внимание на величину линейных перемещений центров тяжести сечений и углов раскрутки профиля. На рис. V 6 приведены кривые координат центров тяжести сечений до и после деформации лопаток, а на рис. V.7 — значения угла упругой раскрутки. Из рассмотрения кривых следует, что абсолютные значения перемещений в периферийных сечениях лопаток достигают 3—4 мм, а угол раскрутки профиля $10-12^\circ$. Необходимо заметить, что, как показано в работе [23], на точность вычисления угла упругой раскрутки большое влияние оказывают нелинейные слагаемые, содержащие величину $(d\theta/dz)^2$, которые в изложенном

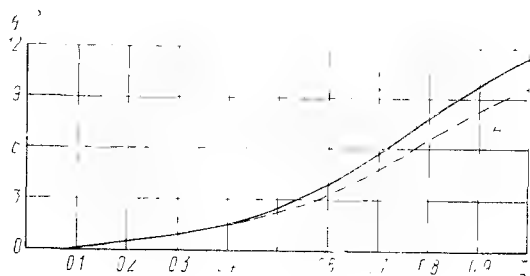


Рис. V.7. Угол упругой раскрутки рабочей лопатки со свободной вершиной:

1 — без учета нелинейных членов, 2 — с учетом нелинейных членов

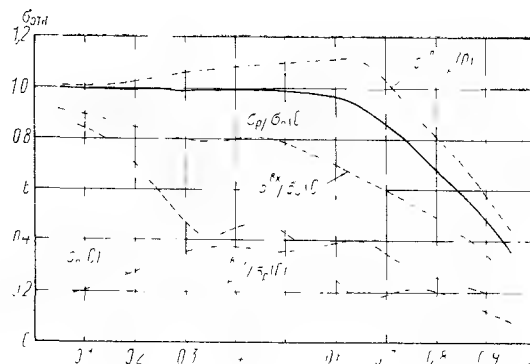


Рис. V.8. Относительные напряжения в сечениях лопатки:

— — — расчет по схеме гибкого стержня, — — — расчет по схеме жесткого стержня

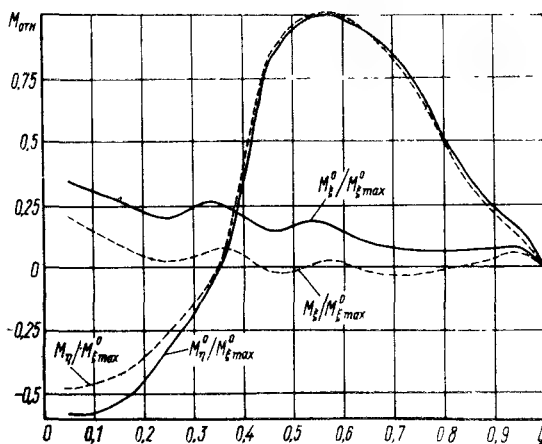


Рис. V.9. Изгибающие моменты в сечениях лопатки:

— — — расчет по схеме гибкого стержня, — — — расчет по схеме жесткого стержня

выше методе расчета гибких закрученных лопаток были отброшены. Из рис. V.7 следует, что при учете нелинейных членов угол упругой закрутки уменьшается примерно на 18%.

Расчеты показывают, что упругая раскрутка профиля лопаток приводит к существенному перераспределению растягивающих напряжений в ее сечениях. На рис. V.8 приведены кривые изменения относительных растягивающих напряжений в трех характерных точках сечения по длине лопатки. Для сравнения там же приведена кривая средних растягивающих напряжений, вычисленных при рассмотрении лопатки как жесткого стержня. Из кривых следует, что напряжения на спинке профиля лопатки возросли по сравнению со средними на 10–15%, а на кромках снизились более чем в 1,5–2,0 раза. Таким образом, вследствие упругой раскрутки при растяжении естественно-закрученной лопатки кромки ее разгружаются.

Относительно большие значения в гибкой лопатке будут иметь касательные напряжения, возникающие при ее раскрутке. Из рис. V.8 следует, что касательные напряжения в отдельных сечениях составляют 30–40% от максимальных растягивающих. Заметим, что при учете нелинейных членов касательные напряжения, как и угол упругой раскрутки, несколько снижаются [23].

Существенные различия наблюдаются в величинах изгибающих моментов, вычисленных в лопатке по схеме гибкого и жесткого стержня. Как видно из рис. V.9, действительные значения изгибающего момента в корневом сечении лопатки относительно минимальной оси инерции оказываются примерно в 1,5 раза меньше его значений, вычисленных по приближенной схеме жесткого стержня. Момент относительно максимальной оси инерции уменьшается в корневом сечении примерно на 20%.

Совместно с результатами расчетов по двум изложенным выше методам, основанным на теории стержней (жестких и гибких), рассмотрим результаты расчета лопаток, полученные методом конечных элементов [68, 156]. Применение метода конечных элементов позволяет отказаться от некоторых ограничений, наложенных на расчетную схему лопатки при расчете ее по стержневой теории. Вследствие этого метод конечных элементов будет давать наиболее полное представление о напряженно-деформированном состоянии длинных закрученных лопаток. При расчете методом конечных элементов лопатка представляется в виде закрученной оболочки переменной толщины [143; 158]. Дискретная схема лопатки строится с применением пространственных, однослойных криволинейных конечных элементов. Рядом сечений, параллельных плоскости XOY (см. рис. V.1), лопатка по высоте разбивается на определенное число участков. Расчетные сечения делятся далее на одно и то же число разбиений таким образом, чтобы каждому узлу на контуре со стороны спинки соответствовал бы один узел на контуре сечения со стороны вогнутой части профиля. Соответственные узловые точки соединяются прямыми линиями. Таким

построением в каждом слое между двумя сечениями параллельными плоскостями XOY получают одинаковое количество криволинейных конечных элементов (рис V 10). Внутри каждого элемента задается средняя поверхность. Точки, принадлежащие срединной поверхности и лежащие на прямолинейных ребрах конечного элемента, являются узловыми точками, в которых определяются перемещения.

Решение задачи достигается путем численной минимизации энергетического функционала, записанного для деформируемой лопатки с учетом действующих центробежных нагрузок и распределенных по поверхности лопатки паровых усилий. Задача решается относительно перемещений в узловых точках, принадлежащих срединной поверхности с применением моментной схемы конечного элемента [154]. По значениям найденных перемещений вычисляются мембранные значения нормальных и касательных

Рис V 10 Конечнo-элементная схема рабочей лопатки

напряжений в центре каждого элемента (в точке, принадлежащей срединной поверхности), а на поверхностях лопатки — дополнительные напряжения, возникающие в результате ее изгиба и кручения. Кроме того, на поверхностях лопатки в центрах конечных элементов вычисляются главные (максимальные и минимальные) напряжения. При численном расчете лопатки принимается, что в корневом сечении она жестко закреплена, а на вершине свободна или имеет определенные ограничения, наложенные связями.

Одним из достоинств метода конечных элементов является то, что он не требует аналитического представления геометрической формы лопатки. Построение дискретной модели может быть выполнено с использованием декартовых координат узловых точек, принадлежащих поверхностям лопатки.

На рис. V.11 приведены главные напряжения в трех характерных точках сечения рассмотренной выше лопатки без связей под действием центробежных сил¹. Там же для сравнения приведены

кривые напряжений в этих же точках, вычисленных в лопатке по схеме жесткого стержня. Из сопоставления кривых следует, что значения напряжений в гибкой лопатке, вычисленные с использо-

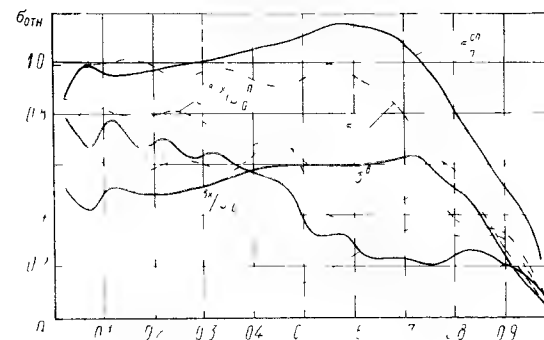


Рис V.11 Суммарные напряжения в сечениях лопатки:

— расчет методом конечных элементов,
- - - расчет по схеме жесткого стержня

ванием приближенной схемы жесткого стержня, существенно отличаются от напряжений, вычисленных методом конечных элементов по теории оболочек средней толщины.

Глава VI

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРОВОЛОЧНЫХ СВЯЗЕЙ И БАНДАЖЕЙ

VI.1. РАСЧЕТ ПРОВОЛОЧНЫХ СВЯЗЕЙ

В различных конструкциях облопачивания проволоочная связь в зависимости от ее назначения может быть припаянной к лопаткам (паяная проволока) или не припаянной (демпферная проволока) (см. п. I.1). В обоих случаях расчетная схема проволоки в пакете может быть представлена как многопролетная балка, нагруженная центробежными силами. Рассмотрим указанные два случая.

Паяная проволока. Рассмотрим участок AB между двумя заделанными сечениями длиной, равной шагу t_n (рис. VI 1). Тогда задача сводится к расчету на изгиб балочки, жестко заделанной на обоих концах, длиной t_n под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности

$$q = (\gamma \omega^2 / g) F_n R_n,$$

где F_n — площадь сечения проволоки

¹ Расчеты выполнены по программе Киевского инженерно-строительного института [158] инж. Д. Х. Гаджиевой.

Как известно из курса сопротивления материалов, максимальный момент, действующий в заделанных сечениях A и B балочки,

$$M = q t_n^2 / 12 = (\gamma \omega^2 / g) F_n R_n t_n^2 / 12. \tag{VI.1}$$

Напряжения в этих сечениях

$$\sigma_n = M / W_n, \tag{VI.2}$$

где W_n — момент сопротивления сечения проволоки.

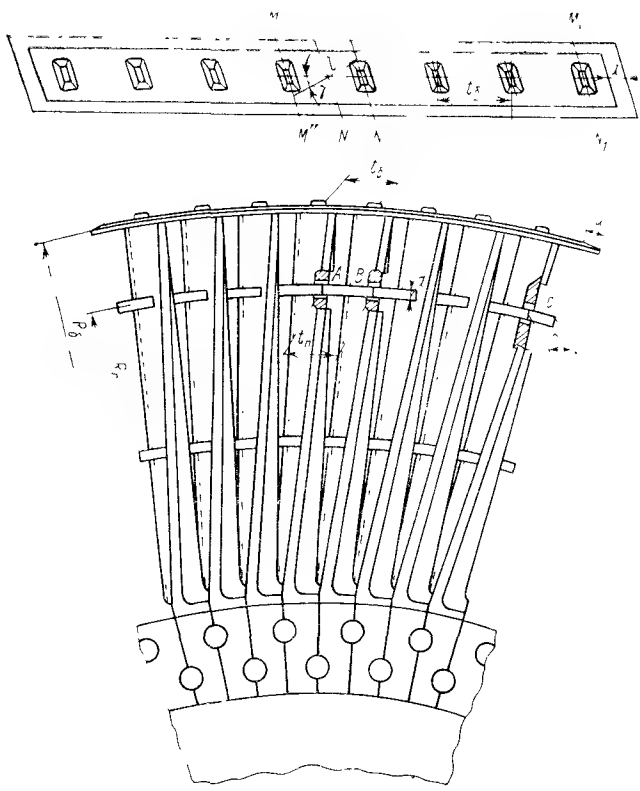


Рис. VI.1. Пакет лопаток

Напряжения от изгиба в сечении C консольной части проволоки, свисающей в крайней лопатке пакета, могут быть больше, чем напряжения в сечениях A и B , в зависимости от длины консоли c . Действительно, момент, действующий в сечении C ,

$$M = q c^2 / 2.$$

Если c равна половине шага t_n , то момент

$$M = q t_n^2 / 8.$$

Между тем моменты, действующие в сечениях A и B и определяемые выражением (VI.1), в полтора раза меньше. Напряжение в сечении C можно снизить и привести к напряжениям в сечениях A и B , взяв длину консоли равной приблизительно $0,4 t_n$.

Демпферная проволока. Сегмент демпферной проволоки будем рассматривать как многопролетную балку, в общем случае переменного сечения, нагруженную распределенной нагрузкой интенсивности (рис. VI.2)

$$q(x) = (\gamma \omega^2 / g) F_n(x) R_n.$$

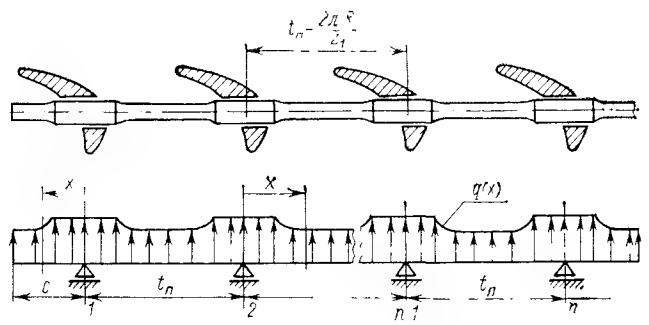


Рис. VI.2 Расчетная схема демпферной проволоки переменного сечения

Пренебрегая толщиной лопатки, длину пролета примем равной шагу t_n . Для достаточно большого числа лопаток, соединенных одним сегментом проволоки, имеем [54]

$$M_n = \frac{B}{2\alpha_1 - \alpha_2} \left(M_1 - \frac{B}{2\alpha_1 - \alpha_2} \right) \beta^{n-1} + \left(M_m - \frac{B}{2\alpha_1 - \alpha_2} \right) \beta^{m-n}, \tag{VI.3}$$

где M — изгибающий момент в опорном сечении проволоки (в сечении, совпадающем с n -й лопаткой); M_1 и M_m — изгибающие моменты на крайних опорах, которые создаются выступающими за крайние лопатки концами проволоки (консолями); m — число лопаток, соединенных одним сегментом; n — номер лопатки в сегменте ($1 \leq n \leq m$);

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \int_0^{t_n} \frac{x}{t_n} \left(1 - \frac{x}{t_n} \right) \frac{dx}{EJ_n(x)}; & \alpha_2 &= 2 \int_0^{t_n} \left(\frac{x}{t_n} \right)^2 \frac{dx}{EJ_n(x)}; \\ B &= \int_0^{t_n} \left[\int_0^x dx \int_0^x q(x) dx - \frac{x}{2} \int_0^{t_n} q(x) dx \right] \frac{dx}{EJ_n(x)}; \\ \beta &= -2\alpha_1 / (\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_1^2}). \end{aligned} \right\} \tag{VI.4}$$

Изгибающие моменты от консолей определяются по формуле

$$M_1 = M_m = \int_0^c dx \int_x^c q(x) dx. \quad (VI.5)$$

Если консоли проволоки подобраны таким образом, что

$$M_1 = M_m = B/(2\alpha_1 + \alpha_2), \quad (VI.6)$$

то, как следует из формулы (VI.3), изгибающие моменты на всех опорах будут одинаковыми

$$M_n = B(2\alpha_1 + \alpha_2) \quad (VI.7)$$

Если консоли отсутствуют, то

$$M_1 = M_m = 0; \\ M_n = \frac{B}{2\alpha_1 + \alpha_2} (1 - \beta^{n-1} - \beta^{m-n}). \quad (VI.8)$$

Рассмотрим подробнее проволоку постоянного сечения. В этом случае $F_n = \text{const}$; $J_n = \text{const}$, $q = \text{const}$. В соответствии с (VI.4) находим:

$$\alpha_1 = t_n(6EJ_n); \quad \alpha_2 = 2t_n(3EJ_n); \quad B = qt_n^3(12EJ_n); \\ \beta = \frac{2t_n(6EJ_n)}{2t_n(3EJ_n) + [2t_n(3EJ_n)]^2 + 4[t_n(6EJ_n)]^2} = -0,268; \\ \frac{B}{2\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{qt_n^3(12EJ_n)}{2t_n(6EJ_n) + 2t_n(3EJ_n)} = \frac{qt_n^2}{12}.$$

Тогда для опорных изгибающих моментов по (VI.3) получим формулу

$$M_n = qt_n^2/12 + (M_1 - qt_n^2/12)(-0,268)^{n-1} + \\ + (M_m - qt_n^2/12)(-0,268)^{m-n}. \quad (VI.9)$$

Учитывая, что в соответствии с формулой (VI.5) $M_1 = M_m = -qc^2/2$ и подставляя в (VI.9) значения $n = 2, 3, \dots, (m-2), (m-1)$, находим:

$$M_2 = M_{m-1} = 1,268(qt_n^2/12) - 0,268(qc^2/2) = q(0,1057t_n^2 - 0,134c^2); \\ M_3 = M_{m-2} = 0,928(qt_n^2/12) + 0,0718(qc^2/2) = \\ = q(0,0774t_n^2 + 0,0359c^2); \\ \dots \dots \dots$$

Если консоли отсутствуют, то

$$M_1 = M_m = 0; \\ M_2 = M_{m-1} = 0,1057qt_n^2; \\ M_3 = M_{m-2} = 0,0773qt_n^2; \\ \dots \dots \dots$$

Подберем длину консоли, при которой все опорные моменты будут равны. Учитывая равенство (VI.6) для проволоки постоянного сечения, находим

$$c = t_n \sqrt{6} = 0,408t_n.$$

В этом случае на всех опорах

$$M_n = qt_n^2/12,$$

а в середине пролета

$$M_{cp} = qt_n^2/24.$$

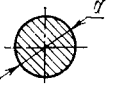
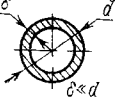
Таким образом, в среднем сечении пролетов изгибающие моменты, а следовательно, и напряжения будут в два раза меньше, чем на опорах

Из сопоставления следует, что при длине консоли $c = 0,408t_n$ максимальный изгибающий момент в проволоке будет на 27% меньше, чем в проволоке без консолей, и в 1,5 раза меньше, чем в проволоке с консолями, равными половине шага. Зная изгибающие моменты, находим напряжения в сечениях проволоки, совпадающие с опорами:

$$\sigma_1 = M_1 W_n; \quad \sigma_2 = M_2 W_n; \quad \sigma_3 = M_3 W_n \quad (VI.10)$$

Формулы для вычисления интенсивности распределенной нагрузки и моментов сопротивления для различных применяемых сечений проволок приведены в табл. VI.1.

Таблица VI.1

Сечение	q , кг/см	W_n , см ³	J_n , см ⁴
	$0,785 \frac{\gamma \omega^2}{g} R_n d^2$	$0,1d^3$	$0,05d^4$
	$\pi \frac{\gamma \omega^2}{g} R_n d \delta$	$0,785d^2 \delta$	$0,393d^3 \delta$
	$0,393 \frac{\gamma \omega^2}{g} R_n d^2$	$0,049d^3$	$0,0245d^4$
	$0,393 \frac{\gamma \omega^2}{g} R_n d^2$	$0,0238d^3$	$0,00686d^4$

Диаметр демпферной проволоки в силу ее назначения должен быть подобран таким образом, чтобы удовлетворялись не только условия прочности, но и обеспечивался бы гарантированный контакт между проволокой и лопатками. Для этого необходимо, чтобы прогиб проволоки на двойном шаге был заведомо больше возможного технологического зазора между проволокой и лопатками.

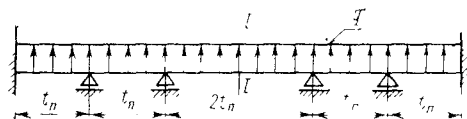


Рис. VI.3. Расчетная схема демпферной проволоки для определения прогиба

С достаточной точностью прогиб демпферной проволоки можно подсчитать по формуле

$$f = q l_n^4 / (15 E J_n), \quad (VI.11)$$

которая получена для сечения I-I из рассмотрения статически неопределимой балки, представленной на рис. VI.3. Формулы для моментов инерции различных поперечных сечений проволок приведены в табл. VI.1

При использовании демпферной связи, состоящей из двух проволок полукруглого сечения (см. рис. I.21), увеличение гибкости можно получить расположением их разреза по горизонтали.

Приведенные формулы для расчета демпферной проволоки постоянного сечения могут использоваться и для расчета демпферной связи с выступами, расположенными в цельнофрезерованном бандаже (см. рис. I.19). Длина выступов у таких связей мала по сравнению с шагом лопаток и ею можно пренебречь, рассматривая выступы только как опоры.

VI.2. РАСЧЕТ СЕГМЕНТА БАНДАЖА И БАНДАЖНОЙ ПОЛКИ

Рассмотрим приближенные методы расчета сегмента бандажа, приклепанного к лопаткам, и бандажной полки, отфрезерованной заодно с лопаткой (цельнофрезерованный бандаж).

Сегмент бандажа. Участок бандажа между двумя лопатками представим как балку, жестко заделанную в крайних сечениях, длина которой равна шагу бандажа l_6 (см. рис. VI.1). Если бандаж крепится к лопаткам профильным шипом или двумя профильными шипами, то заделку рассматриваемой балки следует принимать по косым сечениям $M'-N'$ и $M''-N''$. В этом случае расчетная длина балки $l = l_6 \cos \beta$, где β — угол, приблизительно равный углу установки периферийного сечения профиля лопатки. Балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности

$$q = (\gamma \omega^2 / g) F_6 R_6,$$

где F_6 — площадь сечения бандажа $M-N$.

Максимальный момент, действующий в заделанных сечениях бандажа,

$$M = q l^2 / 12.$$

Тогда напряжения в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, равны (см. рис. VI.4):

$$\sigma_{\text{низ}} = M W_1; \quad \sigma_{\text{верх}} = -M W_2, \quad (VI.12)$$

где $W_1 = J_6 \delta_1$ и $W_2 = J_6 \delta_2$ — моменты сопротивления сечения $M'-N'$ с учетом ослабления отверстиями под шипы.

Момент, действующий в сечении M_1-N_1 консольной части сегмента бандажа, при длине консоли, равной половине шага, будет в полтора раза выше момента в сечении $M'-N'$ (см. рис. VI.1). Снижение его в этом сечении за счет длины консоли является нежелательным из-за протечек пара. Уменьшение напряжений в сечении M_1-N_1 и разгрузка шипов могут быть достигнуты скосом консоли

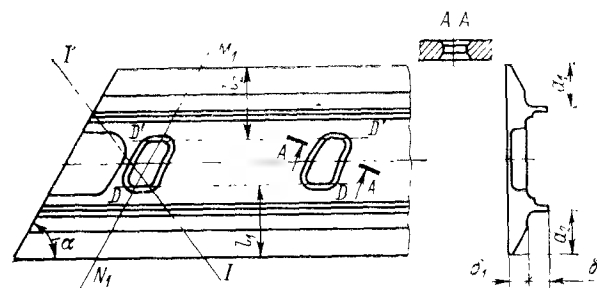


Рис. VI.4. Сегмент бандажа с косым стыком

сегмента на длине a (см. рис. VI.1) или выполнением специальных выточек, как показано на рис. VI.4 (между усами). Размеры выточек выбираются из тех соображений, чтобы изгибающие моменты в сечениях $M'-N'$ и M_1-N_1 были примерно равны. Эти мероприятия являются особенно эффективными при тяжелом бандаже и большом шаге.

Центробежная сила консоли сегмента бандажа

$$C_K = \frac{\gamma \omega^2}{g} V_K R_6, \quad (VI.13)$$

где V_K — объем консоли сегмента бандажа.

Момент, действующий в сечении M_1-N_1 ,

$$M = l_K C_K, \quad (VI.14)$$

где l_K — плечо приложения центробежной силы.

Напряжения в сечении M_1-N_1 определяются по формулам (VI.12).

Стыки между сегментами бандажа, как правило, выполняются косыми. Угол α (рис. VI.4) должен выбираться так, чтобы напряжения в сечении $I-I$ при изгибе треугольной в плане консоли не превосходили допустимой величины. В широких лопатках и лопатках с одним бандажным шипом могут иметь большую длину

свесы бандажа в осевом направлении (размеры l_1 и l , на рис. VI 4). В этом случае необходимо проверить на изгиб сечения $D-D$ и $D'-D'$. Центробежная сила шага свеса и изгибающий момент определяются по формулам, аналогичным (VI 13) и (VI 14). При определении напряжений момент сопротивления шага сечения бандажа $D-D$ и $D'-D'$ необходимо вычислять с учетом ослабления отверстиями под шины. Если напряжения превосходят допускаемые, то их можно уменьшить скосом бандажа соответственно на участках a_1 и a_2 , как это показано на рис. VI 4. Благодаря этим скосам при необходимости могут быть уравнены моменты в сечениях $D-D$ и $D'-D'$ и тем самым разгружены бандажные шины от изгибающих напряжений.

При расчете сегмента бандажа, прикрепленного к лопаткам, наряду с определением изгибных напряжений в отдельных его сечениях необходимо определить также растягивающие напряжения в шинах.

Центробежная сила шага бандажа

$$C_0 = \frac{\gamma \omega^2}{g} l_0 R_0 l_0$$

Тогда растягивающие напряжения в шинах определяются формулой

$$\sigma_{ш} = \frac{C_0}{z_{ш} F_{ш}} = \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{l_0 R_0}{z_{ш} F_{ш}}, \quad (VI 15)$$

где $z_{ш}$ — число шин на лопатке, $F_{ш}$ — площадь сечения шины.

Ввиду того что бандажные шины подвергаются наклепу во время их расклейки, в них следует допускать сравнительно небольшие статические напряжения от растяжения, учитывая, что они подвергаются воздействию еще и динамических напряжений.

Точность приближенного метода можно оценить проведением сопоставления напряжений в расчетных сечениях бандажа с результатами его расчета методом конечных элементов [158]. В этом случае сегмент бандажа приближенно может быть рассмотрен в виде узкой пластины, шарнирно опертой по краям отверстий для шин. Пластина находится под действием нормально распределенной нагрузки, интенсивность которой равна $q(x, y)$. Для построения дискретной расчетной схемы используются двумерные четырехугольные конечные элементы произвольной формы (рис. VI 5). Задача решается численной минимизацией полной потенциальной энергии изгиба пластины, которая записывается в перемещениях для дискретизированной области. Перемещения относятся к срединной плоскости пластины. В результате решения системы линейных алгебраических уравнений, которая следует из условия минимума энергетического функционала, определяются прогибы пластины в узловых точках. Далее вычисляются напряжения в центре конечных элементов на поверхности пластины.

На рис. VI 5 приведены кривые распределения главных напряжений и интенсивностей напряжений в различных сечениях

сегмента бандажа постоянной толщины¹, расположенного на радиусе $R_0 = 674$ мм, и указаны значения напряжений, вычисленные в этих же сечениях по приближенным формулам. Из сопоставления следует, что приближенные формулы в общем позволяют оценить напряжения, действующие в сегменте бандажа, однако максимальные напряжения оказываются на 20—30% ниже их точных значений.

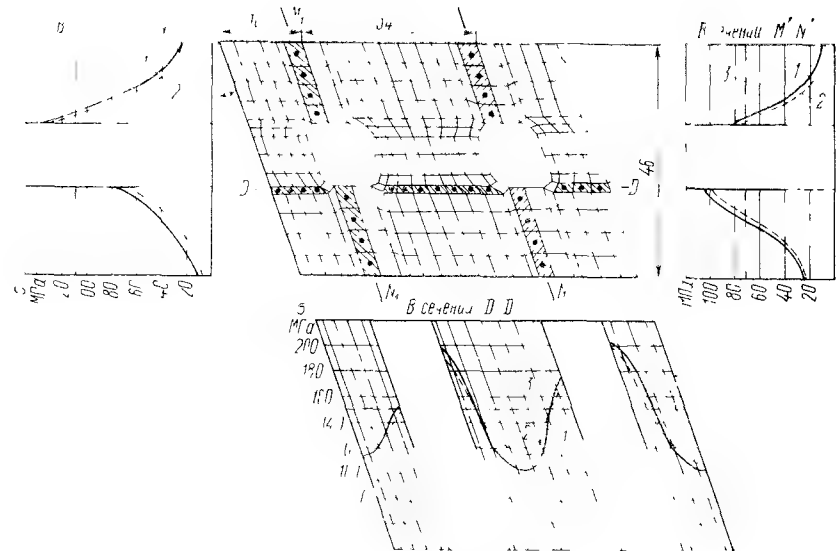


Рис. VI 5 Конечнo-элементная расчетная схема сегмента бандажа и результаты расчетов

1 — σ_1 — главные напряжения, 2 — $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2$ — интенсивность напряжений, 3 — σ — значения напряжений по приближенной формуле

Бандажная полка. Расчет бандажной полки на прочность сводится к определению изгибных напряжений от центробежных сил в ряде сечений, примыкающих к профилю лопатки $A-A$; $B-B$; $\Gamma-\Gamma$ (рис. VI 6, а). Отсеченную часть полки будем рассматривать как консольную балку, треугольную или четырехугольную, в плане, заделанную в расчетном сечении. Выделим элемент длиной dx , находящийся на расстоянии x от заделанного сечения (рис. VI 6, б). Центробежная сила этого элемента

$$dc = \frac{\gamma \omega^2}{g} R_0 \left[\int_{a_1(x)}^{a_2(x)} \delta(x, y) dy \right] dx,$$

где $\delta(x, y)$ — толщина бандажной полки

¹ Расчеты выполнены по программе Киевского инженерно-строительного института [158] инж. М. П. Жарковым

Тогда изгибающий момент в заделанном сечении

$$M = \int_0^h x dc = \frac{\gamma \omega^2}{g} R_0 \int_0^h x F(x) dx,$$

где

$$F(x) = \int_{a_1(x)}^{a_2(x)} \delta(x, y) dy.$$

Переходя к относительной координате

$$\xi = x/h \quad \text{при} \quad 0 \leq x < h, \quad 0 \leq \xi < 1,$$

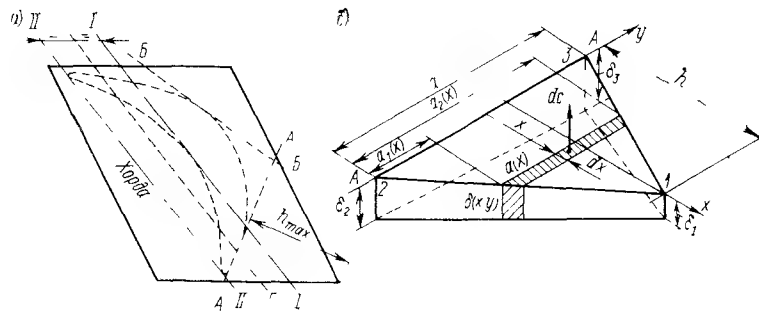


Рис. VI.6. Расчетная схема бандажной полки

получим

$$M = \frac{\gamma \omega^2}{g} R_0 h^2 \int_0^1 \xi \Gamma(\xi) d\xi. \quad (\text{VI } 16)$$

Далее находим напряжения изгиба в расчетном сечении

$$\sigma = M W_{\min}, \quad (\text{VI } 17)$$

где $W_{\min}$ — минимальный момент сопротивления расчетного сечения.

Если $\delta(x, y) = \delta(\xi)$, то $F(\xi) = \delta(\xi) a(\xi)$ и

$$M = \frac{\gamma \omega^2}{g} R_0 h^2 \int_0^1 \delta(\xi) a(\xi) \xi d\xi$$

При

$$\delta(x, y) = \delta = \text{const}$$

$$M = q h^2 \int_0^1 a(\xi) \xi d\xi,$$

где q — интенсивность центробежной нагрузки, $q = (\gamma \omega^2/g) R_0 \delta$

В этом случае для консольных балок, представляющих собой в плане простые геометрические фигуры, можно записать оконча-

тельные расчетные формулы для напряжений в заделанном сечении бандажа. Учитывая, что для заделанного сечения

$$W = a \delta^2/6,$$

получим для треугольной в плане консоли

$$\sigma = q \frac{h^2}{\delta^2} = \frac{\gamma \omega^2}{g} R_0 \frac{h^2}{\delta};$$

для консоли, представляющей в плане прямоугольник или параллелограмм с высотой h ,

$$\sigma = 3q \frac{h^2}{\delta^2} = 3 \frac{\gamma \omega^2}{g} R_0 \frac{h^2}{\delta}.$$

Как и выше, точность приближенных формул можно оценить сопоставлением приближенных значений напряжений в расчетных

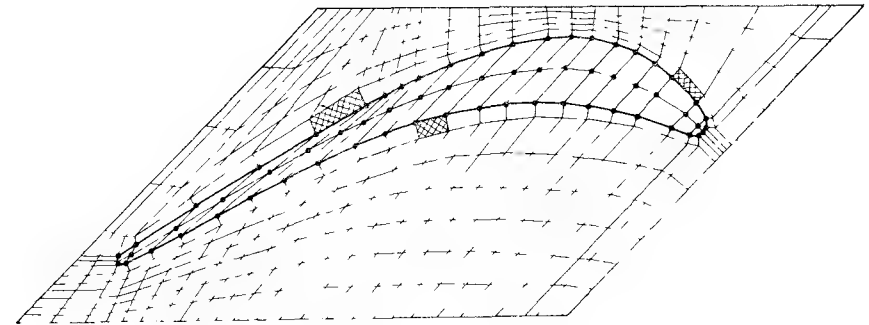


Рис. VI.7. Конечно-элементная расчетная схема бандажной полки

сечениях с результатами расчетов бандажных полок методом конечных элементов. В качестве примера на рис. VI.7 приведена расчетная конечно-элементная схема бандажной полки, на которой отмечены элементы с максимальными значениями напряжений¹.

При расчете методом конечных элементов бандажная полка рассматривается как пластина переменной толщины, сопряженная с профилем рабочей лопатки; края пластины свободны. Пластина нагружена нормальной распределенной нагрузкой, интенсивность которой

$$q(x, y) = \frac{\gamma \omega^2}{g} R_0 \delta(x, y).$$

Построение дискретной расчетной схемы производится, как и выше, с помощью двумерных четырехугольных конечных элементов. В узловых точках, принадлежащих контуру профиля и области, занимаемой этим профилем, прогибы срединной

¹ Расчеты выполнены по программе Киевского инженерно-строительного института [158] инж. М. П. Жарковым.

плоскости пластины принимаются равными нулю (специально отмеченные точки). В результате численной минимизации энергетического функционала определяются прогибы пластины в узловых точках и далее напряжения в центре конечных элементов на ее поверхностях.

Многочисленные расчеты показывают, что напряжения, вычисленные методом конечных элементов, обычно оказываются выше по сравнению с приближенными значениями, вычисленными по формуле (VI 17). Интенсивность напряжений в наиболее напряженных зонах полки рычажных по формуле

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2},$$

превышает эти приближенные значения примерно на 20—25%. При этом расчетные сечения в приближенных вычислениях выбираются так, как это показано на рис. VI 6, а. Это обстоятельство следует учитывать при назначении запасов прочности, если оценка напряжений производится по приближенным формулам.

Пример. Определить напряжения изгиба в сечении А—А бандажной полки (рис. VI 6) для которой $R_6 = 603$ мм, $a = 80$ мм, $h = 38$ мм, $\delta_1 = 4$ мм, $\delta_2 = 5$ мм, $\delta_3 = 7$ мм, $W_{\min} = 0,385 \cdot 10^3$ мм³, $\gamma \omega^2/g = 0,785 \cdot 10^{-3}$ Н/мм⁴.

Толщина бандажной полки изменяется линейно как по оси x , так и по оси y . В этом случае для треугольной в плане консоли

$$I(\xi) = F_1 [1 - (1 - \alpha)\xi] (1 - \xi)$$

где

$$I_1 = a \frac{\delta_1 - \delta_3}{\delta_1}, \quad \alpha = \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_3}$$

Тогда в соответствии с (VI 10)

$$M = -\frac{\gamma \omega^2}{g} R_6 F_0 h^2 \int_0^1 [1 - (1 - \alpha)\xi] (1 - \xi) d\xi$$

Вычислив интеграл, получим

$$\int_0^1 [1 - (1 - \alpha)\xi] (1 - \xi) d\xi = \frac{1 + \alpha}{12}$$

В соответствии с исходными данными найдем

$$M = -\frac{\gamma \omega^2}{g} R_6 F_0 h^2 \frac{1 + \alpha}{12} = 45,6 \text{ кН} \cdot \text{мм}$$

Максимальные изгибные напряжения в заданном сечении

$$\sigma = M/W_{\min} = 45,6 / (0,385 \cdot 10^3) = 118,4 \text{ МПа}$$

Если бандажные полки предназначены не только для уменьшения протечек пара, но и для исключения раскрутки гибких лопаток, то они выполняются с «зубом» (рис. VI 8). С помощью зуба бандажная полка каждой лопатки входит в зацепление с такими же полками соседних лопаток. Если лопатки набраны на

колесо без предварительного натяга по контактным плоскостям зубьев, то усилие контакта полностью зависит от угла раскрутки лопатки, а следовательно, и от крутящего момента в ее периферийном сечении (рис. VI 8).

$$P = M_{\text{л}} b - M_{11} (t_0 \cos \varphi), \quad (\text{VI } 18)$$

где M_{11} — крутящий момент в периферийном сечении лопатки, φ — угол наклона плоскости контакта к плоскости диска.

Контактное давление определяется так

$$\sigma_{\text{кон}} = P / I_{\text{кон}},$$

где $I_{\text{кон}}$ — площадь поверхности контакта.

При проектировании бандажной полки ее по возможности необходимо располагать относительно пера лопатки так, чтобы избежать возникновения в лопатке больших дополнительных изгибных напряжений.

VI.3. РАСЧЕТ БАНДАЖЕЙ, ЗАМКНУТЫХ НА КРУГ

Бандаж, прикрепленный к лопаткам. При замыкании бандажа на круг на него будут действовать центробежные силы от собственной массы и радиальные усилия, возникающие в месте соединения бандажа с лопатками (рис. VI 9). Эти неизвестные усилия можно найти из условия совместности деформаций бандажа и диска с лопатками.

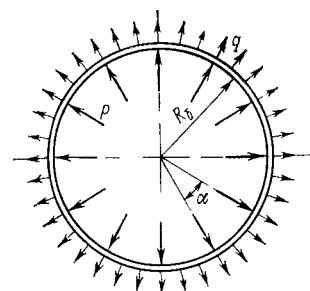


Рис. VI 9 Силы действующие на замкнутый бандаж

Интенсивность центробежной нагрузки

$$q = \frac{\gamma \omega^2}{g} F_0 R_6,$$

а радиальное перемещение бандажа под действием этой нагрузки

$$\Delta R_6(q) = q R_6^2 / (E F_0)$$

Неизвестные радиальные усилия P , действующие на бандаж от лопаток, будем считать положительными, если они направлены от центра (рис. VI 9). Радиальное перемещение бандажа в точке приложения силы [135]

$$\Delta R_6(P) = k P R_6^2 / E,$$

где

$$k = \frac{1}{\alpha F_0} \left(1 + R_6^2 \frac{F_0}{J_6} \frac{\alpha^4}{720} \right),$$

$$\alpha = 2\pi z_1$$

Рис. VI 8 Схема действия контактных усилий в бандаже с «зубом»

Для турбинных ступеней угол α можно считать малым.

Суммарное радиальное перемещение бандажа в месте соединения с лопатками при учете температурных деформаций

$$\Delta R_0 = kPR_0 E^{-1} (R_0 E) (qR_0 F_0 + E\alpha_0 T_0).$$

В результате деформации диска и лопаток под действием центробежных сил и температурного поля периферийные сечения лопаток получают перемещения

$$\Delta R = \Delta R_d + \Delta l,$$

где ΔR_d и Δl — радиальное перемещение диска на наружном радиусе и удлинение лопатки.

Деформацией диска и лопаток от действия сил P можем пренебречь ввиду малости этих деформаций.

Уравнение совместности перемещений будет иметь вид

$$\Delta R_0 = \Delta R$$

или

$$kPR_0 E^{-1} (R_0 E) (qR_0 F_0 + E\alpha_0 T_0) = \Delta R,$$

отсюда

$$P = \frac{1}{k} \left[E \left(\frac{\Delta R}{R_0} - \alpha_0 T_0 \right) - q \frac{R_0}{F_0} \right]. \quad (VI.19)$$

Усилия, действующие на лопатки,

$$P_{\text{л}} = P. \quad (VI.20)$$

Силы P создают в сечениях замкнутого бандажа нормальные усилия (растягивающие или сжимающие) и изгибающие моменты. Усилия и моменты будут иметь максимальные значения в местах приложения этих сил, т. е. в местах соединения бандажа с лопатками [135]:

$$N_{\text{max}} = P [2 \lg(\alpha/2)];$$

$$M_{\text{max}} = -PR_0 [1 - 0,5 \operatorname{ctg}(\alpha/2)].$$

Представляя тригонометрические функции в виде рядов и сохраняя только первую степень угла α , ввиду его малости получим:

$$N_{\text{max}} \approx z_1 P (2\pi); \quad M_{\text{max}} \approx -\pi R_0 P (6z_1).$$

Тогда растягивающие напряжения в бандаже ¹

$$\sigma_r = [qR_0 + Pz_1 (2\pi)] F_0, \quad (VI.21)$$

а напряжения изгиба определяются в соответствии с формулами (VI.12).

Зная усилия, действующие на лопатки [см. формулу (VI.20)], находим растягивающие напряжения в шипах

$$\sigma_{\text{ш}} = P_{\text{л}} (z_{\text{ш}} F_{\text{ш}}). \quad (VI.22)$$

¹ Для учета ослабления бандажа отверстиями под шипы полученные значения напряжений следует умножить на $F_{\text{ост}}/F_0$.

Цельнофрезерованный бандаж с демпферной проволокой (см. рис. 1.19). Проверка прочности бандажа этой конструкции заключается в определении напряжений в цельнофрезерованной части бандажа и в сегментах демпферной проволоки. В цельнофрезерованной части (рис. VI.10) определяются напряжения среза и изгиба в сечении $I-I$ и напряжения растяжения и изгиба в сечении $II-II$.

Усилия среза и изгибающий момент в сечении $I-I$ будут:

$$C_{I-I} = \frac{\gamma \omega^2}{g} R_0 t_0 \int_0^b \delta(x) dx + C_{\text{ц}};$$

$$M_{I-I} = \frac{\gamma \omega^2}{g} R_0 t_0 \int_0^b (b-x) \delta(x) dx,$$

где $C_{\text{ц}}$ — центробежная сила шага проволоки. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \tau^{I-I} &= C_{I-I} (t_0 \delta_{I-I}); \\ \sigma_{\text{изг}}^{I-I} &= 6M_{I-I} / (t_0 \delta_{I-I}^2). \end{aligned} \right\} \quad (VI.23)$$

Аналогично находим центробежную силу и изгибающий момент, действующие в сечении $II-II$:

$$C_{II-II} = \frac{\gamma \omega^2}{g} R_0 t_0 \int_0^b \delta(x) dx + C_{\text{ц}};$$

$$M_{II-II} = \frac{\gamma \omega^2}{g} R_0 t_0 \int_0^{b_2} (b_1 - x) \delta(x) dx + \frac{1}{2} C_{\text{ц}} (a + d) \cos \alpha,$$

где

$$b_1 = b + (0,5(a + d) \cos \alpha);$$

$$b_2 = b + (a + 0,5d) \cos \alpha.$$

Напряжения в этом сечении соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p^{II-II} &= C_{II-II} \cos \alpha (at_0); \\ \sigma_{\text{изг}}^{II-II} &= 6M_{II-II} / (a^2 t_0); \end{aligned} \right\} \quad (VI.24)$$

суммарные

$$\sigma^{II-II} = \sigma_p^{II-II} + \sigma_{\text{изг}}^{II-II}.$$

При выводе этих формул с целью упрощения принято, что R_0 и t_0 постоянны в пределах $0 \leq x \leq b_2$ и равны их значениям для центра тяжести сечения $I-I$.

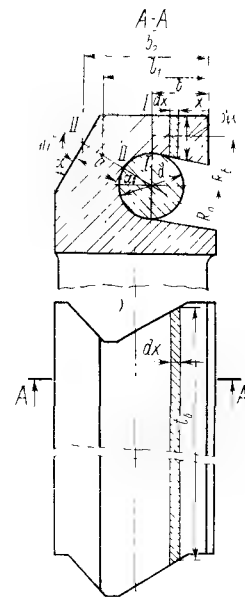


Рис. VI.10. Расчетная схема бандажа с проволоочной связью

Интегралы, входящие в формулы для усилий и моментов, могут быть легко вычислены по правилу трапеций. Для упрощения вычислений формулы для усилий и моментов удобно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} C_{I-I} &= Q \int_0^{\xi_1} \delta(\xi) d\xi + C_{II}; \\ M_{I-I} &= Q \int_0^{\xi_1} (\xi_1 - \xi) \delta(\xi) d\xi; \\ C_{II-II} &= Q \int_0^1 \delta(\xi) d\xi + C_{III}; \\ M_{II-II} &= Q \int_0^1 (\xi_2 - \xi) \delta(\xi) d\xi + \frac{1}{2} C_{II} (u + d) \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (VI.25)$$

где

$$Q = (\gamma \omega^2 / g) R_0 t_0 b_2; \quad \xi = x / b_2 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq b_2, \\ 0 \leq \xi \leq 1; \quad \xi_1 = b_1 / b_2; \quad \xi_2 = b_1 / b_2.$$

При проектировании цельнофрезерованного бандажа, внутри которого помещается демпферная проволока, центры тяжести бандажа и проволоки необходимо располагать относительно пера лопатки так, чтобы избежать дополнительных напряжений изгиба в верхних сечениях лопатки. Расчет демпферной проволоки, расположенной в бандаже, производится в том случае, если она выполняется с уступами. Напряжения в этом случае могут быть определены по формулам (VI.10).

Глава VII

РАСЧЕТ ХВОСТОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Из существующего многообразия конструкций соединения рабочих лопаток с диском ниже рассмотрен расчет широко применяемых в паровых турбинах хвостовых соединений трех типов: Т-образного, вильчатого и елочного торцевого. Основной нагрузкой, которую воспринимают хвостовые соединения, является центробежная сила. Напряжения изгиба, вычисляемые от действия паровых усилий, для Т-образных и вильчатых хвостов являются в некоторой степени условными, так как при плотном прилегании хвостов друг к другу эти напряжения будут отсутствовать или иметь весьма малые значения. В таких хвостовых соединениях и знакопеременные напряжения изгиба, возникающие при колеба-

ниях лопаток, будут иметь ограниченные значения, а в некоторых случаях практически отсутствовать.

Плотность установки лопаток в диске с Т-образными и вильчатыми хвостами может быть обеспечена как конструктивными, так и технологическими мероприятиями. К таким мероприятиям, как уже указывалось выше, можно отнести, например, установку лопаток на колесе, изготовленных из сталей с различными коэффициентами линейного расширения (аустенит, перлит), сварку отдельных лопаток в пакеты, тщательную пригонку лопаток по тангенциальным плоскостям и силовое их уплотнение при сборке и т. д. Все это будет снижать опасность усталостного разрушения Т-образных и вильчатых хвостовых соединений.

В отличие от Т-образного и вильчатого хвостовых соединений в елочном хвостовом соединении в силу его конструктивных особенностей всегда будут иметь место напряжения изгиба, возникающие как от действия статического изгибающего момента, так и знакопеременного, связанного с колебаниями рабочих лопаток. Это, в свою очередь, приводит к определенным трудностям при обеспечении работоспособности елочного хвостового соединения.

Хвостовые соединения представляют собой сложные конструкции, как правило, статически неопределимые, имеющие значительную концентрацию напряжений в угловых галтелях, радиусных переходах и в районе отверстий. При приближенном расчете хвостовых соединений обычно определяют сначала средние или номинальные напряжения в различных расчетных сечениях (основное напряженное состояние) и далее с использованием тех или иных приближенных аналитических или экспериментальных методов оценивают максимальные напряжения, действующие в местах концентрации. Заметим, что расчет хвостовых соединений по средним напряжениям представляет собой не что иное как оценку их прочности по несущей способности. Такая оценка, как уже указывалось в п. I.5, справедлива для высокопластичных материалов. Для материалов с ограниченной пластичностью и для хвостовых соединений, работающих длительное время в условиях ползучести, необходима оценка прочности с учетом максимальных напряжений в зонах концентрации.

VII.1. Т-ОБРАЗНОЕ ХВОСТОВОЕ СОЕДИНЕНИЕ

Основное напряженное состояние хвоста лопатки. Во время вращения ротора турбины Т-образные хвосты рабочих лопаток (рис. VII.1) испытывают воздействие центробежных сил, паровых усилий, а также воздействие реакций от соседних лопаток. Величина и распределение последних зависят от качества пригонки хвостов друг к другу при сборке лопаток на колесе, и поэтому учет их в расчете представляет значительные затруднения. Реактивные усилия будут, как правило, уменьшать напряжения, вызванные центробежными и паровыми силами, и в дальнейшем, при проверке прочности хвоста, они не учитываются.

Введем обозначения для центробежных сил отдельных частей хвоста: C_u — центробежная сила промельной части хвоста

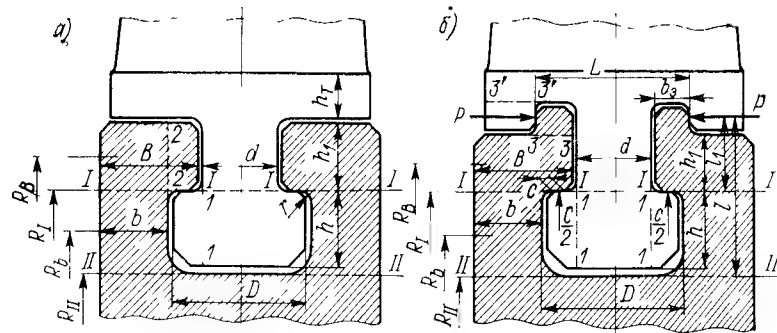


Рис. VII.1 Расчетная схема Т-образного хвостового соединения: а — без заплечиков, б — с заплечиками

с заплечиками; $C_{ш}$ — центробежная сила шейки, $C_{п}$ — центробежная сила полки. Вычисление этих центробежных сил не представляет труда. Например, для полки

$$C_{п} = \frac{\gamma \omega^2}{g} D h t_{ш} R_b = 2\pi \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{D h R_b^2}{z_1},$$

где z_1 — число рабочих лопаток на колесе.

Центробежная сила рабочей части лопатки и шага связей определяется формулой (III.5).

Для определения напряжений необходимо найти суммарную центробежную силу, действующую в расчетном сечении шейки хвоста (сечение I—I). Тогда

$$\sigma_I = \frac{C(0) + C_T + C_{ш}}{t_1 d}, \quad (VII.1)$$

где t_1 — шаг в сечении I—I, $t_1 = 2\pi R_I / z_1$.

В этом же сечении надо подсчитать напряжения изгиба от воздействия центробежных сил рабочей части лопатки и паровых усилий. Пусть центр масс пера лопатки со связями, расположенный на радиусе R_u , имеет координаты X_u и Y_u в системе осей, проходящих через середину хвоста (рис. VII.2). Тогда изгибающие моменты в расчетном сечении равны:

$$M_x^{(w)} = C(0) \frac{R_I}{R_u} Y_u; \quad M_y^{(w)} = -C(0) X_u.$$

Изгибающие моменты от паровых усилий равны:

$$M_x^{(q)} = M_u(0) + P_u(0)(h_T + h_1),$$

$$M_y^{(q)} = M_a(0) + P_a(0)(h_T + h_1),$$

где $M_u(0)$, $M_a(0)$, $P_u(0)$ и $P_a(0)$ — изгибающие моменты и перерезывающие силы в корневом сечении лопатки от действия паровых усилий (см. п. III.3); h_T и h_1 — длина промельной части и шейки хвоста

Для хвостового соединения с заплечиками (см. рис. VII.1, б) второе слагаемое в формуле для $M_y^{(q)}$ можно отбросить

Далее находим суммарные напряжения растяжения и изгиба в угловых точках сечения I—I

$$\sigma_I - \sigma_D \pm (M_x^{(w)} - M_x^{(q)}) W_x \mp (M_y^{(w)} - M_y^{(q)}) W_y, \quad (VII.2)$$

где $W_x = dt_1^2/6$ и $W_y = t_1 d^2/6$ — моменты сопротивления сечения I—I.

В сечении I—I вычислим напряжения среза

$$\tau_I = \frac{C(0) + C_T + C_{ш} + C'_{п}}{2ht_b}, \quad (VII.3)$$

где $C'_{п}$ — центробежная сила участка полки между сечениями I—I; $t_b = 2\pi R_b / z_1$ — шаг в среднем сечении полки.

На площадках контакта хвоста лопатки и обода диска будут иметь место напряжения смятия

$$\sigma_{сж} = C_{сж} (2ct_1), \quad (VII.4)$$

где $C_{сж}$ — суммарная центробежная сила профильной части лопатки, связей и хвоста; c — длина площадки смятия (см. рис. VII.1).

При проектировании Т-образного хвоста следует проявлять некоторую осторожность при назначении допускаемых напряжений смятия. Иногда с учетом того, что вблизи контактной площадки реализуется напряженное состояние, близкое к всестороннему сжатию, допускают чрезмерно высокие напряжения смятия. Однако результаты, полученные при решении контактных задач, указывают [142], что независимо от формы площадки контакта наиболее опасное для прочности материала напряженное состояние возникает не у поверхности контакта, а в точке на некоторой глубине под ней. Нечто подобное следует ожидать и в напряженном состоянии Т-образного хвоста вблизи площадки контакта. Чтобы приблизительно учесть указанную особенность напряженного состояния хвоста, будем искать сечение, наклоненное к площадке контакта, в котором касательные напряжения, обусловленные действием контактных усилий, будут иметь наибольшее значение. Касательные напряжения в сечении, расположенном под углом Φ к площадке контакта, можно найти из условий равновесия углового участка хвоста (рис. VII.3)

$$\tau_{\Phi} = \frac{c \sin 2\Phi}{D - (d + 2r)} \sigma_{сж}.$$

Рис. VII.2. Изгиб хвоста лопатки

Отсюда видно, что искомое сечение будет располагаться по отношению к площадке контакта под углом $\vartheta = \pi/4$. Касательные напряжения в этом сечении

$$\tau_{\vartheta} = \frac{c}{D - (d + 2r)} \sigma_{см}. \quad (VII.5)$$

Если в качестве допускаемого напряжения принять определенное значение $[\tau]$, то в соответствии с (VII.5) получим

$$[\sigma_{см}] \leq \frac{D - (d + 2r)}{c} [\tau].$$

Таким образом, принятое допускаемое значение касательного напряжения определяет также и максимально допустимое значение напряжений смятия на контактных площадках данного хвоста.

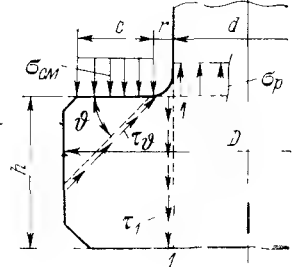


Рис. VII.3. Расчетная схема Т-образного хвоста

Основное напряженное состояние обода диска. В силу симметрии обода относительно средней плоскости диска можно рассмотреть напряженное состояние в одной его половине, которая представляет собой круговое кольцо, сопряженное с диском. Центробежные силы лопаток и собственной массы обода, реактивные усилия, возникающие в зацеплении заплечиков, вызывают в обode осесимметричное объемное напряженное состояние. При этом численные исследования [90] показали, что в поперечном сечении обода наибольшими напряжениями являются радиальные. Осевые и касательные напряжения малы, и ими можно пренебречь при оценке прочности. Эти наибольшие радиальные напряжения можно найти как из решения осесимметричной задачи, так и плоской, в которой рассматривается напряженное состояние в поперечном сечении обода без учета окружных напряжений. Как показывают численные расчеты [90], значения радиальных напряжений, полученные при решении той или другой задачи, близки между собой и разница между ними не превышает 5—10%. Это расхождение обусловлено отсутствием в плоской задаче разгружающего действия, которое производят окружные напряжения при деформации обода как кольца. Заметим, что отношение высоты такого кольца к его диаметру мало, чем и объясняется указанное небольшое различие в радиальных напряжениях.

Таким образом, при определении максимальных радиальных напряжений, в частности в зонах концентрации, можно рассматривать плоское напряженное состояние обода. Задачу можно еще более упростить, если из кольца обода вырезать балочку, ширина которой равна шагу лопаток. Расчеты показывают, что радиальные напряжения, определяемые по теории изгиба балок, также отличаются, как правило, не более чем на 10% от результатов расчета

обода при осесимметричном напряженном состоянии. Необходимо заметить, что в этом случае при расчете ободов с заплечиками нужно учитывать деформацию сдвига. Неучет деформаций сдвига в балочной схеме может привести к большой ошибке, особенно для ободов с относительно толстыми щечками (размер b на рис. VII.1). Последний приближенный метод расчета приведем ниже.

Для определения напряжений в обode с заплечиками необходимо прежде всего найти реактивное усилие в зацеплении, действующее на обод со стороны лопаток. Представим щечку обода как балку переменной высоты, ширина которой равна шагу лопаток. Балка жестко закреплена в сечении II—II (см. рис. VII.1) и шарнирно опирается в среднем сечении заплечика. Расчетная схема такой балки представлена на рис. VII.4.

В сечении I—I к балке приложен сосредоточенный изгибающий момент

$$M = CB_1 4,$$

где $C = C(0) + C_{хв} + C'$ — центробежная сила лопатки с хвостом и участком обода, высота которого h_1 , а ширина $2(B - b)$ (см. рис. VII.1, б).

При вычислении центробежной силы отдельных участков обода следует иметь в виду, что каждый из них представляет собой кольцо и центробежная сила его массы не полностью передается на расчетное сечение вследствие действия окружных напряжений. Приблизительно это будем учитывать введением в формулу для подсчета центробежной силы коэффициента 2/3. Так, для указанного участка обода

$$C' = \frac{2}{3} \frac{\gamma \omega^2}{g} 2(B - b) h_1 t_B R_B = \frac{8}{3} \pi \frac{\gamma \omega^2}{g} (B - b) h_1 \frac{R_B^3}{r_1}.$$

В зацеплении заплечиков обода и лопаток может иметь место технологический зазор δ , который необходимо учитывать при определении реактивного усилия. Для раскрытия статической неопределенности запишем уравнение совместности деформаций

$$\Delta_p + \delta/2 = 0,$$

где Δ_p — упругий прогиб балки в месте приложения силы P .

Применяя теорему Кастильяно для определения прогиба Δ_p , уравнение совместности деформаций запишем в виде

$$\int_0^{l_1} \frac{M_1}{EJ_B} \frac{dM_1}{dP} dx + \int_{l_1}^l \frac{M_2}{FJ_b} \frac{dM_2}{dP} dx + 1,2 \left[\int_0^{l_1} \frac{Q_1}{GF_B} \frac{dQ_1}{dP} dx + \int_{l_1}^l \frac{Q_2}{GF_b} \frac{dQ_2}{dP} dx \right] + \frac{\delta}{2} = 0.$$

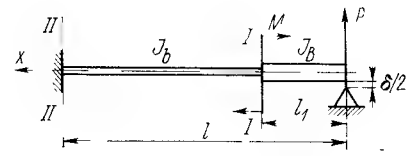


Рис. VII.4. К определению реактивного усилия в зацеплении заплечиков

Прогнбамн заплечников хвоста лопатки и обода диска пренебрегаем. В этом равенстве моменты инерции J_B и J_b на участках балки с высотой B и b , а также площади F_B и F_b переменны по длине. Однако, учитывая приближенность всего расчета, ограничимся их средними значениями. Тогда, с учетом того, что $M_1 = Px$; $M_2 = -Px - M$, $Q_1 = Q_2 = -P$, найдем

$$P \frac{l^3}{3EI_b} \left[\frac{l_1^3}{l^3} \frac{J_b}{J_B} + \left(1 - \frac{l_1^3}{l^3} \right) \right] + 1,2P \frac{l}{GF_b} \left[\frac{l_1}{l} \frac{I_b}{F_P} + \left(1 - \frac{l_1}{l} \right) \right] - \frac{M}{2EI_b} l' \left(1 - \frac{l_1^2}{l^2} \right) - \frac{\delta}{2}.$$

Учитывая, что

$$J_b = \pi R_b b^3 / 6 z_1; \quad J_B = \pi R_B B^3 / 6 z_1; \\ F_b = 2\pi l' R_b z_1, \quad F_B = 2\pi B R_B z_1,$$

и полагая $R_B R_b = 1$, окончательно получим

$$P = \frac{m_2}{m_1} C - \frac{1}{8} \frac{\alpha^3 l}{m_1} E \delta, \quad (VII 6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= [1 - \lambda^3 (1 - \beta^3)] + 0,6 (1 - \lambda) \alpha^2 [1 - \lambda (1 - \beta)], \\ m &= \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\beta} (1 - \lambda^3), \quad l' = 2\pi R z_1, \\ \alpha &= b/l, \quad \beta = B/l, \quad \lambda = l_1/l \end{aligned} \right\} \quad (VII 6a)$$

Зная реакцию P , можно вычислить изгибающий момент, действующий в любом сечении щеки обода. Для сечений $I-I$ и $II-II$ имеем

$$M_I = M - Pl_1, \quad M_{II} = M - Pl,$$

напряжения изгиба

$$\sigma_I^I = M_I W_I, \quad \sigma_{II}^{II} = M_{II} W_{II}, \quad (VII 7)$$

где $W_I = l_1 b^2 / 6$ и $W_{II} = l B^2 / 6$ — моменты сопротивления сечений $I-I$ и $II-II$. При расчете обода без заплечиков (см. рис. VII 1, а) в формулах для моментов нужно положить $P = 0$. Напряжения растяжения в этих сечениях таковы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p^I &= \frac{C(0) + C_{XB} + C_I}{2bt_I}; \\ \sigma_p^{II} &= \frac{C(0) + C_{XB} + C_{II}}{2bt_{II}}, \end{aligned} \right\} \quad (VII 8)$$

где C_I и C_{II} — центробежные силы участков обода, расположенных над сечениями $I-I$ и $II-II$.

Суммарные напряжения соответственно равны

$$\sigma_\Sigma^I = \sigma_p^I + \sigma_{II}^I; \quad \sigma_\Sigma^{II} = \sigma_p^{II} + \sigma_{II}^{II}. \quad (VII 9)$$

Вычисления показывают, что наиболее напряженным оказывается сечение $I-I$. Следует иметь в виду, что в сечении $I-I$ будет иметь место и концентрация напряжений в угловой галтели с радиусом r .

Далее находим напряжения среза в сечениях 2-2 (см. рис. VII.1, а) и 3-3 (см. рис. VII.1, б). В сечении 2-2 имеем

$$\tau_2 = \frac{C(0) + C_{XB} + C'}{2\pi h_1 R_B} z_1, \quad (VII 10)$$

а в сечении 3-3

$$\tau_3 = \frac{Pz_1}{2\pi (R_I + h_1) b_1}. \quad (VII 11)$$

Аналогично вычисляются напряжения среза от действия реактивного усилия и в сечении 3'-3' заплечика лопатки.

Для эффективной работы заплечиков необходимо, чтобы упругий прогиб щеки обода с учетом температурных расширений заведомо превосходил возможный технологический зазор δ , т. е. должно выполняться неравенство

$$\frac{Ml^2}{EJb} (1 - \lambda^2) + L(\alpha_d - \alpha_n) T > \delta, \quad (VII 12)$$

где L — расстояние между заплечиками, α_d и α_n — коэффициенты линейного расширения материала диска и лопаток при температуре T , °C.

Концентрация напряжений в хвосте лопатки. При изучении концентрации напряжений в Т-образном хвосте примем, что на него действует только центрально приложенная центробежная сила и что он находится в плоском напряженном состоянии. Наиболее полные систематизированные исследования напряженного состояния Т-образного хвоста были проведены методом фотоупругости в работах Хетени, результаты которых приведены в [131]. Максимальные напряжения, как и следовало ожидать, возникают в угловой галтели между вертикальной шейкой хвоста и горизонтальной полкой (галтель r , рис. VII 3). Приняв в качестве номинального среднее растягивающее напряжение в шейке хвоста, определим коэффициент концентрации в галтели

$$k = \sigma_{\max} / \sigma_p, \quad (VII.13)$$

где $\sigma_{\max}$ — максимальное напряжение на контуре галтели.

Коэффициенты концентрации в Т-образном хвосте зависят от соотношения его геометрических параметров r/d , D/d и h/d (см. рис. VII.3). Значения коэффициентов концентрации для широкого диапазона изменения этих параметров приведены на рис. VII.5. Приведенные здесь графики отличаются от диаграмм Хетени [131] тем, что они перестроены в других координатах, более удобных для практического использования. Кроме того, значения коэффициентов концентрации при $r/d = 0,2$ скорректированы

с учетом результатов исследований Ч. Г. Мустафина, проведенных в ЦКТИ им. И. И. Ползунова¹

Полученные зависимости для коэффициентов концентрации позволяют наиболее рационально выбирать параметры Т-образного хвоста, приближая его к оптимальному. Под оптимальной конструкцией Т-образного хвоста будем понимать такую, в которой напряжения во всех расчетных сечениях одновременно достигают своего допустимого максимального значения и в которой обеспечивается наибольшая несущая способность при заданных габаритных размерах.

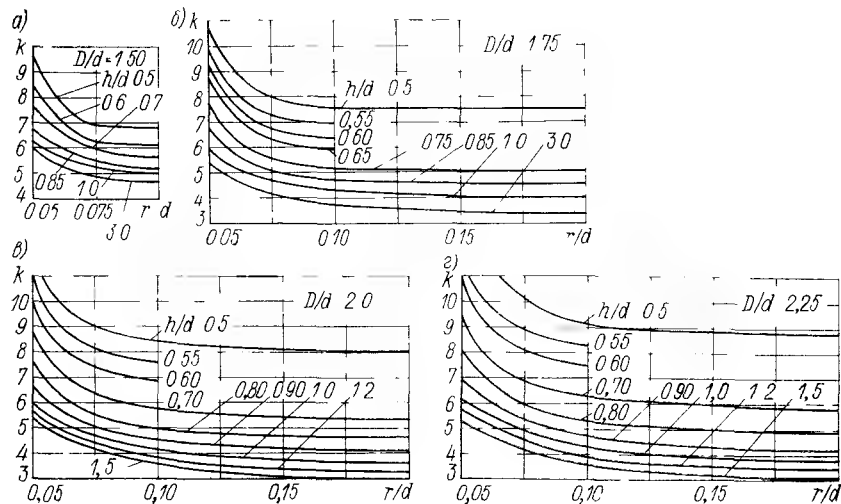


Рис VII 5 Коэффициенты концентрации напряжений в Т-образных хвостах

Оптимальные значения параметра r/d можно найти, анализируя кривые, приведенные на рис. VII 5. Как видно, с увеличением отношения r/d независимо от параметров h/d и D/d значения коэффициентов концентрации асимптотически приближаются к своим предельным значениям. При этом, начиная со значения $r/d = 0,1$, коэффициенты концентрации изменяются незначительно. Так, с увеличением отношения r/d от 0,1 до 0,15 они снижаются не более чем на 5—10% при всех значениях h/d и D/d . А в диапазоне $r/d = 0,15 \div 0,20$ коэффициенты концентрации практически остаются постоянными. Имея в виду такой характер изменения коэффициентов концентрации, а также учитывая конструктивные соображения, можно принять в качестве оптимального параметра r/d его значения, лежащие в пределах $r/d = 0,1 \div 0,15$.

¹ Данные Хетени при $r/d = 0,2$ оказались заниженными примерно на 20—30%.

Остановимся далее на выборе параметра h/d . Из кривых, приведенных на рис. VII 5, следует, что с увеличением параметра h/d коэффициенты концентрации в галтели снижаются, а несущая способность хвоста из условия прочности полки на срез в сечениях 1—1 повышается. Очевидно, что увеличивать этот параметр разумно до тех пор, пока не будет достигнуто условие равнопрочности полки на срез, а шейки хвоста на растяжение. Это условие может быть получено из рассмотрения равновесия участка полки между сечениями 1—1 (см. рис. VII 3). Оно имеет вид (центробежная сила массы выделенного участка пренебрегаем)

$$\sigma_p / \tau_1 = 2h/d \quad (\text{VII } 14)$$

Пусть допускаемое растягивающее напряжение в сечении 1—1 будет $[\sigma_p]$. Тогда при условии равнопрочности рассматриваемых сечений должно быть (см. п. I 5)

по критерию наибольших касательных напряжений $[\sigma_p] / [\tau_1] = 2$ и в соответствии с (VII 14) $h/d = 1,0$,

по критерию интенсивности напряжений $[\sigma_1] / [\tau_1] = \sqrt{3}$ и в соответствии с (VII 14) $h/d = \sqrt{3}/2 = 0,865$.

Примем в качестве оптимального наибольшее значение этого параметра, т. е. $h/d = 1,0$.

Зависимость, связывающую параметры r/d и D/d , получим из уравнения равновесия полки хвоста с учетом условия (VII 5), ограничивающего максимально допустимое значение напряжений смятия. Окончательно имеем (центробежная сила массы полки не учитывается)

$$[\sigma_p] / [\tau_\phi] = 2[D/d - (1 + 2r/d)] \quad (\text{VII } 15)$$

Как и выше, следует рассмотреть условие равнопрочности шейки хвоста и наклонного сечения полки при использовании критерия наибольших касательных напряжений и критерия интенсивности напряжений. Тогда в первом случае $[\sigma_p] / [\tau_\phi] = 2$, а $D/d = 2,2$ при $r/d = 0,10$ и $D/d = 2,3$ при $r/d = 0,15$, во втором случае $[\sigma_p] / [\tau_\phi] = \sqrt{3}$, а $D/d = 2,07$ при $r/d = 0,10$ и $D/d = 2,17$ при $r/d = 0,15$. Окончательно можно принять, что оптимальное значение параметра D/d лежит в пределах $D/d = 2,0 \div 2,3$.

Таким образом, для Т-образных хвостов наиболее рациональными геометрическими параметрами, обеспечивающими наибольшую несущую способность, являются

$$r/d = 0,10 - 0,15, \quad h/d = 1,0, \quad D/d = 2,0 - 2,3 \quad (\text{VII } 16)$$

Для хвостов, работающих в условиях ползучести, оптимальные параметры получены в работе [179]. Они близки к вышеуказанным соотношениям

$$r/d = 0,15 - 0,20, \quad h/d = 0,8 - 1,25, \quad D/d = 2,0 \quad (\text{VII } 17)$$

Как следует из кривых, приведенных на рис. VII 5, для Т-образных хвостов с оптимальными геометрическими параметрами

(VII.16) значения коэффициентов концентрации будут находиться в пределах $k = 3,7 \div 4,2$.

При проектировании Т-образных хвостов нужно иметь в виду, что максимальные напряжения в галтели в некоторых случаях могут превышать предел текучести материала. Однако это превышение будет иметь место в весьма ограниченной зоне, вблизи поверхности галтели. Поэтому, если материал лопатки обладает относительно высокой пластичностью, то такое превышение предела текучести не должно привести к опасным последствиям для работоспособности хвоста. Это превышение может быть тем больше, чем выше пластичность материала.

Концентрация напряжений в ободе диска. При изучении концентрации напряжений в ободе диска, как и выше, будем рассматривать напряжения в его плоском поперечном сечении. Очевидно, что концентрация напряжений будет иметь место в угловых галтелях с малыми радиусами скруглений (галтели верхнего и нижнего угла паза и галтель у основания запле- чика). Экспериментальные исследования, проведенные на плоских моделях, показывают,

Рис. VII.6. Полоса с односторонней галтелью

что наибольшие напряжения возникают в галтели верхнего угла паза (галтель радиуса r , рис. VII.1) [76]. Учитывая сложность задачи, ограничимся определением максимальных напряжений только в этой галтели. Быстрое затухание местных напряжений позволяет пренебречь взаимным влиянием галтелей как источников концентрации напряжений

Систематизированных экспериментальных исследований, подобных исследованиям концентрации напряжений в Т-образном хвосте, для обода диска не имеется. Ввиду этого будем использовать приближенные расчетные методы, основанные на решении задачи для полосы с односторонней галтелью при ее растяжении силой N и изгибе моментом M (рис. VII.6) [91]. Расчетные формулы для коэффициентов концентрации получены в зависимости от геометрических параметров полосы: относительного радиуса галтели r/b и относительной ее глубины B/b .

На рис. VII.7 в соответствии с расчетными формулами построены графики для коэффициентов концентрации в галтели при растяжении k_p и при изгибе $k_{\text{и}}$ полосы. Из кривых следует, что значения коэффициентов концентрации существенно зависят от относительного радиуса галтели r/b . Влияние второго параметра (B/b) заметно сказывается при его значениях, меньших 2,0. При $B/b \geq 2,0$ коэффициенты концентрации как при растяжении полосы, так и при изгибе практически зависят только от относительного радиуса галтели.

Представим расчетную схему щеки обода в виде полосы с односторонней галтелью, относительная глубина которой B/b (см. рис. VII.1). В сечении, совпадающем с галтелью (сечение $I—I$), действуют напряжения растяжения и изгиба, определяемые по формулам (VII.7) и (VII.8). Тогда максимальные напряжения в галтели обода диска, возникающие от действия растягивающих напряжений и напряжений изгиба, таковы:

$$\sigma_{\text{max}}^p = k_p \sigma_p; \quad \sigma_{\text{max}}^{\text{и}} = k_{\text{и}} \sigma_{\text{и}},$$

где k_p и $k_{\text{и}}$ — коэффициенты концентрации, определяемые по графикам рис. VII.7.

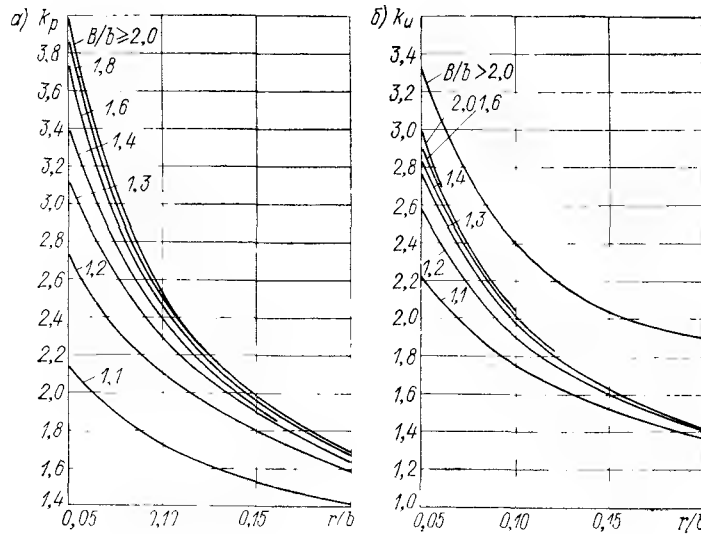


Рис. VII.7. Коэффициент концентрации в полосе с односторонней галтелью при растяжении (а) и при изгибе (б)

Предположим, что точки с указанными максимальными напряжениями на контуре галтели совпадают. В таком случае на основе принципа суперпозиции, справедливого в пределах упругости, найдем суммарные максимальные напряжения:

$$\sigma_{\text{max}} = k_p \sigma_p + k_{\text{и}} \sigma_{\text{и}}, \tag{VII.18}$$

или

$$\sigma_{\text{max}} = (k_p + \alpha_{\text{и}} k_{\text{и}}) \sigma_p, \tag{VII.18a}$$

где

$$\alpha_{\text{и}} = \sigma_{\text{и}} / \sigma_p.$$

Для обода без запле- чиков приближенно можно принять

$$\alpha_{\text{и}} = 3B/b, \tag{VII.19}$$

а для обода с заплечиками при $\delta = 0$

$$\alpha_{и} = 3 \left(B/b - 4 \frac{l_1}{B} \frac{m_2}{m_1} \right), \tag{VII.19a}$$

где m_1 и m_2 определяются по формулам (VII.6a).

При определении максимальных напряжений по формуле (VII.18) не учитывалось влияние конечного размера высоты полки h_1 (см. рис. VII.1). Однако, если высота полки h_1 соизмерима с шириной щеки b , то эффект растяжения и изгиба этой полки будет оказывать существенное влияние на величину максимальных напряжений в галтели обода. Представляя полку обода также в виде полосы шириной h_1 с односторонней относительно глубокой галтелью ($B/b > 2,0$), можно приближенно найти дополнительные напряжения в месте концентрации. Предполагая, что точки с максимальными напряжениями на контуре галтели от действия всех силовых факторов совпадают, найдем:

$$\sigma_{\max} = k_p \sigma_p + k_{и} \sigma_{и} + k_{p2} \sigma_{p2} + k_{и2} \sigma_{и2}; \tag{VII.20}$$

$$\sigma_{\max} = (k_p + \alpha_{и} k_{и} + \alpha_{p2} k_{p2} + \alpha_{и2} k_{и2}) \sigma_p, \tag{VII.20a}$$

где

$$\sigma_{p2} = \frac{P}{h_1 t_B}; \quad \sigma_{и2} = \frac{6}{h_1^2 t_B} \left[C \frac{B-b}{4} - P \left(l_1 - \frac{h_1}{2} \right) \right];$$

σ_{p2} и $\sigma_{и2}$ — напряжения растяжения и изгиба в сечении 2—2 (см. рис. VII.1, a); k_{p2} и $k_{и2}$ — коэффициенты концентрации в полосе с относительно глубокой галтелью, определяемые по кривым рис. VII.7 при $B/b > 2$ и $r/b = r/h_1$. Здесь $\alpha_{и} = \sigma_{и}/\sigma_p$; $\alpha_{p2} = \sigma_{p2}/\sigma_p$; $\alpha_{и2} = \sigma_{и2}/\sigma_p$.

Для обода без заплечиков приближенно можно принять:

$$\alpha_{и} = 3B/b; \quad \alpha_{и2} = 3 \frac{b^2}{h_1^2} \left(\frac{B}{b} - 1 \right); \quad \alpha_{p2} = 0, \tag{VII.21}$$

а для обода с заплечиками при $\delta = 0$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{и} &= 3 \left(\frac{B}{b} - 4 \frac{m_2}{m_1} \frac{l_1}{b} \right); \quad \alpha_{p2} = 2 \frac{m_2}{m_1} \frac{b}{h_1}; \\ \alpha_{и2} &= 3 \frac{b^2}{h_1^2} \left[\left(\frac{B}{b} - 1 \right) - 2 \frac{m_2}{m_1} \left(2 \frac{l_1}{b} - \frac{h_1}{b} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \tag{VII.21a}$$

Если в качестве номинальных напряжений принять суммарные напряжения растяжения и изгиба, действующие в угловой точке сечения I—I (см. рис. VII.1), в соответствии с (VII.9) $\sigma_{\Sigma} = \sigma_p + \sigma_{и}$, то формулу для коэффициента концентрации в галтели обода диска можно записать в виде

$$k = \sigma_{\max} \sigma_{\Sigma} = (k_p + \alpha_{и} k_{и} + \alpha_{p2} k_{p2} + \alpha_{и2} k_{и2}) \alpha_{\sigma}, \tag{VII.22}$$

где $\alpha_{\sigma} = \sigma_p/\sigma_{\Sigma}$.

Для оценки точности расчетного метода определения максимальных напряжений в табл. VII 1 приведено сопоставление отно-

сительных расчетных значений максимальных напряжений в галтели обода и экспериментальных для нескольких плоских моделей, исследованных методом фотоупругости [91]. Геометрические параметры испытанных моделей приведены в этой же таблице. Из сопоставления следует, что как для ободов с заплечиками, так и без заплечиков расхождения между расчетными и экспериментальными значениями находятся в пределах 15%. При этом нужно учитывать, что метод фотоупругости сам может давать ошибку до 5—10%.

Т а б л и ц а VII.1

Мо- дель	b, мм	B/b	h ₁ , b	r, b	r, h ₁	σ _{max} σ _p	σ _{max} ^{эксп} σ _p	Δ, %
1 *	35,0	1,230	0,514	0,057	0,111	15,82	18,7	—15,4
2 *	25,5	1,630	1,0	0,079	0,079	17,81	15,78	12,0
3	33,5	1,345	1,04	0,060	0,058	7,80	9,15	—14,7
4	25,0	1,380	1,04	0,060	0,058	8,35	9,50	—12,0
5	18,5	1,485	0,703	0,108	0,154	7,97	8,75	—9,0
* Модели без заплечиков								

П р и м е р. Определить максимальные напряжения в галтелях хвоста лопатки и обода диска Т-образного хвостового соединения.

Исходные данные (см. рис. VII.1) для хвоста лопатки: $d = 30$ мм; $h = 27$ мм; $D = 55$ мм; $r = 3,0$ мм; $R_1 = 374$ мм; для обода диска: $b = 27$ мм; $B = 40$ мм; $h_1 = 25$ мм; $r = 2,0$ мм; $l = 55$ мм; $l_1 = 28,5$ мм; $R_B = 386,5$ мм.

Число лопаток на колесе $z_1 = 60$. Зазор в зацеплении заплечиков $\delta = 0$. Частота вращения ротора $n = 3000$ об/мин. Шаг в сечении I—I (см. рис. VII.1) $t_1 = 2\pi R_1/z_1 = 39,2$ мм. Центробежная сила рабочей части лопатки с бандажом $C(0) = 36,4$ кН. Центробежные силы отдельных частей хвоста лопатки подсчитываем по известным формулам:

$$C_{п} = 2\pi \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{DhR_b^2}{z_1} = 16,0 \text{ кН}; \quad C_{ш} = 12,1 \text{ кН}; \quad C_r = 8,9 \text{ кН}$$

Центробежная сила рабочей лопатки с хвостом $C_{л} = 78,7$ кН.

Номинальные растягивающие напряжения в шейке хвоста лопатки в соответствии с формулой (VII.1) равны

$$\sigma_p = \frac{C(0) + C_r + C_{ш}}{t_1 d} = 48,8 \text{ МПа}$$

При заданных геометрических параметрах хвоста лопатки $r/d = 0,1$; $h/d = 0,9$; $D/d = 1,83$ — по кривым, приведенным на рис. VII 5, находим $k = 4,55$.

Максимальные напряжения в галтелях хвоста

$$\sigma_{\max} = k \sigma_p = 222 \text{ МПа}.$$

Переходим к вычислению напряжений в обода. Подсчитываем центробежные силы отдельных участков обода:

$$C' = \frac{8}{3} \pi \frac{\gamma \omega^2}{g} (B-b) h_1 \frac{R_B^2}{z_1} = 5,36 \text{ кН};$$

$$C_1 = 16,5 \text{ кН}; \quad C = C_{л} + C' = 83,3 \text{ кН}.$$

Номинальные растягивающие напряжения в сечении $I-I$ находим по формуле (VII.8)

$$\sigma_p = \frac{C_{II} + C_I}{2bt_I} = 42,4 \text{ МПа.}$$

Вычисляем реактивное усилие P по формуле (VII.6). Предварительно определим относительные величины в соответствии с (VII.6a):

$$m_1 = 1,06; m_2 = 0,2; \alpha = 0,491; \beta = 0,675; \lambda = 0,518.$$

Тогда $P = 14,85 \text{ кН.}$

Подсчитываем напряжения изгиба в сечении $I-I$ по формуле (VII.7)

$$\sigma_{II} = (M_I/W_I) = (M - Pl_I)/W_I = 76,4 \text{ МПа.}$$

Максимальные напряжения в галтели обода найдем по формуле (VII.20a):

$$\sigma_{\max} = (k_p + \alpha_{II}k_{II} + \alpha_{p2}k_{p2} + \alpha_{II2}k_{II2}) \sigma_p,$$

где

$$\alpha_{II} = \sigma_{II}/\sigma_p = 1,8, \quad \alpha_{p2} = \sigma_{p2}/\sigma_p = P/(h_1 t_B \sigma_p) = 0,346,$$

$$\alpha_{II2} = \frac{\sigma_{II2}}{\sigma_p} = \frac{6}{h_1^2 t_B} \left[C \frac{B-b}{4} - P \left(l_1 - \frac{h_1}{2} \right) \right] \frac{1}{\sigma_p} = 0,102.$$

Для заданных геометрических параметров обода $r/b = 0,074$; $B/b = 1,48$; $r/h_1 = 0,08$; по кривым, приведенным на рис. VII.7, находим: $k_p = 2,85$; $k_{II} = 2,37$; $k_{p2} = 2,92$; $k_{II2} = 2,66$.

Окончательно по формуле (VII.20a) получаем

$$\sigma_{\max} = (2,85 + 1,8 \cdot 2,37 + 0,346 \cdot 2,92 + 0,102 \cdot 2,66) 42,4 = 356,3 \text{ МПа.}$$

Если в качестве номинальных напряжений принять суммарные напряжения растяжения и изгиба в сечении $I-I$ (см. рис. VII.1)

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_p + \sigma_{II} = 118,8 \text{ МПа,}$$

то коэффициент концентрации в галтели обода

$$k = \sigma_{\max}/\sigma_{\Sigma} = 3,0.$$

Для сопоставления приведем некоторые результаты расчета обода диска, выполненные методом конечных элементов [158]¹. Исходные данные для расчета использовались те же, что и выше. При решении задачи рассматривалось осесимметричное напряженное состояние в обод с моделированием совместной работы заплечиков обода и лопаток. Проскальзывание в зацеплении заплечиков исключалось. В силу симметрии расчет проводился для одной половины обода. Расчетная область представлена на рис. VII.8, а. На оси симметрии исключались осевые перемещения; на границе по радиусу R_0 осевые перемещения исключались, а радиальные принимались постоянными и равными заданной величине, взятой из расчета диска ($u_r = \text{const}$). Нагрузка от центробежной силы лопаток прикладывалась на контактной площадке обода с лопатками и равномерно распределялась по этой площадке.

При построении конечно-элементной схемы используется специальная подпрограмма (узкопроблемно-ориентированный язык), позволяющая автоматизировать представление расчетной области

в дискретизированном виде. Предварительно вся расчетная область разбивается на отдельные стандартного вида подобласти (фрагменты), показанные на рис. VII.8, а цифрами I, II, ..., IX. Дальнейшая дискретизация производится ЭВМ по специальной подпрограмме при задании числа разбиений каждого фрагмента. При дискретизации используются четырехугольные осесимметричные конечные элементы произвольной формы. В подобластях, содержащих криволинейные границы (например, фрагменты I

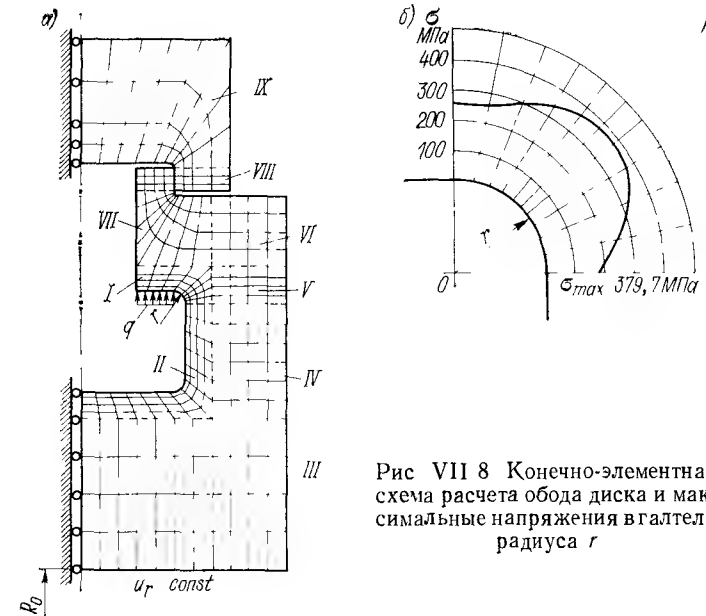


Рис VII.8 Конечно-элементная схема расчета обода диска и максимальные напряжения в галтели радиуса r

и II) используются криволинейные конечные элементы. Этим достигается наиболее точное моделирование относительно малых радиусов галтелей.

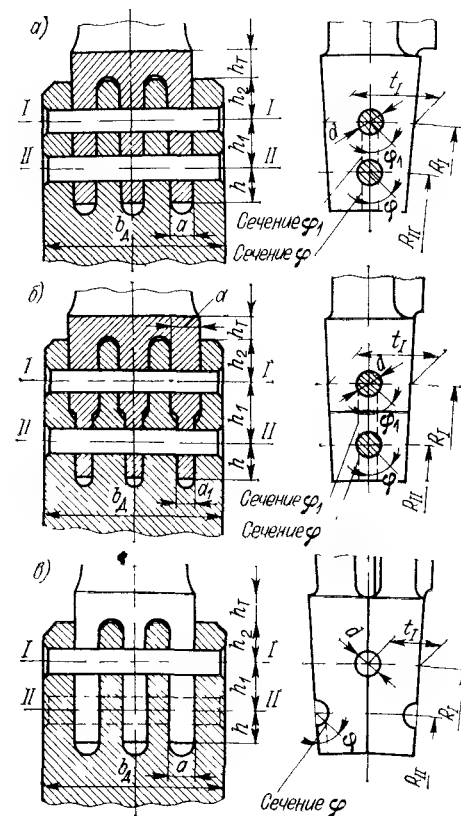
Минимизация энергетического функционала, записанного в перемещениях, относящихся к узловым точкам, сводится к решению алгебраической системы уравнений. Далее напряжения вычисляются в центре каждого элемента. На рис. VII.8, б представлена кривая максимальных напряжений на контуре галтели радиуса r (фрагмент I). Видно, что максимальные напряжения достигают величины $\sigma_{\max} = 379,7 \text{ МПа}$, в то время как максимальные напряжения, вычисленные выше по приближенному методу, равны $\sigma_{\max} = 356,3 \text{ МПа}$. Расхождение в максимальных расчетных напряжениях составляет в данном случае около 6%.

Заметим, что расчеты, проведенные методом конечных элементов, показывают весьма малую зависимость уровня максимальных напряжений в указанной галтели от закона задания поверхностной нагрузки на контактной площадке.

¹ Расчеты методом конечных элементов выполнялись инж. А. С. Слюсаренко.

VII.2. ВИЛЬЧАТОЕ ХВОСТОВОЕ СОЕДИНЕНИЕ

Рассмотрим расчет вильчатых хвостовых соединений с центральным и боковым расположением заклепок (рис. VII.9). В том и другом случаях будем считать, что центробежная сила, действующая на хвостовое соединение, распределяется равномерно по всем вилкам хвоста, а также между верхним и нижним рядами заклепок¹.



Основное напряженное состояние. Сила, которая стремится вырвать лопатку из венца диска, состоит из центробежной силы рабочей части лопатки, связей и центробежной силы хвоста. Кроме того, на хвостовое соединение действуют также паровые усилия. Как и при расчете Т-образного хвостового соединения, реакции между хвостами учитывать не будем. В сечении хвоста, ослабленном верхней заклепкой, действует центробежная сила

$$C_I = C(0) + C_T + C_{хв}^I,$$

где $C(0)$ — центробежная сила рабочей части лопатки со связями, определяемая выражением (III.5); C_T — центробежная сила протельной части хвоста; $C_{хв}^I$ — центробежная сила вилок хвоста над сечением $I—I$ (рис. VII.9).

Растягивающие напряжения в этом сечении

$$\sigma_p^I = C_I / F_I, \quad (VII\ 23)$$

где $F_I = (t_I - d) \sum a$ или $F_I = (t_I - 0,5d) \sum a$ — площадь сечения $I—I$ для хвоста с центральным и боковым расположением

заклепок соответственно; $t_I = 2\pi R_I / z_I$ — шаг в сечении $I—I$; $\sum a$ — суммарная ширина вилок хвоста.

Это же сечение будет подвержено изгибу, который возникает от действия паровых усилий, а также центробежных сил рабочей части лопатки и связей, если их равнодействующая, направленная по радиальной линии, не проходит через центр тяжести хвоста в сечении $I—I$.

Пусть центр масс рабочей части лопатки и связей, расположенный на радиусе $R_{ц}$, имеет координаты $X_{ц}$ и $Y_{ц}$ в системе осей, проходящих через середину хвоста (см. рис. VII.2). Тогда для хвоста с центральным расположением заклепки плечо изгиба в окружном направлении

$$Y_{хв} = Y_{ц} (R_I / R_{ц}),$$

а для хвоста с боковым расположением заклепки

$$Y_{хв} = Y_{ц} (R_I / R_{ц}) \pm d/4$$

В последней формуле знак плюс принимается при расположении заклепки со стороны положительных значений Y и наоборот.

Суммарный изгибающий момент с учетом паровых усилий, действующих в плоскости диска, равен (см. рис. VII.2)

$$M_x^I = C(0)Y_{хв} + M_x^{(q)}(0) + P_{II}(0)(h_T + h_2),$$

где $M_x^{(q)}(0)$ и $P_{II}(0)$ — изгибающий момент и перерезывающая сила в корневом сечении лопатки от действия паровых усилий (см. п. III.3).

Тогда напряжения изгиба в сечении $I—I$

$$\sigma_{II}^I = M_x^I / W_I, \quad (VII\ 24)$$

где $W_I = \left(1 - \frac{d^3}{t_I^3}\right) \frac{t_I^2 \sum a}{6}$ — для хвоста с центральным рас-

положением заклепки и $W_I = \left(1 - 0,5 \frac{d}{t_I}\right)^2 \frac{t_I^2 \sum a}{6}$ — для хвоста с боковым расположением заклепки.

Суммарные напряжения растяжения и изгиба в сечении $I—I$

$$\sigma_{\Sigma}^I = \sigma_p^I + \sigma_{II}^I. \quad (VII\ 25)$$

В сечении $II-II$ растягивающие напряжения следует оценивать только для хвостов со ступенчатой шириной вилок, так как для хвостов с постоянной шириной вилок они будут заведомо меньшими,

$$\sigma_p^{II} = \frac{C(0) + C_T + C_{хв}^{II}}{2F_{II}}, \quad (VII\ 26)$$

где $C_{хв}^{II}$ — центробежная сила вилок хвоста над сечением $II-II$; $F_{II} = (t_{II} - d) \sum a_1$ или $F_{II} = (t_{II} - 0,5d) \sum a_1$ — площадь сечения $II-II$; $t_{II} = 2\pi R_{II} / z_I$ — шаг в сечении $II-II$.

¹ При упругом деформировании верхний и нижний ряды заклепок нагружены неодинаково.

Для проверки прочности заклепок необходимо вычислить напряжения среза в них и напряжения смятия. При равномерном распределении нагрузки между рядами заклепок напряжения среза определяются по формуле

$$\tau = 4C/(nm\pi d^2), \tag{VII 27}$$

где C — суммарная центробежная сила лопатки, связей и хвоста; n — число рядов заклепок; m — число срезов полного сечения заклепки в одном ряду.

Напряжения смятия

$$\sigma_{см} = C/(nF_{см}), \tag{VII 28}$$

где $F_{см}$ — площадь смятия в одном ряду заклепок.

Так, например, для хвостового соединения с боковыми заклепками (рис. VII.9, в) площадь смятия соответственно по вилкам хвоста и гребням диска такова:

$$F_{см}^I = 0,5d \sum a \quad \text{и} \quad F_{см}^{II} = 0,5d (b_d - \sum a).$$

Для оценки прочности гребней обода диска необходимо определить растягивающие напряжения в сечениях, ослабленных заклепками. Эти напряжения, например в нижнем сечении II—II, можно подсчитать по формуле

$$\sigma_{об}^{II} = \frac{C^I \cdot C_{об}^{II}}{(2\pi R_{II} - z_3 d) \sum b} z_1, \tag{VII 29}$$

где $C_{об}^{II}$ — центробежная сила одного шага гребней над расчетным сечением II—II¹; $\sum b = b_d - \sum a$ — суммарная ширина гребней обода в расчетном сечении; z_1 — число заклепок в одном ряду по окружности колеса.

В хвостовом соединении со ступенчатой шириной вилок следует проводить оценку прочности всех сечений, ослабленных заклепками.

Экспериментальные исследования несущей способности вильчатых хвостовых соединений показали, что кроме разрушений по указанным выше расчетным сечениям, могут произойти разрушения путем среза и по сечениям φ и φ_1 хвоста лопатки (рис. VII.9) или по аналогичным сечениям обода диска². Следовательно, при оценке прочности вильчатого хвостового соединения необходимо вычислять напряжения среза в этих сечениях и выбирать размеры h , h_1 и h_2 таким образом, чтобы напряжения среза здесь находились в допустимых пределах.

¹ Как и выше, при вычислении центробежной силы гребней для приближенного учета разгружающего действия окружными напряжениями в формулу следует вводить коэффициент 2/3

² Экспериментальные исследования несущей способности вильчатых хвостовых соединений при нормальной температуре проведены в лаборатории паровых турбин Ленинградского металлического завода канд. техн. наук А. Э Угорским.

Для вывода расчетных формул рассмотрим простейший пример передачи усилия P на пластину через штифт или заклепку (рис. VII.10, а)¹. Будем предполагать, что контактное давление распределяется по контуру отверстия по закону косинуса (рис. VII.10, в), т. е.

$$p = p_0 \cos \varphi \quad \text{при} \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2,$$

где p_0 и p — интенсивности контактного давления (МПа) соответственно при $\varphi = 0$ и текущем значении угла φ .

Заметим, что распределение нормального контактного давления, возникающего на поверхности отверстия при передаче усилия P через заклепку, существенным образом зависит от точности

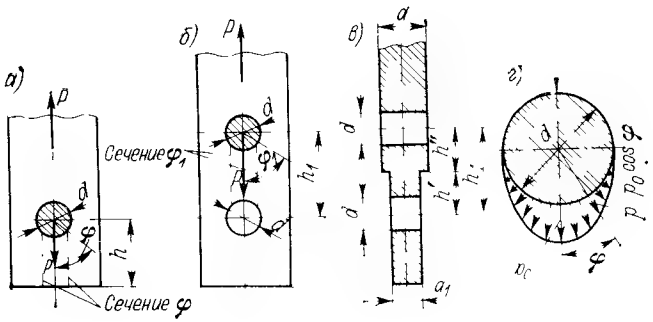


Рис. VII.10. К выводу формул для напряжений среза

изготовления отверстия и заклепки. Поэтому здесь в качестве расчетной схемы приближенно принят такой закон распределения, который бы принципиально отражал схему работы заклепочного соединения.

Неизвестный параметр p_0 найдем из условий равновесия заклепки

$$P = 2a \int_0^{\pi/2} p \cos \varphi r d\varphi = 2arp_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi,$$

где a — толщина пластины.
Откуда

$$p_0 = 4P/(\pi ad),$$

а закон распределения контактного давления запишется в виде

$$p = \frac{4P}{\pi ad} \cos \varphi \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \tag{VII 30}$$

¹ Расчетные формулы получены канд. техн. наук А. Э Угорским.

Для определения напряжений по сечениям, положение которых определяется угловой координатой φ (рис. VII.10, а), найдем предварительно усилие среза

$$T_{ср} = 2a \int_0^{\varphi} p \cos \varphi r d\varphi$$

Подставив сюда (VII.30) и выполнив интегрирование, получим

$$T_{ср} = P(2\varphi + \sin 2\varphi) \pi.$$

Замечая, что суммарная площадь среза

$$F_{\varphi} = ad \left(2 \frac{h}{d} - \cos \varphi \right),$$

находим

$$\tau_{\varphi} = \frac{P}{\pi ad} \frac{2\varphi + \sin 2\varphi}{2\lambda - \cos \varphi}, \quad (\text{VII.31})$$

λ — геометрический параметр,
 $\lambda = h/d$.

Очевидно, что при оценке прочности необходимо определять напряжения τ_{φ} в тех сечениях, где они будут наибольшими. Угловую координату φ для таких сечений можно найти из условия

$$d\tau_{\varphi} d\varphi = 0.$$

Это условие приводит к уравнению

$$\cos \varphi = 4\lambda \cos^2 \varphi - \cos^3 \varphi - \varphi \sin \varphi. \quad (\text{VII.32})$$

Решение уравнения (VII.32) может быть найдено графическим методом. Для этого необходимо построить график функции

$$f_1 = \cos \varphi \quad \text{при} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

и далее на этот график нанести семейство кривых

$$f_2 = 4\lambda \cos^2 \varphi - \cos^3 \varphi - \varphi \sin \varphi$$

для ряда значений параметра λ .

Абсциссы точек пересечения этого семейства с косинусоидой и определяют решение уравнения (VII.32) для соответствующих значений параметра λ . Для практических расчетов на рис. VII.11 построен график для угловой координаты φ , определяющей положение сечения с наибольшими напряжениями в зависимости от параметра λ .

Аналогичным образом нетрудно получить расчетную формулу для напряжений среза по сечениям, расположенным между двумя отверстиями (см. рис. VII.10, б). В этом случае усилие среза будет определяться по формуле

$$T_{ср} = (P/\pi)(2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1),$$

а площадь среза

$$F_{\varphi_1} = 2ad(h_1/d - \cos \varphi_1).$$

Тогда

$$\tau_{\varphi_1} = \frac{P}{2\pi ad} \frac{2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1}{\lambda_1 - \cos \varphi_1}, \quad (\text{VII.33})$$

где λ_1 — геометрический параметр, $\lambda_1 = h_1/d$.

Угол φ_1 , определяющий сечение с наибольшими напряжениями среза τ_{φ_1} , находится из уравнения, подобного уравнению (VII.32):

$$\cos \varphi_1 = 2\lambda_1 \cos^2 \varphi_1 - \cos^3 \varphi_1 - \varphi_1 \sin \varphi_1. \quad (\text{VII.32a})$$

Решив это уравнение графическим методом для ряда значений параметра λ_1 , можно построить зависимость угловой координаты φ_1 от этого параметра. С измененным масштабом кривая $\varphi_1 = \varphi_1(\lambda_1)$ совпадает с кривой $\varphi = \varphi(\lambda)$ (рис. VII.11).

Для случая, показанного на рис. VII.10, б, напряжения среза в сечениях между отверстиями вычисляются по формуле, которая получена путем аналогичных рассуждений:

$$\tau_{\varphi_1} = \frac{P}{\pi(a+a_1)d} \frac{2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1}{\lambda'_1 - \cos \varphi_1}, \quad (\text{VII.34})$$

где

$$\lambda'_1 = 2 \frac{ah'' + a_1h'}{(a+a_1)d}.$$

Если $h' = h'' = 0,5h_1$, то

$$\tau_{\varphi_1} = \frac{P}{2\pi da_{ср}} \frac{2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1}{\lambda_1 - \cos \varphi_1}, \quad (\text{VII.35})$$

где $a_{ср} = 0,5(a+a_1)$ и $\lambda_1 = h_1/d$.

И в первом, и во втором случаях значения угла φ_1 находятся по графику (рис. VII.11) при фиксированном значении λ_1 или λ'_1 . Полученные формулы нетрудно распространить на вычисление напряжений среза в соответствующих сечениях вильчатого хвостового соединения. Так, для хвоста с центральной заклепкой при постоянной ширине вилок (см. рис. VII.9, а) в соответствии с (VII.31) и (VII.33) имеем:

$$\tau_{\varphi} = \frac{C}{n\pi d \sum a} \frac{2\varphi + \sin 2\varphi}{2\lambda - \cos \varphi}, \quad (\text{VII.36})$$

$$\tau_{\varphi_1} = \frac{C}{2n\pi d \sum a} \frac{2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1}{\lambda_1 - \cos \varphi_1}, \quad (\text{VII.37})$$

где C — суммарная центробежная сила лопатки со связями и хвостом; n — число рядов заклепок; $\sum a$ — суммарная ширина вилок.

Для хвоста со ступенчатой шириной вилок (см. рис. VII.9, б) напряжения в сечениях φ определяются по формуле (VII.36)

с заменой $\sum a$ на $\sum a_1$, а для вычисления напряжений в сечениях φ_1 можно воспользоваться формулой (VII.35), т. е.

$$\tau_{\varphi_1} = \frac{C}{2n\pi d \sum a_{c,p}} \frac{2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1}{\lambda_1 - \cos \varphi_1}, \tag{VII 38}$$

где $\sum a_{c,p} = 0,5 (\sum a + \sum a_1)$ и $\lambda_1 = h_1/d$
 Для хвоста с односторонней заклепкой напряжения среза, очевидно, следует вычислить только в сечениях φ (см. рис. VII.9, в)

$$\tau_{\varphi} = \frac{2C}{n\pi d \sum a} \frac{2\varphi + \sin 2\varphi}{2\lambda - \cos \varphi}. \tag{VII.39}$$

Во всех случаях угловые координаты φ и φ_1 для фиксированных значений параметров λ и λ_1 находятся по графику рис. VII.11. Полученными формулами (VII.31), (VII.33) и (VII.35) можно воспользоваться и для приближенной оценки напряжений среза в сечениях φ и φ_1 гребней обода диска. Например, для хвостового соединения со ступенчатой шириной вилок (см. рис. VII.9, б) напряжения в этих сечениях таковы:

$$\tau_{\varphi}^{об} = \frac{C}{n\pi d \sum b} \frac{2\varphi + \sin 2\varphi}{\cos \varphi}; \tag{VII 40}$$

$$\tau_{\varphi_1}^{об} = \frac{C}{2n\pi d \sum b_{c,p}} \frac{2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1}{\lambda_1 - \cos \varphi_1}, \tag{VII 41}$$

где $\sum b = b_d - \sum a$ и $\sum b_{c,p} = b_d - (\sum a + \sum a_1)/2$ — суммарная ширина гребней обода в расчетном сечении; $\lambda = h_2/d$ и $\lambda_1 = h_1/d$ — геометрические параметры гребней обода.

Углы φ и φ_1 , как и выше, определяются по графику рис. VII.11 для фиксированных значений λ и λ_1 .

Концентрация напряжений в хвосте лопатки. При изучении концентрации напряжений ограничимся рассмотрением вильчатых хвостовых соединений с двумя рядами центрально расположенных заклепок (см. рис. VII.9, а, б). Будем предполагать, что трение в заклепочном соединении отсутствует, а контактное давление распределяется по контуру отверстия по принятому выше косинусоидальному закону.

При определении максимальных напряжений на контуре отверстий в хвосте лопатки вилки хвоста будем представлять в виде полос конечной ширины, которые нагружены центрально приложенными растягивающими силами. Эти силы передаются на вилки хвоста через заклепки. Пусть через верхнюю заклепку передается сила C_1 , а через нижнюю — C_2 , которые в сумме равны полной центробежной силе рабочей лопатки с хвостом, т. е. $C_1 + C_2 = C$. Тогда в сечении, ослабленном верхней заклепкой, будут действовать две силы — C_1 и C_2 , а в сечении, ослабленном нижней заклепкой, — только сила C_2 .

Рассмотрим верхнее сечение. При определении концентрации напряжений нужно учитывать, что эффект действия указанных двух сил будет здесь различным [173]. Сила C_1 вызывает на контуре верхнего отверстия такую же концентрацию, как в полосе с отверстием, заполненным заклепкой, при передаче усилия через эту заклепку — нагруженное отверстие (рис. VII.12, а). Сила C_2 вызывает такую концентрацию в зоне этого отверстия, как в полосе со свободным отверстием при ее растяжении (рис. VII.12, б).

Задача определения максимальных напряжений на контуре верхнего заклепочного отверстия распадается, таким образом, на

две. Вначале определяют максимальные напряжения отдельно от сил C_1 и C_2 , а далее, пользуясь принципом суперпозиции в пределах упругости, находят и суммарные максимальные напряжения на контуре отверстия. Проведенное разделение эффекта концентрации напряжений позволяет использовать результаты многочисленных экспериментальных исследований, полученные различными авторами и приведенные в виде обобщенных кривых в книге Р. Петерсона [131]. Экспериментальные исследования, соответствующие указанным двум задачам, были выполнены методом фотоупругости, и их результаты приведены на рис. VII.12 в виде зависимостей коэффициентов концентрации k_1 (для рис. VII.12, а) и k_2 (для б) от параметра d/t . Зная коэффициенты концентрации, нетрудно найти максимальные напряжения на контуре отверстия от действия сил C_1 и C_2 . Они будут равны¹:

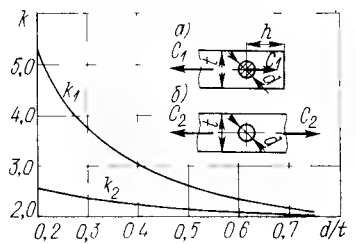


Рис. VII.12. Коэффициенты концентрации напряжений в полосе с отверстием, заполненным заклепкой (а), и со свободным контуром (б)

$$\sigma_{\max 1} = k_1 \frac{C_1}{(t-d) \sum a};$$

$$\sigma_{\max 2} = k_2 \frac{C_2}{(t-d) \sum a}.$$

Введя обозначения

$$\alpha_1 = C_1/C, \quad \alpha_2 = C_2/C \quad \text{и} \quad \sigma_{ном} = C/(t-d) \sum a,$$

найдем суммарные максимальные напряжения от действия двух сил C_1 и C_2

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max 1} + \sigma_{\max 2} = (\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2) \sigma_{ном}$$

В полученной формуле номинальное напряжение вычислено с точностью до центробежной силы участков вилок хвоста, лежащих ниже сечения I—I, и является завышенным. В дальнейшем при

¹ Значки, указывающие отношения величин к сечению I—I, здесь опущены.

практических расчетах в качестве номинальных напряжений следует принимать растягивающие напряжения в сечении $I—I$, которые подсчитываются по формуле (VII.23).

Кроме того, как и выше, будем считать, что центробежная сила, действующая на хвостовое соединение, распределяется между верхним и нижним рядами заклепок равномерно, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$. Тогда окончательно имеем

$$\sigma_{\max} = k \sigma_p, \quad (\text{VII.42})$$

где $k = 0,5 (k_1 + k_2)$ — коэффициент концентрации в зоне верхнего заклепочного отверстия хвоста лопатки; σ_p — растягивающие напряжения в сечении $I—I$, определяемые по формуле (VII.23).

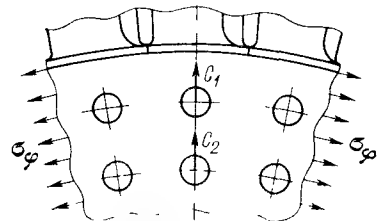


Рис. VII.13. Расчетная схема обода диска вильчатого хвостового соединения

Для хвостов со ступенчатой шириной вилки следует определять максимальные напряжения и на контуре нижнего заклепочного отверстия. В этом случае эффект действия силы C_2 для нижнего отверстия будет аналогичен эффекту действия силы C_1 для верхнего отверстия. Тогда, пользуясь кривой для k_1 (рис. VII.12, а),

можем найти коэффициент концентрации для этого случая и максимальные напряжения. В качестве номинальных здесь нужно принять растягивающие напряжения в сечении $II—II$, определяемые по формуле (VII.26). Заметим, что при определении максимальных напряжений по формуле (VII.42) не учитывается взаимное влияние отверстий, так как используемые здесь результаты экспериментальных исследований получены при испытании полос с одним отверстием.

Концентрация напряжений в гребнях обода. При изучении концентрации напряжений в гребнях обода диска будем пренебрегать взаимным влиянием отверстий верхнего и нижнего рядов заклепок. Пусть, как и выше, через верхний ряд заклепок передаются силы C_1 , а через нижний ряд — силы C_2 , которые в сумме равны центробежной силе лопатки с хвостом. Будем считать, что центробежная сила лопаток распределяется между рядами заклепок равномерно, т. е.

$$C_1 = C_2 = C/2.$$

Рассмотрим концентрацию напряжений в районе нижнего ряда заклепочных отверстий. В этом случае гребень обода можно рассматривать как полубесконечную пластину с бесконечным рядом круговых отверстий, заполненных заклепками, через которые передаются силы C_2 . Кроме того, пластина находится при двухосном растяжении. В одном из направлений (радиальном) действуют напряжения, вызванные силами C_1 и центробежной силой самих

гребней, а во втором (окружном) — окружные напряжения, обусловленные напряженным состоянием диска (рис. VII.13). Эффект действия радиальных и окружных напряжений сводится к двухосному растяжению пластины, имеющей бесконечный ряд свободных отверстий. Силы C_2 будут вызывать такую концентрацию напряжений, какая имеет место в полубесконечной пластине с отверстиями, заполненными заклепками, при передаче усилий через эти заклепки — нагруженные отверстия (рис. VII.14).

Задача определения максимальных напряжений на контуре заклепочных отверстий в ободе, как и в хвосте лопатки, распадается, таким образом, на две. Для оценки концентрации напряжений

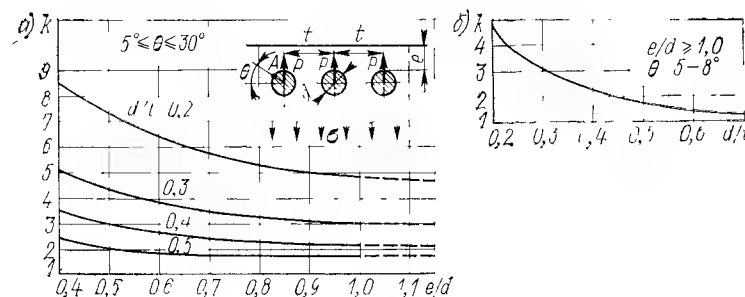


Рис. VII.14. Коэффициент концентрации в полубесконечной пластине с отверстиями, расположенными у края (отверстия заполнены заклепками); θ — координата точки с максимальным напряжением

в пластине с бесконечным рядом свободных отверстий при двухосном растяжении можно воспользоваться формулой И. Г. Теве-ровского [167], которая приближенно учитывает взаимное влияние отверстий

$$k_1 = \left(3 - \frac{d}{t}\right) - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad \text{при} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2,$$

где d и t — диаметр и шаг отверстий; σ_1 и σ_2 — главные напряжения в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

В нашем случае в качестве напряжений σ_1 примем радиальные напряжения в сечении гребня, ослабленном нижним рядом заклепок,

$$\sigma_r = \frac{C_1 + C_{об}^{II}}{(t-d) \sum b} = \frac{1}{2} \kappa \sigma_{ном},$$

где $\kappa = 1 + 2C_{об}^{II}/C$; $\sigma_{ном}$ — растягивающие напряжения, вызванные центробежными силами лопаток в сечении гребней, ослабленном нижним рядом заклепок; $\sigma_{ном} = C/[(t-d) \sum b]$.

Вторыми главными напряжениями σ_2 будут окружные направления σ_ϕ . Тогда

$$k_1 = \left(3 - \frac{d}{t}\right) - \frac{2}{\kappa} \frac{\sigma_\phi}{\sigma_{ном}},$$

а максимальные напряжения на контуре свободного отверстия

$$\sigma_{\max 1} = k_1 \sigma_r = \left[\left(3 - \frac{d}{t} \right) \kappa - 2 \frac{\sigma_\varphi}{\sigma_{\text{НОМ}}} \right] \frac{\sigma_{\text{НОМ}}}{2}. \quad (\text{VII.43})$$

Концентрация напряжений в полубесконечной пластине с нагруженными отверстиями исследовалась целым рядом авторов как путем экспериментальных исследований, так и путем приближенных аналитических решений.

Данные, приведенные в книге Р. Петерсона [131], позволяют построить графики для коэффициентов концентрации (рис. VII.14) в полубесконечной пластине с нагруженными отверстиями. Коэффициенты концентрации, представленные здесь, пересчитаны на номинальные растягивающие напряжения в ослабленном сечении пластины в отличие от [131], где в качестве номинальных приняты напряжения смятия в заклепочном соединении. Максимальные напряжения в этом случае на контуре нагруженных отверстий, создаваемые силами C_2 , таковы:

$$\sigma_{\max 2} = k_2 \frac{C_2}{(t-d) \sum b} = k_2 \frac{\sigma_{\text{НОМ}}}{2}. \quad (\text{VII.44})$$

Далее, предполагая, что точки с максимальными напряжениями $\sigma_{\max 1}$ и $\sigma_{\max 2}$ на контуре отверстий совпадают или близки и используя принцип суперпозиции, найдем суммарные максимальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max 1} + \sigma_{\max 2} = k \sigma_{\text{НОМ}}; \quad (\text{VII.45})$$

$$k = \frac{1}{2} \left[\left(3 - \frac{d}{t} \right) \kappa - 2 \frac{\sigma_\varphi}{\sigma_{\text{НОМ}}} + k_2 \right], \quad (\text{VII.45a})$$

где k — коэффициент концентрации напряжений в районе нижнего ряда заклепочных отверстий в гребне обода диска.

Если центробежная сила гребней обода мала по сравнению с центробежными силами лопаток, то в формуле (VII.45a) можно принять $\kappa = 1$. Это упрощение справедливо для относительно длинных лопаток.

Для хвостовых соединений со ступенчатой шириной вилок необходимо вычислять максимальные напряжения и на контуре заклепочных отверстий верхнего ряда. В этом случае в ослабленном сечении действуют напряжения, вызванные силами C_1 , передаваемыми через верхний ряд заклепок и окружающие напряжения σ_φ (см. рис. VII.13). И здесь гребень диска будем рассматривать как полубесконечную пластину с бесконечным рядом отверстий, расположенных у края.

Под действием сил C_1 максимальные напряжения, возникающие на контуре отверстий под заклепки, имеют место вблизи точки А (см. рис. VII.14, а) и определяются по формуле

$$\sigma_{\max}^A = k_A \sigma_{\text{об}}^I, \quad (\text{VII.46})$$

где k_A — коэффициент концентрации в полубесконечной пластине с бесконечным рядом нагруженных отверстий, определяемый по кривым рис. VII.14; $\sigma_{\text{об}}^I$ — растягивающие напряжения в сечении гребней, ослабленном верхним рядом заклепок.

Максимальные напряжения от действия окружающих напряжений будут иметь место в точке В (рис. VII.15). Приближенно их можно оценить, используя данные [131] для коэффициента концентрации в полубесконечной пластине с отверстием, расположенным у края, при ее растяжении. Приняв в качестве номинальных окружающие напряжения σ_φ , получим

$$\sigma_{\max}^B = k_B \sigma_\varphi. \quad (\text{VII.47})$$

В этом случае взаимное влияние отверстий не учитывается.

Раздельное определение максимальных напряжений в районе верхнего ряда отверстий от двух указанных силовых факторов приводит к некоторому их завышению, что следует учитывать при оценке прочности хвостового соединения.

В заключение приведем оптимальные геометрические параметры для вильчатого хвоста, обеспечивающие равнопрочность всех его элементов¹. В качестве геометрических параметров хвоста принимаются отношения t'/d , h/d и h_1/d . В результате испытаний вильчатых хвостовых соединений на несущую способность, а также путем расчетных исследований несущей способности с учетом концентрации напряжений установлено, что оптимальными параметрами являются:

$$t'd = 3 \div 3,5; \quad h'd = 1,5; \quad h_1'd = 2,0. \quad (\text{VII.48})$$

Указанные параметры получены для вильчатого хвостового соединения с центральной заклепкой с постоянной шириной вилок.

VII.3. ЕЛОЧНОЕ ХВОСТОВОЕ СОЕДИНЕНИЕ

Изучению статической и динамической прочности елочных хвостовых соединений (рис. VII.16) посвящен целый ряд исследований, результаты которых наиболее полно представлены в [112]. Проектирование елочного хвостового соединения распадается на два этапа:

выбор основных геометрических параметров, обеспечивающих статическую прочность соединения;

проведение проверочного расчета на выносливость (в некоторых случаях модельных усталостных испытаний).

¹ Оптимальные параметры получены канд. техн. наук. А. Э. Угорским.

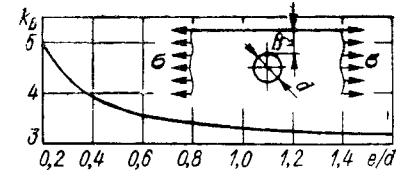


Рис. VII.15. Коэффициент концентрации напряжений в полубесконечной пластине с расположенным у края отверстием

Ниже рассмотрим расчет елочного хвостового соединения на статическую прочность. Для обеспечения его усталостной прочности приведем только некоторые рекомендации по выбору геометрических параметров, не излагая сути самого расчета на выносливость.

Основное напряженное состояние. Не касаясь пока вопроса распределения нагрузки по зубьям елочного хвостового соединения, приведем расчетные формулы для средних напряжений в основных расчетных сечениях хвоста лопатки и выступа диска. Будем считать, что контактные усилия, действующие на площадках контакта зубьев, распределены равномерно и нормально

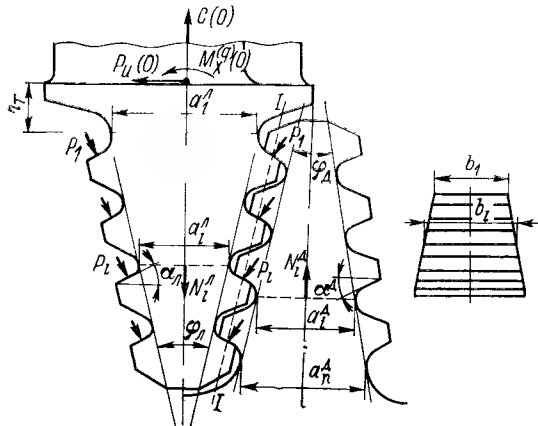


Рис VII 16 Расчетная схема елочного хвостового соединения

к этим площадкам, т. е. силы трения отсутствуют¹. Равнодействующая этих контактных усилий приложена к середине площадки и является одной из составляющих центробежной силы лопатки, распределенной по зубьям хвостового соединения.

Пусть усилия, действующие на i -ю пару зубьев, будут $2P_i$ (рис VII 16). Тогда растягивающие усилия N_i в сечениях шеек хвоста лопатки и выступа диска можно найти из условий равновесия отсеченной части лопатки и выступа диска. Так, в сечении i -й шейки имеем для хвоста лопатки

$$N_i^A = C(0) + \sum_{j=1}^i C_j^A - 2 \cos \alpha_n \sum_{j=1}^{i-1} P_j \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{VII } 49)$$

для выступа диска

$$N_i^A = \sum_{j=1}^i C_j^A + 2 \cos \alpha_n \sum_{j=1}^i P_j \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{VII } 50)$$

¹ При наличии вибрации рабочих лопаток силы трения на контактных площадках действительно будут уменьшаться.

где $C(0)$ — центробежная сила рабочей части лопатки со связями; C_j^A и C_i^A — центробежная сила участков хвоста лопатки и выступа диска между двумя соседними расчетными сечениями (при $j = 1$ $C_1^A = C_T$ — центробежная сила промтельной части); α_n (α_n^A) — угол между нормалью к площадке контакта и осью симметрии хвоста лопатки (выступа диска); i — номер расчетного сечения, $1 \leq i \leq n$; n — число пар зубьев.

Растягивающее напряжение в шейках

$$\sigma_p = N_i / (a_i b_i), \quad (\text{VII } 51)$$

где a_i — ширина шейки хвоста лопатки или выступа диска в i -м сечении; b_i — толщина хвоста в осевом направлении в i -м сечении.

Наибольшее растягивающее усилие будет иметь место в первой шейке хвоста лопатки. В выступе диска наиболее нагруженной будет последняя шейка.

Далее необходимо подсчитать напряжение изгиба в первой шейке хвоста от действия паровых усилий и от внецентренно приложенной центробежной силы профильной части лопатки со связями. Эти напряжения достаточно подсчитать только при изгибе хвоста в плоскости диска, учитывая, что в осевой плоскости его жесткость относительно велика. Суммарный изгибающий момент в плоскости диска (см. рис VII 16)

$$M_x = C(0) \frac{R_1}{R_u} Y_u + M_x^{(q)}(0) + P_u(0) h_T, \quad (\text{VII } 52)$$

где R_1 — радиус расчетного сечения в первой шейке хвоста, R_u и Y_u — радиус и координата расположения центра масс профильной части лопатки со связями, $M_x^{(q)}(0)$ и $P_u(0)$ — изгибающий момент и перерезывающая сила в корневом сечении лопатки от действия паровых усилий (см. п. III 3).

Тогда напряжение изгиба

$$\sigma_n^{(1)} = 6 M_x / (a_1^2 b_1). \quad (\text{VII } 53)$$

Как отмечалось выше, в елочном хвостовом соединении всегда будут иметь место знакопеременные вибрационные напряжения. Учитывая это, для снижения асимметрии цикла и повышения усталостной прочности хвостового соединения суммарный изгибающий момент, определяемый по формуле (VII 52), следует сводить к минимально возможной величине. Этого можно достигнуть, если при проектировании лопатки ее рабочую часть установить таким образом, чтобы суммарный момент от центробежных сил и паровых усилий был близким к нулю.

При проверке прочности зуба определяются напряжения среза по сечению, параллельному линии нагружения $I-I$. В качестве линии нагружения принимается прямая, соединяющая центры контактных площадок всех зубьев (рис VII 16). Эти напряжения (рис. VII 17, а)

$$\tau = P_i \cos \beta / (b_i h_{cp_i}), \quad (\text{VII } 54)$$

где $h_{cp\ i}$ — высота сечения i -го зуба у конца площадки контакта; β — угол между нормалью к площадке контакта и линией нагружения.

Далее подсчитываются напряжения изгиба в основании зуба по формуле

$$\sigma_{из} = 6 \frac{P_i}{b_i h_{ni}^2} \left(\frac{l}{\cos \beta} - \frac{h_{ni}}{2} \sin \beta \right), \quad (VII\ 55)$$

где h_{ni} — условная высота сечения в основании i -го зуба; l — расстояние от линии нагружения до основания зуба.

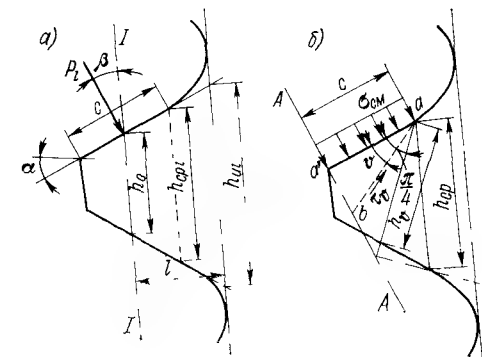


Рис. VII.17. Расчетная схема зуба

На контактных площадках зубьев определяются напряжения смятия

$$\sigma_{см} = P_i / (b_i c_i), \quad (VII\ 56)$$

где c_i — ширина площадки контакта на i -м зубе.

Рассмотрим подробнее напряженное состояние зуба вблизи площадки контакта. В п. VII.1 при расчете Т-образного хвостового соединения было показано, что наиболее опасное для прочности материала состояние возникает не у поверхности контакта, а в точке на некоторой глубине под ней. Это соответствует результатам решений ряда контактных задач при конечных размерах площадки контакта независимо от ее формы [142]. Чтобы приближенно учесть указанную особенность напряженного состояния зуба в зоне контакта, как и при расчете Т-образного хвоста, будем искать сечение, наклоненное к площадке контакта, в котором средние касательные напряжения, обусловленные действием контактных усилий, будут иметь наибольшее значение. Для упрощения ограничим рассматриваемую область зуба прямой AA' , перпендикулярной площадке контакта и проходящей через угловую точку зуба (рис. VII.17, б). Касательные напряжения в сечении, расположенном под углом ϑ к площадке контакта, можно найти из условий равновесия углового элемента.

$$\tau_{\vartheta} = \sigma_{см} \sin \vartheta \cos \vartheta = 0,5 \sigma_{см} \sin 2\vartheta.$$

Нетрудно видеть, что максимальные значения касательные напряжения принимают в сечении при $\vartheta = \pi/4$

$$\tau_{\vartheta}^{max} = 0,5 \sigma_{см},$$

при этом длина сечения ab будет равна $\sqrt{2}c$.

Возвращаясь к действительной форме зуба, приближенно будем считать, что положение «опасного» сечения сохраняется. Тогда из

условий равновесия отсеченной части зуба находим касательные напряжения в этом сечении

$$\tau_{\vartheta} = \sigma_{см} / (\sqrt{2} h_{\vartheta}), \quad (VII\ 57)$$

где h_{ϑ} — длина расчетного сечения, расположенного под углом 45° к площадке контакта.

Из полученной формулы следует, что если разрушение зуба оценивать по критерию максимальных касательных напряжений и в качестве допускаемого принять определенное значение касательного напряжения $[\tau]$, то это, в свою очередь, накладывает ограничение и на максимально допустимое значение контактных усилий. Из формулы (VII.57) получаем

$$[\sigma_{см}] \leq \sqrt{2} h_{\vartheta} [\tau] c. \quad (VII\ 58)$$

Допустимые значения напряжений смятия будут зависеть от формы зуба. Действительно, увеличивая длину сечения h_{ϑ} , можно повысить допустимые значения напряжений смятия, не нарушая условия прочности на срез в наклонном сечении. Учитывая это, при проектировании хвостового соединения длину сечения h_{ϑ} следует выбирать, по крайней мере, не менее $\sqrt{2}c$, при которой

$$[\sigma_{см}] = 2[\tau].$$

При этом условии, а также с учетом обеспечения прочности зуба в сечении с высотой h_{cp} [см. формулу (VII.54)] можно наметить предельно допустимую форму зуба, показанную на рис. VII.17, б штрихпунктирной линией.

Распределение нагрузки по зубьям хвостового соединения. Напряженное состояние хвоста лопатки и выступа диска зависит от характера распределения нагрузки по зубьям хвостового соединения. Закономерность этого распределения определяется наличием начальных зазоров между опорными поверхностями зубьев, величина которых задается полем допусков. Существенное влияние будут оказывать температурная разность хвоста лопатки и обода диска, различие в коэффициентах линейного расширения их материалов, а также разная податливость звеньев хвостового соединения и т. д. Все это в худшем случае может привести к перегрузке какой-либо одной пары зубьев и к полной разгрузке или частичной недогрузке остальных. Однако, если учесть, что рабочие лопатки и диски турбомашин, как правило, изготавливаются из материалов с высокой пластичностью или работают в условиях ползучести, то перегрузка того или иного звена хвостового соединения приведет к появлению пластических деформаций или к ускоренной ползучести с последующим перераспределением реактивных усилий, характерным для статически неопределимых конструкций.

Пластическое деформирование или ползучесть будут иметь место в каком-либо из трех расчетных сечений: в шейках под

действием растягивающих напряжений, по контактным площадям от действия напряжений смятия или в сечениях среза зубьев. Если назначенные запасы прочности одинаковы для всех расчетных сечений, то пластическое деформирование или ускоренная ползучесть может возникать одновременно в трех сечениях. Ограниченная пластическая деформация будет приводить к выравниванию нагрузок по зубьям, не нарушая работоспособности хвостового соединения в целом. Выбирая соответствующим образом запасы прочности в трех указанных сечениях, можно заранее предопределить место возможной пластической деформации. Обычно развитие пластических деформаций при перераспределении нагрузок по зубьям допускают на контактных площадках. Как правило, напряжения смятия допускаются близкими к пределу текучести материала. При этом геометрические параметры хвостового соединения должны обеспечивать выполнение условия (VII.58).

Таким образом, будем далее принимать, что распределение центробежной нагрузки по зубьям хвостового соединения устанавливается таким, при котором напряжения смятия по контактным площадкам на всех зубьях будут равны. Тогда имеем:

$$P_1/F_1 = P_2/F_2 = \dots = P_i/F_i = \dots = P_n/F_n,$$

где F_i — площадь контакта на i -м зубе.

Совместно с условием равновесия сил, действующих на лопатку,

$$2 \cos \alpha_n \sum_{j=1}^n P_j = C \quad (\text{VII.59})$$

находим

$$P_i = \frac{C}{2 \cos \alpha_n} \frac{F_i}{\sum_{j=1}^n F_j}, \quad (\text{VII.60})$$

где C — центробежная сила лопатки с хвостом.

При равной длине площадок контакта на всех зубьях получим

$$P_i = \frac{C}{2 \cos \alpha_n} \frac{b_i}{\sum_{j=1}^n b_j}, \quad (\text{VII.61})$$

а для хвостового соединения постоянной ширины будем иметь равномерное распределение нагрузки по всем зубьям

$$P_i = C/(2n \cos \alpha_n). \quad (\text{VII.61a})$$

Следует заметить, что для хвостового соединения постоянной ширины при нулевых зазорах, одинаковой температуре хвоста и выступа и равных значениях коэффициентов линейного расширения неравномерность распределения нагрузки по зубьям действительно невелика и не превышает 10% от среднего значения [112].

При принятом условии распределения нагрузки по зубьям расчет елочного хвостового соединения носит, конечно, оценочный

характер. Он дает возможность проверить несущую способность хвостового соединения, но не дает представления о напряженном состоянии в начальной стадии деформирования или в первой стадии ползучести. Он не дает также возможности учесть поле допусков и подобрать наиболее благоприятное распределение начальных зазоров между контактными поверхностями зубьев. В связи с этим рассмотрим приближенный метод расчета елочного хвостового соединения, который позволяет найти распределение усилий по зубьям с учетом всех вышеуказанных факторов [65].

Для хвостового соединения с n парами зубьев рассматриваемая задача является n раз статически неопределимой. Для ее решения имеется одно уравнение равновесия сил (VII.59), действующих на лопатку, и должно быть составлено $n - 1$ условие совместности деформаций хвоста лопатки и выступа диска. Как и выше, будем предполагать, что усилие, действующее на зуб, является равнодействующей контактного давления и приложено в центре площадки контакта нормально к ней. Пусть линия зацепления $I-I$ (рис. VII.18) составляет с осью симметрии хвоста лопатки угол $\varphi_d/2$, а с осью выступа диска — угол $\varphi_d/2$. Равенство расстояний по линии зацепления между центрами контактных площадок хвоста лопатки и выступа диска в деформированном состоянии и будет являться условием совместности их деформаций. Условие совместности, таким образом, является условием сохранения контакта между зубьями при упругом деформировании хвостового соединения.

Пусть $s_{i,i+1}^n$ и $s_{i,i+1}^d$ — шаг зубьев хвоста и выступа в недеформированном состоянии (рис. VII.18); $\Delta_{i,i+1}^n$ и $\Delta_{i,i+1}^d$ — увеличение шага хвоста и выступа при растяжении; Δ_i^n , Δ_{i+1}^n и Δ_i^d , Δ_{i+1}^d — проекции прогибов зубьев хвоста и выступа на направление линии зацепления $I-I$; $\alpha_i^n T_n s_{i,i+1}^n$ и $\alpha_i^d T_d s_{i,i+1}^d$ — температурные удлинения. Тогда условие совместности деформаций может быть записано в виде

$$s_{i,i+1}^n + \Delta_{i,i+1}^n - \Delta_i^n + \Delta_{i+1}^n + \alpha_i^n T_n s_{i,i+1}^n = s_{i,i+1}^d + \Delta_{i,i+1}^d + \Delta_i^d - \Delta_{i+1}^d + \alpha_i^d T_d s_{i,i+1}^d.$$

Запишем полученное условие так:

$$(\Delta_{i,i+1}^n - \Delta_{i,i+1}^d) - (\Delta_i^n + \Delta_i^d) + (\Delta_{i+1}^n + \Delta_{i+1}^d) + \delta_{i,i+1} = 0, \quad (\text{VII.62})$$

где

$$\delta_{i,i+1} = \delta_0 + (\alpha_i^n T_n - \alpha_i^d T_d) s_{i,i+1};$$

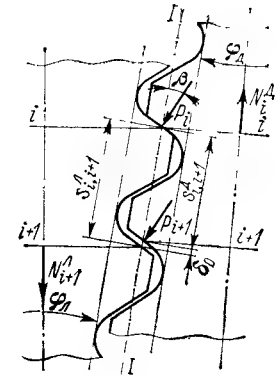


Рис. VII.18. К составлению уравнения совместности деформаций елочного хвостового соединения

δ_0 — начальный технологический зазор между контактными поверхностями зубьев, $\delta_0 = s_{i, i+1}^n - s_{i, i+1}^n$.

Здесь при вычислении температурных удлинений принято, что

$$S_{i, i+1}^{\Pi} = S_{i, i-1}^{\Pi} = S_{i, i+1}.$$

Введя коэффициенты податливости шеек на растяжение $q_{i, i+1}^n$, $q_{i, i+1}^d$ и зубьев на изгиб $p_{i, i+1}^n$, $p_{i, i+1}^d$, можем записать:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{i, i+1}^{\Pi} &= q_{i, i+1}^{\Pi} N_{i+1}^{\Pi}; & \Delta_{i, i+1}^{\Delta} &= q_{i, i+1}^{\Delta} N_i^{\Delta}; \\ \Delta_i^{\Pi} &= p_i^{\Pi} P_i; & \Delta_i^{\Delta} &= p_i^{\Delta} P_i \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.63})$$

При этом предполагается, что на прогиб i -го зуба не оказывают влияния усилия, приложенные ко всем остальным зубьям.

Подставляя (VII.63) в уравнение (VII.62) и используя (VII.49) и (VII.50), найдем:

$$P_{i+1} = A_{i, i+1} \sum_{j=1}^i P_j + B_{i, i+1} P_i + D_{i, i+1} \delta_{i, i+1} + Q_{i, i+1}^T \left[C(0) + \sum_{j=1}^{i+1} C_j^T \right] + \\ + Q_{i, i+1}^A \sum_{j=1}^i C_j^A \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, (n-1), \quad (\text{VII.64})$$

где

$$A_{i, i+1} = 2 \frac{q_{i, i+1}^{\pi} \cos \alpha_{\pi} + q_{i, i+1}^{\Delta} \cos \alpha_{\Delta}}{p_{i+1}^{\pi} + p_{i+1}^{\Delta}};$$

$$B_{i,i+1} = \frac{p_i^\pi + p_i^\Delta}{p_{i+1}^\pi + p_{i+1}^\Delta}; \quad D_{i,i+1} = -\frac{1}{p_{i+1}^\pi + p_{i+1}^\Delta};$$

$$Q_{i, i+1}^{\Pi} = -\frac{q_{i, i+1}^{\Pi}}{p_{i+1}^{\Pi} + p_{i+1}^{\Delta}}; \quad Q_{i, i+1}^{\Delta} = \frac{q_{i, i+1}^{\Delta}}{p_{i+1}^{\Pi} + p_{i+1}^{\Delta}}.$$

Присоединив к полученным $n - 1$ уравнениям совместности деформаций еще одно уравнение (VII.59) равновесия сил, действующих на лопатку, приходим к системе n алгебраических уравнений относительно неизвестных усилий P_i , распределенных по зубьям хвостового соединения.

Алгебраическую систему уравнений (VII.64) совместно с уравнением (VII.59) можно записать в канонической форме, удобной для ее решения по стандартным алгоритмам:

$$\left. \begin{aligned} b_{11}P_1 + b_{12}P_2 &= Q_1; \\ b_{21}P_1 + b_{22}P_2 + b_{23}P_3 &= Q_2; \\ . &. \\ b_{n-1,1}P_1 + b_{n-1,2}P_2 + \dots + b_{n-1,n-1}P_{n-1} + b_{n-1,n}P_n &= Q_{n-1}; \\ b_{n1}P_1 + b_{n2}P_2 + \dots + b_{nn}P_n &= Q_n, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.65})$$

где коэффициенты уравнений и правые части вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= p_1^n + p_1^n + 2q_{12}^n \cos \alpha_n + 2q_{12}^n \cos \alpha_n; \\
 b_{12} &= -(p_2^n + p_2^n); \\
 b_{21} &= 2q_{23}^n \cos \alpha_n + 2q_{23}^n \cos \alpha_n; \\
 b_{22} &= p_2^n + p_2^n + 2q_{23}^n \cos \alpha_n + 2q_{23}^n \cos \alpha_n; \\
 b_{23} &= -(p_3^n + p_3^n); \\
 &\dots \dots \dots \\
 b_{n-1, 1} &= b_{n-1, 2} = b_{n-1, 3} = \dots = b_{n-1, n-2} = \\
 &= 2q_{n-1, n}^n \cos \alpha_n + 2q_{n-1, n}^n \cos \alpha_n; \\
 b_{n-1, n-1} &= p_{n-1}^n + p_{n-1}^n + 2q_{n-1, n}^n \cos \alpha_n + 2q_{n-1, n}^n \cos \alpha_n; \\
 b_{n-1, n} &= -(p_n^n + p_n^n); \\
 b_{n1} &= b_{n2} = \dots = b_{nn} = 2 \cos \alpha_n; \\
 Q_1 &= q_{12}^n \left[C(0) + \sum_{j=1}^2 C_j^n \right] - q_{12}^n C_1^n + \delta_{12}; \\
 Q_2 &= q_{23}^n \left[C(0) + \sum_{j=1}^3 C_j^n \right] - q_{23}^n \sum_{j=1}^2 C_j^n + \delta_{23}; \\
 &\dots \dots \dots \\
 Q_{n-1} &= q_{n-1, n}^n \left[C(0) + \sum_{j=1}^n C_j^n \right] - q_{n-1, n}^n \sum_{j=1}^{n-1} C_j^n + \delta_{n-1, n}; \\
 Q_n &= C.
 \end{aligned}
 \tag{VII.65a}$$

При анализе решения данной алгебраической системы нужно иметь в виду, что физический смысл имеют только положительные значения усилий P_i . Если при какой-либо комбинации зазоров одно или несколько усилий окажутся отрицательными или равными нулю, то это значит, что соответствующая пара зубьев не вступила в зацепление и зуб выключился из работы. В этом случае следует пересмотреть принятое поле допусков для данного хвостового соединения.

Важным моментом при вычислении распределения нагрузки по зубьям хвостового соединения является определение коэффициентов податливости $q_{i,i+1}^I, \dots, p_{i+1}^I$.

Приведем здесь приближенные формулы, полученные Н. З. Сун-
поницким [65, 165].

При определении коэффициентов податливости шеек принимается, что наличие зубьев не увеличивает жесткость хвостовика или выступа диска на растяжение. Определение коэффициентов податливости сводится тогда к рассмотрению растяжения стержня линейно-переменной ширины. Максимальная ширина стержня

соответствует ширине первой шейки хвоста или n -й шейке выступа диска, а минимальная, наоборот, n -й шейке хвоста или первой выступа диска. Угол клина такого стержня будет составлять φ_n для хвоста и φ_d для выступа.

Значение коэффициента податливости на участке между i -м и $(i + 1)$ -м сечениями определится в этом случае формулой

$$q_{i, i+1} = \frac{1}{E \cos(\varphi/2)} \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{d\rho}{F(\rho)},$$

где ρ — расстояние от вершины клина до рассматриваемого сечения.

Площадь сечения стержня

$$F(\rho) = 2b(\rho) \rho \operatorname{tg}(\varphi/2).$$

Приняв на участке между i -м и $(i + 1)$ -м сечениями $b(\rho) = b_{i, i+1}^{\text{ср}} = \text{const}$, окончательно будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} q_{i, i+1}^n &= \frac{1}{2b_{i, i+1}^{\text{ср}} E_n \sin(\varphi_n/2)} \ln \frac{\alpha_i^n}{\alpha_{i+1}^n}; \\ q_{i, i+1}^d &= \frac{1}{2b_{i, i+1}^{\text{ср}} E_d \sin(\varphi_d/2)} \ln \frac{\alpha_{i+1}^d}{\alpha_i^d}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.66})$$

Коэффициенты податливости зубьев на изгиб находятся из рассмотрения изгиба короткой клиновидной балки силой, нормальной к одной из ее сторон, приложенной в некотором сечении. При этом не учитывается упругость заделки зуба в тело хвоста или выступа диска. Окончательно получено¹

$$\rho_i = \frac{\cos \beta}{b_i E \operatorname{tg}^3 \alpha} \left[\kappa \ln \left(\frac{h_{ni}}{h_0} \right) + \lambda \left(\frac{h_0}{h_{ni}} - 1 \right) (2 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \psi \left(\frac{h_0^2}{h_{ni}^2} - 1 \right) (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) \right], \quad (\text{VII.67})$$

где

$$\kappa = 1,5 + 1,8 \operatorname{tg}^2 \alpha + 0,643 \operatorname{tg}^4 \alpha;$$

$$\lambda = 1,5 + 1,2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 0,385 \operatorname{tg}^4 \alpha;$$

$$\psi = 1,5 + 1,8 \left(1 + \frac{2}{3} \nu \right) \operatorname{tg}^2 \alpha + 0,471 \operatorname{tg}^4 \alpha;$$

ν — коэффициент Пуассона. Геометрические параметры α , β , h_{ni} и h_0 указаны на рис. VII.17, а.

Заметим, что неучет упругости заделки зуба в тело хвоста при определении его коэффициента податливости на изгиб будет в не-

которой степени скомпенсирован неучетом влияния зубьев на коэффициенты податливости шеек при растяжении.

Приведенное здесь решение позволяет найти распределение нагрузки по зубьям при упругом деформировании хвостового соединения. Оно остается справедливым и в случае локальных пластических деформаций, имеющих место вблизи контактирующих поверхностей и в местах резкой концентрации напряжений. При развитых пластических деформациях, что связано со значительной перегрузкой отдельных зубьев, необходимо решать эту задачу с учетом упругопластических деформаций. Задача о распределении нагрузок по зубьям елочного хвостового соединения при упругопластическом деформировании и ползучести рассматривалась в работах [60; 165; 166].

Расчеты хвостовых соединений при упругом деформировании показывают, что характер распределения нагрузок в основном определяется начальными зазорами между контактирующими поверхностями зубьев, а также температурными расширениями. Так, если соотношение шагов зубьев в хвосте лопатки и в выступе диска таково, что $s^n > s^d$, т. е. $\delta_0 = s^n - s^d > 0$, то более нагруженной оказывается первая пара зубьев. То же самое будет и при $\alpha_i^n > \alpha_i^d$, если $T_n = T_d$. Если $s^n < s^d$, т. е. $\delta_0 = s^n - s^d < 0$ или $\alpha_i^n < \alpha_i^d$ при $T_n = T_d$, то наиболее нагруженной оказывается последняя пара зубьев.

Поскольку в первой шейке хвоста всегда будут иметь место максимальные растягивающие усилия и изгибающий момент, в том числе и знакопеременный, а также наибольшая концентрация напряжений, связанная с влиянием профильной части лопатки, то с целью повышения усталостной прочности хвостового соединения следует, по возможности, разгружать первую пару зубьев. Этого можно достигнуть, предусмотрев, например, чтобы $s_{12}^n < s_{12}^d$, т. е. $\delta_0 < 0$, или коэффициент линейного расширения α_n был меньше коэффициента α_d . Для повышения усталостной прочности рекомендуется [112] распределять нагрузку, действующую на хвостовое соединение, так, чтобы усилие, воспринимаемое первой парой зубьев, при упругом деформировании составляло примерно 40% от среднего. С целью более благоприятного распределения усилий угол клина хвоста лопатки целесообразно принимать $\varphi_n = 25 \div 35^\circ$ (при этом угол клина выступа диска $\varphi_d = \varphi_n - 2\pi/z_1$).

Концентрация напряжений. Существенное влияние на работоспособность елочного хвостового соединения оказывает концентрация напряжений, имеющая место на поверхности впадин хвоста лопатки и выступа диска. Наиболее полные исследования концентрации напряжений как при растяжении, так и при изгибе елочного хвостового соединения были проведены А. С. Лейкиным [112]. Концентрация напряжений при растяжении хвостового соединения рассмотрена также в работе [60].

¹ В окончательном варианте этих формул выполнены алгебраические преобразования выражений, приведенных в [65].

Концентрация напряжений при изгибе хвостового соединения определяет в основном его усталостную прочность при действии знакопеременного изгибающего момента. Напряжения от действия статического изгибающего момента при проектировании рабочей лопадки сводятся, как правило, к минимально возможным значениям и мало влияют на работоспособность хвостового соединения. В таком случае для обеспечения статической прочности наибольший интерес представляют максимальные напряжения, возникающие при растяжении хвостового соединения центробежными силами. Уровень максимальных напряжений на поверхности той или иной впадины будет складываться из эффекта растяжения шейки хвоста (выступа) и эффекта изгиба зуба реактивным усилием. Суммарное максимальное напряжение будет иметь место в некоторой точке, положение которой зависит от относительного распределения напряжений по поверхности впадины. При вычислениях относительное распределение напряжений учитывается введением специальных коэффициентов.

Большое влияние на величину максимальных напряжений оказывает так называемая общая неравномерность распределения напряжений, вызванная влиянием профиля лопадки. Эта общая неравномерность будет оказывать наиболее сильное влияние на напряженное состояние в первой шейке хвоста лопадки.

Учитывая сказанное, максимальные напряжения в пределах упругих деформаций можно выразить формулой из [112]

$$\sigma_{\max} = \sigma_p k_p \eta_p (k_{\phi})_{\max} + \sigma_n k_3 \eta_3 (k_{\phi})_{\max}^3, \quad (\text{VII.68})$$

где σ_p и σ_n — номинальные напряжения растяжения в шейке и изгиба в расчетном сечении основания зуба, определяемые по формулам (VII.51) и (VII.53); k_p и k_3 — коэффициенты местной концентрации напряжений при растяжении шейки хвоста (выступа) и изгибе зуба; η_p и η_3 — коэффициент относительного распределения напряжений; $(k_{\phi})_{\max}$ и $(k_{\phi})_{\max}^3$ — наибольшие коэффициенты общей неравномерности распределения напряжений.

Приняв в качестве номинальных растягивающие напряжения в шейке хвоста (выступа диска), можно записать

$$\sigma_{\max} = k \sigma_p, \quad (\text{VII.69})$$

где k — коэффициент концентрации напряжений в шейке хвоста (выступа) при растяжении хвостового соединения,

$$k = k_p \eta_p (k_{\phi})_{\max} + \frac{\sigma_n}{\sigma_p} k_3 \eta_3 (k_{\phi})_{\max}^3.$$

Для вычисления введенных здесь коэффициентов местной концентрации напряжений, относительного распределения и общей неравномерности А. С. Лейкин путем анализа и обработки экспериментальных данных получил приближенные расчетные формулы. Экспериментальные исследования проводились на плоских укрупненных моделях методом тензометрирования.

Для коэффициентов местной концентрации напряжений предложены следующие зависимости из [112]:

$$k_p = 1 + \frac{1,7 (V r_i(h\gamma) - r/a)}{r/(h\gamma) + 2,4r/a}; \quad (\text{VII.70})$$

$$k_3 = 1 + \left(\frac{0,15}{r/h_n} + \frac{2,2}{8l/h_n - 1} \right) \left[1 + \left(\frac{1}{l/h_n} - 2 \right) \frac{\beta^\circ}{35^\circ} \right]. \quad (\text{VII.71})$$

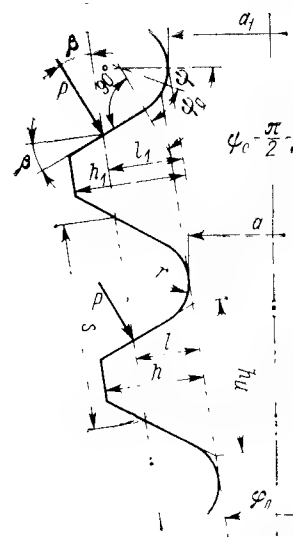


Рис. VII.19. Геометрические параметры слочного хвоста

Все обозначения в этих формулах ясны из рис. VII.19. Коэффициент γ , учитывающий наличие смежных впадин, для первой шейки хвоста лопадки принимается равным $\gamma \approx 0,55 \div 0,60$, а для всех остальных определяется по рис. VII.20. Заметим, что для последней шейки вы-

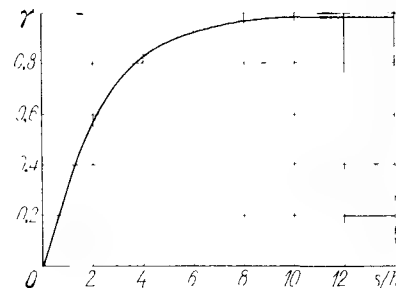


Рис. VII.20. Коэффициент разгрузки, обусловленный наличием смежных впадин

ступа диска при отсутствии дополнительных разгружающих выточек коэффициент k_p , вычисленный при $\gamma = 1,0$, будет примерно на 15% меньше экспериментального.

При относительно большой высоте основания зуба $h_n/l/h_n \ll 1$ коэффициент концентрации k_3 может оказаться отрицательным. В этом случае изгиб зуба практически не оказывает влияния на уровень максимальных напряжений в шейке и при расчете следует положить $k_3 = 0$.

Коэффициенты относительного распределения напряжений могут быть определены по формулам из [112]:

$$\eta_p = 1 - \lambda_n \cos^2 [1,1 (\psi + \beta)]; \quad (\text{VII.72})$$

$$\eta_3 = 1 - \lambda_3 \sin^2 (\psi + \lambda_{13}), \quad (\text{VII.73})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \lambda_p &= 1,1 \sqrt{\frac{r_i h + 2r/a}{V r/h - r/a}}; \quad \lambda_3 = 0,7 [1 + 0,5(\beta + r/h_n)]; \\ \lambda_{13} &= 0,4\beta - \frac{0,5\pi}{1 + 3(r/h_n + l/h_n)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.74})$$

Угол ψ (в радианах) отсчитывается от линии сопряжения поверхности впадины с рабочей гранью зуба (см рис VII 19). Если глубина первой впадины хвоста больше, чем остальные, т. е. $h_1 > h$, то при вычислении коэффициентов концентрации и коэффициентов распределения напряжений в формулах (VII 70) — (VII 74) следует заменять h на h_1 , а плечо изгиба l на l_1 .

Влияние профильной части лопатки в основном отражается на напряжениях, обусловленных растяжением стержня хвоста лопатки (максимальные напряжения могут возрасть в 1,5–2,0 раза), и сравнительно в малой степени сказывается на напряжениях, вызванных изгибом зуба. Для вычисления коэффициентов общей неравномерности при растяжении шейки хвоста лопатки в [112] предложены следующие формулы с выпуклой стороны профиля

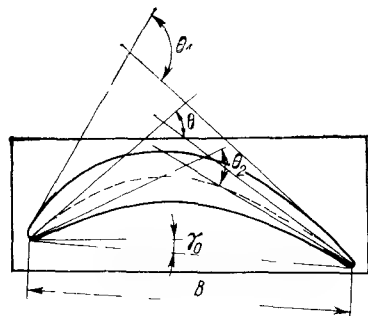


Рис VII 21 К вычислению коэффициентов общей неравномерности напряжений

$$(k_{\phi})_{\max 1} = \cos \frac{\varphi_1}{2} +$$

$$+ \left[\frac{\theta_1^0}{270^\circ} \left(1 + 0,5 \frac{\theta^0}{\theta_1^0} \right) \right]^{1/2} \frac{f_0}{1 + 2l_0(1 + 7l_0f_0)}, \quad (\text{VII } 75)$$

с вогнутой стороны профиля

$$(k_{\phi})_{\max 2} = \cos \frac{\varphi_2}{2} + \left[\frac{\theta_2^0}{65^\circ} \left(1 + 0,5 \frac{\theta^0}{\theta_2^0} \right) \right]^{3/4} \times$$

$$\times \frac{f_0}{1 + 26l_0(1 + 2l_0f_0)} \left(1 + \frac{\gamma_0^0}{20^\circ} \right), \quad (\text{VII } 76)$$

где $l_0 = L/B$ — параметр отдаленности; L — расстояние от расчетного сечения хвоста до корневое сечения профильной части лопатки ($L = h_r$, рис. VII 16); B — хорда профиля в корневом сечении, $f_0 = F/F(0)$ — отношение площадей расчетного сечения хвоста и корневое сечения лопатки

Углы $\theta = 0,5 (\theta_1 + \theta_2)$ и θ_1, θ_2 , а также γ_0 показаны на рис. VII 21

При вычислении коэффициента общей неравномерности из двух значений $(k_{\phi})_{\max 1}$ и $(k_{\phi})_{\max 2}$ принимается наибольшее. Коэффициент общей неравномерности при изгибе зуба можно приближенно оценить по формуле

$$(k_{\phi})_{\max 1,2}^3 = 1 + 0,15 [(k_{\phi})_{\max 1,2} - \cos(\varphi/2)] \quad (\text{VII } 77)$$

При определении концентрации напряжений во впадинах выступа диска в качестве коэффициентов общей неравномерности следует принимать:

$$(k_{\phi})_{\max} = \cos \varphi_d/2, \quad (k_{\phi})_{\max}^3 = 1 \quad (\text{VII } 78)$$

Экспериментальные исследования, а также расчеты по вышеприведенным формулам показывают, что концентрация напряжений в елочном хвостовом соединении может быть существенно снижена путем увеличения радиуса кривизны впадин и выполнением угла скоса рабочей поверхности зуба. Рекомендуется [112] отношение радиуса кривизны первой впадины хвоста к высоте зуба выбирать в пределах $0,5 \leq r/h \leq 0,6$, а отношение высоты зуба к шагу — в диапазоне $0,3 \leq h/s \leq 0,5$. Угол скоса рабочей поверхности зуба, как правило, выбирается в пределах $\beta = 20 \div 30^\circ$.

Для снижения общей неравномерности распределения напряжений следует, по возможности, отдалять профильную часть лопатки от наиболее напряженного сечения хвоста, т. е. увеличивать параметр отдаленности l_0 . Снижение общей неравномерности достигается также увеличением толщины промтельной части в разумных пределах для конкретной конструкции лопатки, а также уменьшением угла γ_0 (по возможности следует обеспечивать параллельность хорды корневого сечения и плоскости симметрии хвоста). Необходимо отметить, что для высоконагруженных хвостовых соединений лопаток последних ступеней не всегда удается выполнить указанные геометрические соотношения. В этом случае геометрические параметры, обеспечивающие статическую и усталостную прочность хвостового соединения, следует определять путем проведения специальных исследований

Глава VIII

РАСЧЕТ ДИСКОВ НА ПРОЧНОСТЬ

VIII.1. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТОНКИХ ДИСКОВ

Рассмотрим вращающийся, неравномерно нагретый по радиусу диск, симметричный относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к оси вала. Эту плоскость называют средней плоскостью диска. При выводе уравнений будем считать, что поперечные размеры диска малы по сравнению с его диаметром, а угол наклона боковых поверхностей профиля к средней плоскости незначителен. Нормальными и касательными напряжениями в плоскостях, перпендикулярных к оси вала, и касательными напряжениями в цилиндрических сечениях, перпендикулярных

к средней плоскости, можно пренебречь ввиду их малости. Напряженное состояние диска считаем двухмерным и осесимметричным. Напряжения равномерно распределены по его толщине.

Частоту вращения или угловую скорость, при которых вычисляются напряжения в диске, будем называть расчетной частотой вращения n (об/мин) или расчетной угловой скоростью ω (1/с).

Температурное поле задается функцией $T = T(r)$, изменяющейся вдоль радиуса диска по произвольному закону и не зависящей от угла φ .

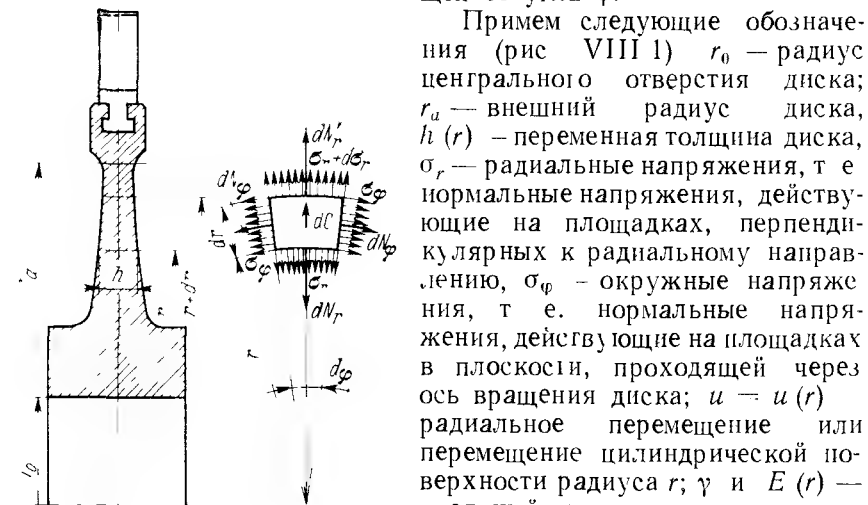


Рис VIII 1. Элемент диска с действующими на него усилиями

Вырежем из диска элемент двумя меридиональными плоскостями под углом $d\varphi$ и двумя цилиндрическими сечениями с радиусами r и $r + dr$. Силы, действующие на выделенный элемент, показаны на рис. VIII 1. Центробежная сила выделенного элемента диска

$$dC = \frac{\gamma \omega^2}{g} h r^2 d\varphi$$

Усилия, создаваемые радиальными напряжениями:

$$dN_r = h r \sigma_r d\varphi; \quad dN'_r = h r \sigma_r d\varphi + d(h r \sigma_r) d\varphi$$

Усилие, создаваемое окружными напряжениями,

$$dN_\varphi = h \sigma_\varphi dr$$

Спроектировав действующие на элемент силы на радиальное направление и полагая $\sin(d\varphi/2) = d\varphi/2$ ввиду малости угла $d\varphi$, получим

$$\frac{1}{h} \frac{d(h r \sigma_r)}{dr} - \sigma_\varphi + \frac{\gamma \omega^2}{g} r^2 = 0. \quad (\text{VIII.1})$$

Для определения σ_r и σ_φ необходимо иметь второе уравнение, связывающее эти напряжения. Это уравнение получим из рассмотрения деформации диска. Зависимость между напряжениями и относительными деформациями определяется законом Гука

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= (\sigma_r - \nu \sigma_\varphi)/E + \alpha T; \\ \epsilon_\varphi &= (\sigma_\varphi - \nu \sigma_r)/E + \alpha T, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.2})$$

где ϵ_r и ϵ_φ — относительные деформации в радиальном и окружном направлениях, $\alpha = \alpha(r)$ — коэффициент линейного расширения материала. Модуль упругости зависит от температуры и поэтому является функцией радиуса $E = E(r)$.

Как известно из [172], относительные деформации связаны с радиальным перемещением u следующими равенствами

$$\epsilon_r = du/dr \quad \text{и} \quad \epsilon_\varphi = u/r$$

Заменив в (VIII.2) ϵ_r и ϵ_φ их выражениями, получим

$$\frac{du}{dr} = \frac{(\sigma_r - \nu \sigma_\varphi)}{E} + \alpha T, \quad \frac{u}{r} = \frac{(\sigma_\varphi - \nu \sigma_r)}{E} + \alpha T \quad (\text{VIII.3})$$

Исключив из уравнений (VIII.3) перемещение u , находим

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r}{E} (\sigma_\varphi - \nu \sigma_r) + r \alpha T \right] - \frac{\sigma_r - \nu \sigma_\varphi}{E} - \alpha T = 0. \quad (\text{VIII.1a})$$

Уравнение (VIII.1) совместно с уравнением (VIII.1a) полностью определяют радиальные и окружные напряжения σ_r и σ_φ при заданных граничных условиях. Решение полученной системы уравнений (VIII.1) и (VIII.1a) эквивалентно решению дифференциального уравнения второго порядка относительно перемещения u . Из (VIII.3) выразим σ_r и σ_φ через u и du/dr :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) - \frac{E \alpha T}{1-\nu}; \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) - \frac{E \alpha T}{1-\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.4})$$

Заменив в (VIII.1) σ_r и σ_φ их выражениями (VIII.4), получим уравнение, определяющее радиальное перемещение u ,

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 u}{dr^2} + \left[\frac{1}{E h} \frac{d(E h)}{dr} + \frac{1}{r} \right] \frac{du}{dr} + \left[\frac{\nu}{r} \frac{1}{E h} \frac{d(E h)}{dr} - \frac{1}{r^2} \right] u = \\ &= - \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{1-\nu^2}{E} r + (1+\nu) \alpha T \left[\frac{1}{h} \frac{dh}{dr} + \frac{1}{E \alpha T} \frac{d(E \alpha T)}{dr} \right]. \end{aligned} \quad (\text{VIII.5})$$

Здесь принято, что коэффициент Пуассона $\nu = \text{const}$ и не зависит от температуры¹.

¹ В [83] показано, что напряжения в диске очень мало зависят от изменения величины ν в пределах от 0,3 до 0,5 и поэтому это изменение практически можно не учитывать.

На основании теории линейных дифференциальных уравнений общее решение уравнения (VIII.5) можно представить в виде:

$$u = Au_1(r) + Bu_2(r) + \frac{\gamma\omega^2}{g}u_3(r) + \frac{d(E\alpha T)}{dr}u_4(r), \quad (\text{VIII.6})$$

где A и B — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий на внешнем и внутреннем радиусах диска; $u_1(r)$ и $u_2(r)$ — интегралы однородного уравнения; $\frac{\gamma\omega^2}{g}u_3(r)$ и $\frac{d(E\alpha T)}{dr}u_4(r)$ — частные интегралы неоднородного уравнения, соответствующие центробежной и температурной нагрузкам.

Решение дифференциального уравнения (VIII.5) или соответственной системы дифференциальных уравнений (VIII.1) и (VIII.1a) может быть получено в замкнутом виде лишь для некоторых профилей дисков. К последним относятся профиль постоянной толщины, конический профиль, некоторые экспоненциальные профили (в том числе профиль равного сопротивления), гиперболический профиль, профиль, изменяющийся по закону кубической параболы и др. Для конического профиля и ряда экспоненциальных профилей решения дифференциальных уравнений могут быть представлены в виде сходящихся рядов.

Необходимо отметить, что получение указанных замкнутых решений возможно только при наложении определенных ограничений на изменение температурного поля и на параметры упругости материала. В общем случае решения как системы дифференциальных уравнений (VIII.1) и (VIII.1a), так и уравнения (VIII.5) могут быть получены приближенными численными методами.

VIII.2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Внешний радиус. На внешнем радиусе ($r = r_a$) диск снабжен ободом, несущем рабочие лопатки (рис. VIII.2). Так как размеры обода в радиальном направлении малы по сравнению с внешним радиусом диска¹, то обод можно рассматривать как тонкое кольцо и принимать окружные напряжения в его сечении постоянными и равными окружным напряжениям в диске при $r = r_a$ (рис. VIII.2):

$$\sigma_\varphi = \sigma_{\varphi a}.$$

Вырежем элемент обода двумя меридиональными плоскостями под углом $d\varphi$ и цилиндрическим сечением радиуса $r = r_a$. Силы, действующие на выделенный элемент, показаны на рис. VIII.2. Центробежная сила выделенного элемента обода и закрепленных в нем лопаток равна:

$$dC = C d\varphi/2\pi; \quad C = C_\pi + C_{об},$$

где C_π — центробежная сила рабочих частей всех лопаток и связей; $C_{об}$ — центробежная сила всего обода с хвостами лопаток и промежуточными телами; C_π и $C_{об}$ легко подсчитать, зная геометрические размеры лопаток и обода.

Усилие, создаваемое радиальными напряжениями,

$$dN_r = h_a r_a \sigma_{r_a} d\varphi,$$

где h_a — толщина диска при $r = r_a$; σ_{r_a} — радиальные напряжения в диске при $r = r_a$.

Усилие, создаваемое окружными напряжениями,

$$N_\varphi = F_\pi \sigma_{\varphi a},$$

где F_π — площадь сечения обода (без хвоста лопатки).

Составим условие равновесия выделенного элемента обода, спроектировав все действующие на него силы на радиальное направление. Полагая $\sin(d\varphi/2) = d\varphi/2$ ввиду малости угла $d\varphi$, получим

$$C/2\pi = h_a r_a \sigma_{r_a} + F_\pi \sigma_{\varphi a},$$

откуда

$$\frac{C}{2\pi r_a h_a} = \sigma_{r_a} + \frac{F_\pi}{h_a r_a} \sigma_{\varphi a}.$$

Обозначим

$\frac{C}{2\pi r_a h_a} = \sigma'_{r_a}$ — радиальные напряжения, которые имели бы место на внешнем радиусе диска ($r = r_a$), если бы вся центробежная сила обода и лопаток передавалась на полотно диска. Так как обычно $\sigma_{\varphi a} > 0$, то из условия равновесия следует, что $\sigma_{r_a} < \sigma'_{r_a}$. Следовательно, обод, представляя собой целое кольцо, несколько разгружает диск. Окончательно найдем

$$\sigma_{r_a} = \sigma'_{r_a} - \frac{F_\pi}{h_a r_a} \sigma_{\varphi a}. \quad (\text{VIII.7})$$

Если размеры обода малы (т. е. F_π мало) по сравнению с размерами диска h_a , r_a , то второе слагаемое в равенстве (VIII.7) мало, и практически в этом случае

$$\sigma_{r_a} = \sigma'_{r_a}. \quad (\text{VIII.8})$$

Условие (VIII.8) используется при расчете дисков с торцевыми хвостовыми соединениями лопаток. Выражения (VIII.7) или (VIII.8) являются граничными условиями на внешнем радиусе диска. Для невращающегося диска, находящегося в нагруженном

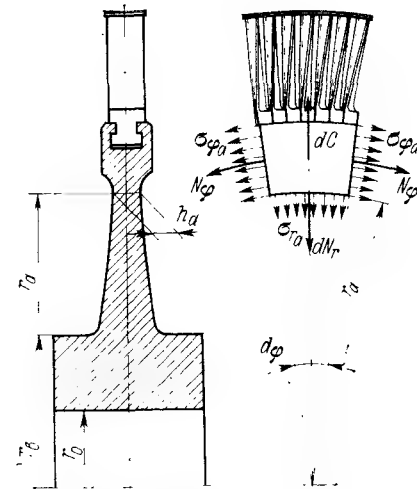


Рис. VIII.2. Элемент обода с действующими на него усилиями

¹ Для диска с массивным ободом напряжения в нем и в обode могут быть вычислены, как в диске переменного профиля (см. гл. IX).

состоянии благодаря температурному полю или действию радиальных усилий на поверхности центрального отверстия (например, от посадки с натягом на вал), $\sigma'_{ra} = 0$ и тогда граничное условие на внешнем радиусе принимает вид

$$\sigma_{ra} = -\frac{F_H}{h_a r_a} \sigma_{\varphi a}. \quad (\text{VIII.9})$$

Внутренний радиус. Для дисков со свободным центральным отверстием радиальные усилия на внутреннем радиусе равны нулю. В этом случае при $r = r_0$

$$\sigma_{r_0} = 0 \quad (\text{VIII.10})$$

Такой диск называют свободно вращающимся.

Если на поверхности центрального отверстия задано давление, например давление p , которое желательно иметь между диском и валом при расчетной частоте вращения, то граничное условие на внутреннем радиусе при $r = r_0$ имеет вид

$$\sigma_{r_0} = -p. \quad (\text{VIII.11})$$

При посадке диска на вал с натягом радиальные усилия отрицательны, так как они являются сжимающими.

В некоторых случаях диски выполняются без центрального отверстия, например диски сварных или сболченных роторов. Тогда в центре диска при $r = 0$ радиальные и окружные напряжения должны быть равны между собой:

$$\sigma_{r_0} = \sigma_{\varphi_0}. \quad (\text{VIII.12})$$

Это условие следует из равенства нулю радиального перемещения в центре диска. Разлагая радиальное перемещение в ряд по радиусу вблизи центра диска, имеем [17]

$$u = a_1 r + a_2 r^2 + \dots$$

При $r \rightarrow 0$ получим, что деформации в центре диска равны и конечны, т. е.

$$\varepsilon_{r_0} = (du/dr)_{r=0} = \varepsilon_{\varphi_0} = (u/r)_{r=0} = a_1.$$

Учитывая выражения (VIII.4), получим условие (VIII.12).

Граничные условия, связанные с посадкой диска на вал с натягом, будут рассмотрены в п. VIII.4.

VIII.3. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Запишем систему дифференциальных уравнений (VIII.1) и (VIII.1a) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(h\sigma_r)}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\varphi}}{r} h &= -\frac{\gamma\omega^2}{g} rh; \\ v \frac{d}{dr} \left(\frac{r\sigma_r}{E} \right) - \frac{d}{dr} \left(\frac{r\sigma_{\varphi}}{E} \right) + \frac{\sigma_r}{E} - v \frac{\sigma_{\varphi}}{E} &= -r \frac{d(\alpha T)}{dr}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.13})$$

1. На основании теории линейных дифференциальных уравнений общее решение системы (VIII.13) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= Af_1(r) + Bf_2(r) + \frac{\gamma\omega^2}{g} f_3(r) + \frac{d(\alpha T)}{dr} f_4(r); \\ \sigma_{\varphi} &= A\varphi_1(r) + B\varphi_2(r) + \frac{\gamma\omega^2}{g} \varphi_3(r) + \frac{d(\alpha T)}{dr} \varphi_4(r). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.14})$$

где A и B — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий на внешнем и внутреннем радиусах диска; $f_1(r)$ и $\varphi_1(r)$; $f_2(r)$ и $\varphi_2(r)$ — интегралы системы дифференциальных уравнений без свободных членов; $\frac{\gamma\omega^2}{g} f_3(r)$ и $\frac{\gamma\omega^2}{g} \varphi_3(r)$ — частные интегралы неоднородной системы уравнений, соответствующие центробежной нагрузке; $\frac{d(\alpha T)}{dr} f_4(r)$ и $\frac{d(\alpha T)}{dr} \varphi_4(r)$ — частные интегралы неоднородной системы уравнений, соответствующие температурной нагрузке.

Пусть на поверхности центрального отверстия диска задано давление, равное $-p$. В этом случае граничное условие при $r = r_0$ имеет вид (VIII.11): $\sigma_{r_0} = -p$.

На внешнем радиусе полотна диска ($r = r_a$) имеет место граничное условие (VIII.7)

$$\sigma_{ra} = \sigma'_{ra} - \frac{F_H}{h_a r_a} \sigma_{\varphi a}.$$

Подставляя в эти граничные условия выражения для напряжений (VIII.14), получим:

$$\begin{aligned} Af_1(r_0) + Bf_2(r_0) &= -p - \frac{\gamma\omega^2}{g} f_3(r_0) - f_4(r_0) \frac{d(\alpha T)}{dr} \Big|_{r=r_0}; \\ A \left[f_1(r_a) + \frac{F_H}{h_a r_a} \varphi_1(r_a) \right] + B \left[f_2(r_a) + \frac{F_H}{h_a r_a} \varphi_2(r_a) \right] &= \\ &= \sigma'_{ra} - \left[f_3(r_a) + \frac{F_H}{h_a r_a} \varphi_3(r_a) \right] \frac{\gamma\omega^2}{g} - \\ &- \left[f_4(r_a) + \frac{F_H}{h_a r_a} \varphi_4(r_a) \right] \frac{d(\alpha T)}{dr} \Big|_{r=r_a}. \end{aligned}$$

Так как σ'_{ra} пропорционально квадрату частоты вращения, то, решив уравнения относительно постоянных A и B , получим:

$$\begin{aligned} A &= A_1 p + A_2 \frac{\gamma\omega^2}{g} + A_3' \frac{d(\alpha T)}{dr} \Big|_{r=r_0} + A_3'' \frac{d(\alpha T)}{dr} \Big|_{r=r_a}; \\ B &= B_1 p + B_2 \frac{\gamma\omega^2}{g} + B_3' \frac{d(\alpha T)}{dr} \Big|_{r=r_0} + B_3'' \frac{d(\alpha T)}{dr} \Big|_{r=r_a}, \end{aligned}$$

где $A_1, B_1, \dots, B_3''$ зависят только от геометрических параметров диска и лопаток.

Подставив эти выражения в (VIII.14), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= [A_1 f_1(r) + B_1 f_2(r)] p + [A_2 f_1(r) + B_2 f_2(r) + f_3(r)] \frac{\gamma \omega^2}{g} + \\ &+ [A_3 f_1(r) + B_3 f_2(r)] \frac{d(\alpha T)}{dr} \Big|_{r=r_0} + \frac{d(\alpha T)}{dr} f_4(r) + \\ &+ [A_3 f_1(r) + B_3 f_2(r)] \frac{d(\alpha T)}{dr} \Big|_{r=r_a}; \\ \sigma_\varphi &= [A_1 \varphi_1(r) + B_1 \varphi_2(r)] p + [A_2 \varphi_1(r) + B_2 \varphi_2(r) + \varphi_3(r)] \times \\ &\times \frac{\gamma \omega^2}{g} + [A_3 \varphi_1(r) + B_3 \varphi_2(r)] \frac{d(\alpha T)}{dr} \Big|_{r=r_0} + \frac{d(\alpha T)}{dr} \varphi_4(r) + \\ &+ [A_3 \varphi_1(r) + B_3 \varphi_2(r)] \frac{d(\alpha T)}{dr} \Big|_{r=r_a}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII } 15)$$

Из (VIII.15) следует, что в невращающемся и равномерно нагретом диске напряженное состояние будет вызвано только радиальными усилиями, действующими на поверхности центрального отверстия. Для этого случая имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rp} &= [A_1 f_1(r) + B_1 f_2(r)] p; \\ \sigma_{\varphi p} &= [A_1 \varphi_1(r) + B_1 \varphi_2(r)] p \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.16})$$

Для свободно вращающегося ($p = 0$) и равномерно нагретого диска из (VIII.15) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r\omega} &= [A_2 f_1(r) + B_2 f_2(r) + f_3(r)] \frac{\gamma \omega^2}{g}; \\ \sigma_{\varphi\omega} &= [A_2 \varphi_1(r) + B_2 \varphi_2(r) + \varphi_3(r)] \frac{\gamma \omega^2}{g}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII } 17)$$

Отсюда следует, что в свободно вращающемся равномерно нагретом диске напряжения пропорциональны квадрату частоты вращения. В невращающемся диске, у которого радиальные усилия на поверхности центрального отверстия отсутствуют ($p = 0$), напряжения создаются только температурным полем и в соответствии с (VIII.15) равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rT} &= [A_3 f_1(r) + B_3 f_2(r)] \frac{d(\alpha T)}{dr} \Big|_{r=r_0} + \\ &+ [A_3 f_1(r) + B_3 f_2(r)] \frac{d(\alpha T)}{dr} \Big|_{r=r_a} + \frac{d(\alpha T)}{dr} f_4(r), \\ \sigma_{\varphi T} &= [A_3 \varphi_1(r) + B_3 \varphi_2(r)] \frac{d(\alpha T)}{dr} \Big|_{r=r_0} + \\ &+ [A_3 \varphi_1(r) + B_3 \varphi_2(r)] \frac{d(\alpha T)}{dr} \Big|_{r=r_a} + \frac{d(\alpha T)}{dr} \varphi_4(r). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.18})$$

В равномерно нагретом диске, как уже указывалось, температурные напряжения отсутствуют. Кроме того, как это следует из системы (VIII.13), напряжения в этом случае не зависят от модуля

упругости. Эти заключения не относятся к дискам, насаженным на вал с натягом, что будет рассмотрено ниже.

Таким образом, в общем случае во вращающемся неравномерно нагретом диске, на внутренней поверхности которого действуют радиальные усилия, напряжения складываются из трех частей, которые обусловлены заданным давлением p , расчетной частотой вращения n и температурным полем $T(r)$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{rp} + \sigma_{r\omega} + \sigma_{rT}; \\ \sigma_\varphi &= \sigma_{\varphi p} + \sigma_{\varphi\omega} + \sigma_{\varphi T}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII } 15a)$$

где σ_{rp} и $\sigma_{\varphi p}$ — радиальные и окружные напряжения в невращающемся и равномерно нагретом диске, вызванные действием радиальных усилий на внутренней поверхности [см. формулу (VIII.16)]; $\sigma_{r\omega}$ и $\sigma_{\varphi\omega}$ — радиальные и окружные напряжения в свободно вращающемся равномерно нагретом диске [см. формулу (VIII.17)]; σ_{rT} и $\sigma_{\varphi T}$ — радиальные и окружные температурные напряжения в невращающемся диске со свободной внутренней поверхностью [см. формулу (VIII.18)].

2. Пусть σ_r^{II} и $\sigma_\varphi^{\text{II}}$ удовлетворяют однородной системе уравнений (VIII.13):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(h\sigma_r^{\text{II}})}{dr} + \frac{\sigma_r^{\text{II}} - \sigma_\varphi^{\text{II}}}{r} h &= 0; \\ v \frac{d}{dr} \left(\frac{r\sigma_r^{\text{II}}}{E} \right) - \frac{d}{dr} \left(\frac{r\sigma_\varphi^{\text{II}}}{E} \right) + \frac{\sigma_r^{\text{II}}}{E} - v \frac{\sigma_\varphi^{\text{II}}}{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII } 19)$$

Отсюда видно, что напряжения $k\sigma_r^{\text{II}}$ и $k\sigma_\varphi^{\text{II}}$ (где k — произвольная постоянная) также удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям (VIII.13). Пусть далее σ_r^{I} и $\sigma_\varphi^{\text{I}}$ являются решением неоднородной системы дифференциальных уравнений (VIII.13)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(h\sigma_r^{\text{I}})}{dr} + \frac{\sigma_r^{\text{I}} - \sigma_\varphi^{\text{I}}}{r} h &= -\frac{\gamma \omega^2}{g} rh; \\ v \frac{d}{dr} \left(\frac{r\sigma_r^{\text{I}}}{E} \right) - \frac{d}{dr} \left(\frac{r\sigma_\varphi^{\text{I}}}{E} \right) + \frac{\sigma_r^{\text{I}}}{E} - v \frac{\sigma_\varphi^{\text{I}}}{E} &= -r \frac{d(\alpha T)}{dr}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.20})$$

Умножим первое и второе уравнения системы (VIII.19) на любое постоянное число k и сложим с уравнениями (VIII.20). В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} [h(\sigma_r^{\text{I}} + k\sigma_r^{\text{II}})] + \frac{(\sigma_r^{\text{I}} + k\sigma_r^{\text{II}}) - (\sigma_\varphi^{\text{I}} + k\sigma_\varphi^{\text{II}})}{r} h &= -\frac{\gamma \omega^2}{g} rh; \\ v \frac{d}{dr} \left[\frac{r(\sigma_r^{\text{I}} + k\sigma_r^{\text{II}})}{E} \right] - \frac{d}{dr} \left[\frac{r(\sigma_\varphi^{\text{I}} + k\sigma_\varphi^{\text{II}})}{E} \right] + \\ + \frac{(\sigma_r^{\text{I}} + k\sigma_r^{\text{II}})}{E} - v \frac{(\sigma_\varphi^{\text{I}} + k\sigma_\varphi^{\text{II}})}{E} &= -r \frac{d(\alpha T)}{dr}. \end{aligned}$$

Следовательно, напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^I + k\sigma_r^{II}; \\ \sigma_\phi &= \sigma_\phi^I + k\sigma_\phi^{II} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.21})$$

являются решением системы дифференциальных уравнений (VIII.13) и определяют напряженное состояние неравномерно нагретого вращающегося диска

VIII.4. ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ПРИ ПОСАДКЕ ДИСКА НА ВАЛ С НАТЯГОМ

Для того чтобы во время вращения ротора диски плотно сидели на валу, их насаживают с натягом, т. е. внутренний диаметр диска выполняют несколько меньшим, чем внешний диаметр вала. Посадка диска на вал производится в горячем состоянии так, что после его остывания создаются радиальные усилия между диском и валом. Последние должны иметь такую величину, чтобы

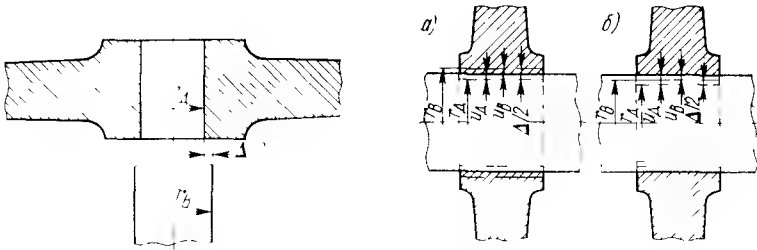


Рис VIII.3. Посадка диска на вал с натягом

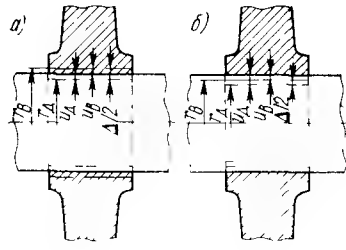


Рис. VIII.4. Положение диска и вала при вращении:
 --- диск до насадки на вал;
 --- вал до насадки диска
 — вал и диск при рабочей частоте вращения

и в рабочем состоянии, т. е. при вращении с рабочей частотой вращения и при возможном неравномерном нагреве имело бы место давление между диском и валом, достаточное для сохранения их взаимного положения.

Обозначим внутренний радиус диска в недеформированном состоянии через r_d , а внешний радиус вала в том же состоянии через r_b (рис. VIII.3). Натяг, с которым диск насаживается на вал,

$$\Delta = 2(r_b - r_d).$$

Пусть u_d и u_b — радиальные перемещения диска и вала (в месте их соприкосновения) при вращении ротора с частотой вращения n и с учетом неравномерного нагрева, когда давление между диском и валом сохраняется (в частности, и в состоянии покоя при $n = 0$). При этом внутренний радиус диска будет равен $r_d + u_d$, а внешний радиус вала $r_b + u_b$, причем при $n = 0$ $u_d > 0$, а $u_b < 0$ (рис. VIII.4, а) и при $n \neq 0$ $u_d > 0$, а $u_b < 0$ или $u_b > 0$ (рис. VIII.4, а или VIII.4, б).

Так как при сохранении контактного давления внутренний радиус диска равен внешнему радиусу вала, то

$$r_d + u_d = r_b + u_b$$

или

$$r_b - r_d = u_d - u_b = \frac{\Delta}{2}. \quad (\text{VIII.22})$$

Равенство (VIII.22) при заданном температурном поле имеет место при всех частотах вращения ротора n , лежащих в интервале $0 \leq n \leq n^*$, где n^* — минимальная частота вращения, при которой давление между диском и валом становится равным нулю. Эту частоту вращения называют освобождающим числом оборотов диска

Будем считать, что вал равномерно нагрет до температуры T_b , а температура диска задана функцией $T(r)$. Кроме того, примем, что модуль упругости материала вала равен модулю упругости материала диска при температуре на внутреннем радиусе. Тогда, пользуясь формулой (VIII.3), выразим радиальные перемещения диска и вала через напряжения

$$u_d = r_d [(\sigma_{\phi_0} - \nu \sigma_{r_0}) E_0 + \alpha(r_0) T(r_0)];$$

$$u_b = r_b [(\sigma_{\phi_b} - \nu \sigma_{r_0}) E_0 + \alpha_b T_b],$$

где $E_0 = E(r_0)$ — модуль упругости материала диска; σ_{r_0} — радиальное напряжение, равное давлению между диском и валом; σ_{ϕ_0} и σ_{ϕ_b} — окружные напряжения на внутреннем радиусе диска и на внешнем радиусе вала $\alpha(r_0)$ и α_b — коэффициенты линейного расширения материала диска и вала.

Подставив выражения для перемещений в (VIII.22) и полагая $r_d = r_b = r_0$, получим

$$\Delta = 2r_0 \{(\sigma_{\phi_0} - \sigma_{\phi_b}) E_0 + [(\alpha T)_0 - \alpha_b T_b]\}, \quad (\text{VIII.23})$$

где $(\alpha T)_0 = \alpha(r_0) T(r_0)$

Окружные напряжения σ_{ϕ_b} на наружной поверхности вала можно определить с достаточной для практических расчетов точностью, если рассматривать вал как бесконечно длинный вращающийся толстостенный цилиндр, нагруженный внешним давлением [142]. Тогда при рассмотрении плоского напряженного состояния в цилиндре окружные напряжения на внешнем радиусе будут равны

$$\sigma_{\phi_b} = \frac{1 + (r_p/r_0)^2}{1 - (r_p/r_0)^2} \sigma_{r_0} + [(1 - \nu) + (3 + \nu)(r_p/r_0)^2] \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{r_0^2}{4}, \quad (\text{VIII.24})$$

а при рассмотрении плоской деформации

$$\sigma_{\phi_b} = \frac{1 + (r_p/r_0)^2}{1 - (r_p/r_0)^2} \sigma_{r_0} + \frac{1}{1 - \nu} [(1 - 2\nu) + (3 - 2\nu)(r_p/r_0)^2] \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{r_0^2}{4}, \quad (\text{VIII.24a})$$

где r_p — радиус центральной расточки вала.

Введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 + (r_p/r_0)^2}{1 - (r_p/r_0)^2} &= C; \\ [(1 - \nu) + (3 + \nu)(r_p/r_0)^2] \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{r_0^2}{4} &= D; \\ 2[(\alpha T)_0 - \alpha_B T_B] r_0 &= \Delta_T \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.25})$$

$$\frac{2r_0}{E_0} [\sigma_{\varphi_0} - C\sigma_{r_0} - D] = \Delta - \Delta_T. \quad (\text{VIII } 26)$$

Найдем далее зависимость, связывающую освобождающее число оборотов n^* с величиной натяга и напряжениями в диске. При освобождающем числе оборотов радиальные усилия на внутренней поверхности диска равны нулю. Тогда в соответствии с (VIII.15a) окружные напряжения в диске при $r = r_0$ будут равны:

$$\sigma_{\varphi_0}^* = \sigma_{\varphi\omega}^* + \sigma_{\varphi T},$$

Условие (VIII.26) при освобождающем числе оборотов примет вид:

$$2r_0[\sigma_{\text{q}\omega}^* + \sigma_{\text{q}T} - D^*]/E_0 = \Delta - \Lambda_T, \quad (\text{VIII } 27)$$

Учитывая, что напряжения в свободно вращающемся диске пропорциональны квадрату частоты вращения и $(\omega^*)^2 = \omega^2 (n^*/n)^2$, имеем:

$$\sigma_{\varphi\omega}^* = \sigma_{\varphi\omega} (n^*/n)^2; \quad D^* = D (n^*/n)^2,$$

Подставляя в (VIII.27), получим

$$(\sigma_{\varphi\omega} - D) (n^*/n)^2 = (\Delta - \Delta_T) \frac{E_0}{2r_0} - \sigma_{\varphi T},$$

$$n^* = n \sqrt{\frac{(\Delta - \Delta_T)(E_0/2r_0) - \sigma_{qT}}{\sigma_{\varphi\omega} - D}}. \quad (\text{VIII.28})$$
$$n^3 = n \sqrt{\frac{E\Delta}{2r_0(\sigma_{\text{ср}} - D)}}. \quad (\text{VIII } 29)$$

В частности, для последней задачи граничное условие (VIII.26) при $n = 0$ примет вид:

$$\frac{2r_0}{E_0} (\sigma_{\psi_0}^H - C\sigma_{r_0}^H) = \Delta - \Delta_r, \quad (\text{VIII.30})$$

где $\sigma_{r_0}^n$ и $\sigma_{\varphi_0}^n$ — напряжения на внутреннем радиусе невращающегося диска, вызванные посадкой его на вал с натягом и температурным полем.

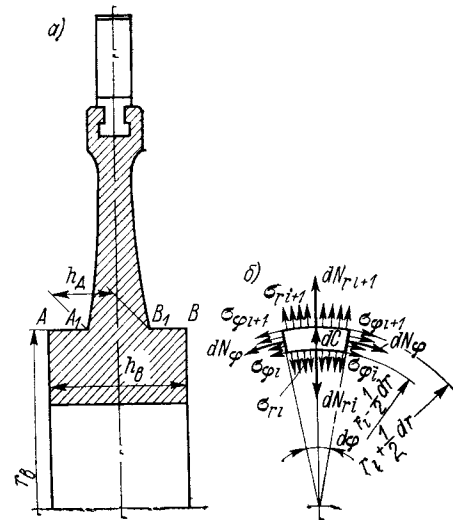


Рис VIII 5. К выводу условий сопряжения в месте ступенчатого изменения ширины профиля диска

УІІІ.5. УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ

Диски паровых турбин, как правило, имеют ступенчатое изменение толщины профиля, например при переходе полотна диска во втулку (рис. VIII.5, а).

Рассмотрим в общем случае ступенчатое изменение профиля диска при переходе от i -го к $(i + 1)$ -му участку (рис. VIII.5, б).

При составлении условий сопряжения будем предполагать, что напряжения и деформации как в i -м, так и $(i + 1)$ -м участках постоянны по толщине. Это будет в том случае, если осевые размеры рассматриваемых участков в месте их сопряжения не отличаются заметно друг от друга. В противном случае в одном из участков радиальные перемещения в осевом направлении не будут оставаться постоянными и в нем возникнет объемное напряженное состояние. Объемное напряженное состояние в дисках будет рассмотрено ниже (см. IX 3). Здесь будем считать, что перемещения по толщине диска на всех участках остаются постоянными.

Пусть в месте сопряжения рассматриваемых участков имеет место скачок температуры от T_i до T_{i+1} . Коэффициенты линейного расширения материала при этих температурах будем обозначать $\alpha_i = \alpha(T_i)$ и $\alpha_{i+1} = \alpha(T_{i+1})$, а модули упругости $E_i = E(T_i)$ и $E_{i+1} = E(T_{i+1})$.

Вырежем из диска в месте перехода от i -го участка к $(i + 1)$ -му элемент двумя меридиональными плоскостями и двумя цилиндрическими сечениями с радиусами $r_i = dr/2$ и $r_i + dr/2$. Силы, действующие на выделенный элемент, показаны на рис. VIII 5, б, они равны:

$$\begin{aligned} dC &= \frac{\gamma \omega^2}{g} r_i^2 dl \, dq, \\ dN_{r_i} &= \sigma_{r_i} h_i \left(r_i - \frac{dr}{2} \right) dq, \\ dN_{r_{i+1}} &= \sigma_{r_{i+1}} h_{i+1} \left(r_i + \frac{dr}{2} \right) dq, \\ dN_q &= \sigma_{q_i} dF_i + \sigma_{q_{i+1}} dF_{i+1}, \end{aligned}$$

где $dF_i + dF_{i+1} = dF$.

Составим условие равновесия элемента, спроектировав действующие силы на радиальное направление:

$$\begin{aligned} \sigma_{r_i} h_i \left(r_i - \frac{dr}{2} \right) - \sigma_{r_{i+1}} h_{i+1} \left(r_i + \frac{dr}{2} \right) + \sigma_{q_i} dF_i - \\ - \sigma_{q_{i+1}} dF_{i+1} - \frac{\gamma \omega^2}{g} r_i^2 dF = 0. \end{aligned}$$

Положим, что $dr \rightarrow 0$. Тогда и dF также будет стремиться к нулю. В результате получим:

$$\sigma_{r_i} h_i = \sigma_{r_{i+1}} h_{i+1},$$

откуда

$$\sigma_{r_{i+1}} = \frac{h_i}{h_{i+1}} \sigma_{r_i}. \quad (\text{VIII.31})$$

Условие (VIII.31) является одним из условий сопряжения, связывающим радиальные напряжения

Для получения второго условия, связывающего окружные напряжения, рассмотрим радиальные перемещения i -го и $(i + 1)$ -го участков при $r = r_i$:

$$u_i = r_i [(\sigma_{q_i} - \nu \sigma_{r_i}) E_i + \alpha_i T_i],$$

$$u_{i+1} = r_i [(\sigma_{q_{i+1}} - \nu \sigma_{r_{i+1}}) E_{i+1} + \alpha_{i+1} T_{i+1}]$$

Так как эти перемещения должны быть равны между собой и принимая $E_i = E_{i+1} = (E_i + E_{i+1})/2 = E_{i+1/2}$, можем записать

$$(\sigma_{q_i} - \nu \sigma_{r_i}) + E_{i+1/2} \alpha_i T_i = (\sigma_{q_{i+1}} - \nu \sigma_{r_{i+1}}) + E_{i+1/2} \alpha_{i+1} T_{i+1},$$

откуда находим

$$\sigma_{q_{i+1}} - \sigma_{q_i} + \nu (\sigma_{r_{i+1}} - \sigma_{r_i}) = E_{i+1/2} (\alpha_{i+1} T_{i+1} - \alpha_i T_i). \quad (\text{VIII 31a})$$

Это и есть второе условие сопряжения, связывающее окружные напряжения.

Условия (VIII 31) и (VIII 31a) можно записать в другом виде, если ввести обозначение

$$\Delta \sigma_{r_{i+1/2}} = \sigma_{r_{i+1}} - \sigma_{r_i} = \left(\frac{h_i}{h_{i+1}} - 1 \right) \sigma_{r_i} \quad (\text{VIII 32})$$

Тогда условия (VIII 31) и (VIII 31a) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_{i+1}} - \sigma_{r_i} + \Delta \sigma_{r_{i+1/2}}, \\ \sigma_{q_{i+1}} - \sigma_{q_i} + \nu \Delta \sigma_{r_{i+1/2}} - E_{i+1/2} (\alpha_{i+1} T_{i+1} - \alpha_i T_i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII 33})$$

Запишем условия сопряжения для случая перехода пологна диска во втулку (рис. VIII 5, а). Будем считать, что $T_b = T_d$. Тогда в соответствии с (VIII 31) и (VIII 31a) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_b} &= \frac{h_c}{h_d} \sigma_{r_b}; \\ \sigma_{q_b} &= \sigma_{q_b} + \nu (\sigma_{r_b} - \sigma_{r_b}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII 34})$$

где σ_{r_b} и σ_{r_d} — радиальные напряжения во втулке и полоте диска на радиусе $r = r_b$, σ_{q_b} и σ_{q_d} — окружные напряжения на этом же радиусе.

VIII.6. ДИСК ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Для диска постоянной толщины (рис. VIII 6) $h = \text{const}$. В этом случае при постоянных параметрах упругости, т. е. при $E = \text{const}$ и $\nu = \text{const}$, уравнение (VIII.5) имеет вид:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{1}{r^2} u = - \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{1 - \nu^2}{E} r + (1 + \nu) \frac{d(\alpha T)}{dr}, \quad (\text{VIII.35})$$

или

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right] = - \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{1 - \nu^2}{E} r + (1 + \nu) \frac{d(\alpha T)}{dr}, \quad (\text{VIII.35a})$$

что нетрудно проверить дифференцированием.

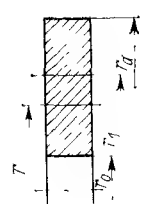
Последовательно интегрируя, находим:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) = -\frac{\gamma\omega^2}{g} \frac{1-\nu^2}{E} \frac{r^2}{2} + (1+\nu)\alpha T + 2C_1;$$

$$u = -\frac{\gamma\omega^2}{g} \frac{1-\nu^2}{E} \frac{r^3}{8} + \frac{1+\nu}{r} \int r\alpha T dr + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (\text{VIII.36})$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования

Подставив (VIII.36) в формулы для напряжений (VIII.4), найдем:



$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r^2 - \frac{E}{r^2} \int_{r_0}^r r\alpha T dr; \\ \sigma_\varphi &= A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r^2 + \frac{E}{r^2} \int_{r_0}^r r\alpha T dr - E\alpha T, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.37})$$

Рис. VIII.6
Профиль диска постоянной толщины

где $A = EC_1/(1+\nu)$ и $B = EC_2/(1+\nu)$.

Произвольные постоянные A и B определяются из граничных условий на внутреннем и внешнем радиусах диска.

1. Рассмотрим вращающийся равномерно нагретый диск ($T = \text{const}$). В таком диске, как уже отмечалось, температурные напряжения отсутствуют, и в формулах (VIII.37) слагаемые, содержащие температуру, должны быть опущены.

Примем радиальные напряжения на внутреннем радиусе ($r = r_0$) диска равными σ_{r_0} , а на внешнем ($r = r_a$) равными σ_{ra} . Тогда произвольные постоянные A и B определяются из следующих уравнений:

$$\sigma_{r_0} = A - \frac{B}{r_0^2} - \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r_0^2;$$

$$\sigma_{ra} = A - \frac{B}{r_a^2} - \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r_a^2,$$

откуда находим:

$$A = \sigma_{r_0} + (\sigma_{ra} - \sigma_{r_0}) \frac{1}{1 - (r_0/r_a)^2} + \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r_a^2 \left[1 + \left(\frac{r_0}{r_a} \right)^2 \right];$$

$$B = (\sigma_{ra} - \sigma_{r_0}) \frac{r_0^2}{1 - (r_0/r_a)^2} + \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r_0^2 r_a^2.$$

Подставив выражения для A и B в (VIII.37), получим формулы для напряжений во вращающемся равномерно нагретом диске

с центральным отверстием:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r_0} + (\sigma_{ra} - \sigma_{r_0}) \frac{1 - (r_0/r)^2}{1 - (r_0/r_a)^2} + \\ &+ \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r_a^2 \left[1 + \left(\frac{r_0}{r_a} \right)^2 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - \left(\frac{r}{r_a} \right)^2 \right]; \\ \sigma_\varphi &= \sigma_{r_0} + (\sigma_{ra} - \sigma_{r_0}) \frac{1 + (r_0/r)^2}{1 - (r_0/r_a)^2} + \\ &+ \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r_a^2 \left[1 + \left(\frac{r_0}{r_a} \right)^2 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \left(\frac{r}{r_a} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.38})$$

Для сплошного диска постоянная B равна нулю, так как в противном случае напряжения в центре диска имели бы бесконечные значения, что физически невозможно. Полагая в (VIII.37) $B = 0$ и пренебрегая температурными слагаемыми, получим:

$$\sigma_r^* = A - \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r^2;$$

$$\sigma_\varphi^* = A - \frac{1+3\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r^2.$$

Постоянную A определим из условия на внешнем радиусе

$$A = \sigma_{ra} + \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r_a^2,$$

тогда напряжения во вращающемся равномерно нагретом сплошном диске определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^* &= \sigma_{ra} + \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r_a^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_a} \right)^2 \right]; \\ \sigma_\varphi^* &= \sigma_{ra} + \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r_a^2 \left[1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \left(\frac{r}{r_a} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.39})$$

Сравним напряжения в диске с центральным отверстием и в сплошном. Примем радиальные напряжения на внутреннем радиусе диска с центральным отверстием равными нулю ($\sigma_{r_0} = 0$). Наибольшими напряжениями в каждой точке вдоль радиуса того и другого диска являются окружные. Максимальных значений эти напряжения достигают на внутреннем радиусе ($r = r_0$) в диске с центральным отверстием и в центре ($r = 0$) в сплошном. Из (VIII.38) и (VIII.39) имеем:

$$\sigma_{\varphi_0} = 2 \left\{ \frac{\sigma_{ra}}{1 - (r_0/r_a)^2} + \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r_a^2 \left[1 + \frac{1-\nu}{3+\nu} \left(\frac{r_0}{r_a} \right)^2 \right] \right\};$$

$$\sigma_{\varphi_0}^* = \sigma_{ra} + \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma\omega^2}{g} r_a^2,$$

откуда видно, что $\sigma_{\varphi_0} > 2\sigma_{\varphi_0}^*$.

Пусть радиус r_0 внутреннего отверстия мал по сравнению с наружным радиусом r_a . Если пренебречь $(r_0/r_a)^2$ по сравнению с единицей, то выражение для максимальных напряжений

$\sigma_{\varphi 0}$ на внутреннем радиусе ($r = r_0$) диска с отверстием примет следующий вид:

$$\sigma_{\varphi 0} = 2 \left(\sigma_{r_a} + \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma \omega^2}{g} r_a^2 \right),$$

т. е. в этом случае $\sigma_{\varphi 0} = 2\sigma_{\varphi}^*$.

Таким образом, наличие в диске центрального отверстия даже очень малого диаметра увеличивает окружные (максимальные) напряжения на внутреннем радиусе более чем в два раза по сравнению с их значениями в сплошном диске.

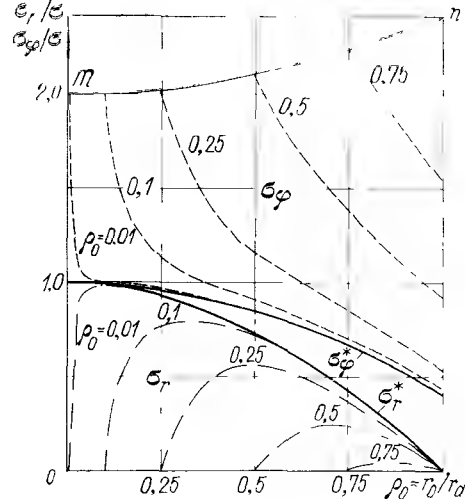


Рис. VIII.7. Зависимость напряжений во вращающемся диске постоянной толщины от радиуса при различных относительных радиусах ρ_0 центрального отверстия.

$\sigma_r, \sigma_{\varphi}$ — диск с отверстием, $\sigma_r^*, \sigma_{\varphi}^*$ — диск без отверстия

сравнению с внешним диаметром диска (для малых значений ρ_0). Окружные напряжения на внутреннем радиусе диска (максимальные — кривые mn) увеличиваются не более чем на 20 % при изменении относительного радиуса отверстия ρ_0 от очень малой величины до единицы. При $\rho_0 = (r_0/r_a) \rightarrow 1$ радиальные напряжения в диске в соответствии с (VIII.38) будут приближаться к нулю, а окружные — к напряжениям в свободно вращающемся кольце, которые равны

$$\sigma_0 = \frac{\gamma \omega^2}{g} r^2 \quad (\text{VIII.40})$$

2. Рассмотрим невращающийся ($\omega = 0$) неравномерно нагретый диск. Формулы (VIII.37) для напряжений в этом случае примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A - B/r^2 - EJ_T(r); \\ \sigma_{\varphi} &= A + B/r^2 + EJ_T(r) - E\alpha T, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.41})$$

где

$$J_T(r) = \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r r \alpha T dr$$

Примем радиальные напряжения на внутреннем и внешнем радиусах диска равными нулю. Тогда произвольные постоянные A и B определятся из условий

$$\begin{aligned} A - B/r_0^2 &= 0; \\ A - B/r_a^2 - EJ_T(r_a) &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1 - (r_0/r_a)^2} EJ_T(r_a); \\ B &= \frac{r_0^2}{1 - (r_0/r_a)^2} EJ_T(r_a). \end{aligned}$$

Подставив выражения для A и B в (VIII.41), получим формулы для температурных напряжений в невращающемся неравномерно нагретом диске:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r1} &= E \left[\frac{1 - (r_0/r_a)^2}{1 - (r_0/r_a)^2} J_T(r_a) - J_T(r) \right]; \\ \sigma_{\varphi 1} &= E \left[\frac{1 + (r_0/r_a)^2}{1 - (r_0/r_a)^2} J_T(r_a) - J_T(r) \right] - E\alpha T(r) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.42})$$

Если диск сплошной, то, как и выше, из физических соображений полагаем постоянную B равной нулю. Вторая постоянная A определится из условия на внешнем радиусе диска

$$A = EJ_T(r_a).$$

Формулы для температурных напряжений в сплошном диске будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rT} &= E [J_T(r_a) - J_T(r)]; \\ \sigma_{\varphi T} &= E [J_T(r_a) - J_T(r)] - E\alpha T(r). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.43})$$

Приведем расчетные формулы для вычисления интеграла $J_T(r)$ для некоторых частных случаев изменения температуры по радиусу диска.

Коэффициент линейного расширения будем принимать постоянным ($\alpha = \text{const}$).

Температура по радиусу диска изменяется по линейному закону

$$T(r) = T_0 + (T_a - T_0) \frac{r - r_0}{r_a - r_0}; \quad (\text{VIII.44})$$

после введения обозначений $\rho = r/r_0$ при $r_0 \leq r \leq r_a$; $1 \leq \rho \leq \rho_a$ получим

$$T(\rho) = T_0 + (T_a - T_0) \frac{\rho - 1}{\rho_a - 1},$$

где

$$T_0 = T(r_0) \quad \text{и} \quad T_a = T(r_a).$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$J_T = \frac{\alpha T_0}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) \left[1 + \frac{T_a - T_0}{T_0} \frac{1}{\rho_a - 1} \left(\frac{2}{3} \frac{\rho^3 - 1}{\rho^2 - 1} - 1 \right) \right]. \quad (\text{VIII.45})$$

Температура по радиусу диска изменяется по логарифмическому закону

$$T(r) = T_0 + (T_a - T_0) \frac{\ln r/r_0}{\ln r_a/r_0} \quad (\text{VIII.46})$$

или

$$T(\rho) = T_0 + (T_a - T_0) \frac{\ln \rho}{\ln \rho_a}.$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$J_T = \frac{\alpha T_0}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) \left[1 + \frac{T_a - T_0}{T_0} \frac{1}{\ln \rho_a} \left(\frac{\rho^3}{\rho^2 - 1} \ln \rho - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (\text{VIII.47})$$

Температура по радиусу сплошного диска изменяется по квадратичному закону

$$T(r) = T_0 + (T_a - T_0) \frac{r^2}{r_a^2}. \quad (\text{VIII.48})$$

В этом случае

$$J_T = \frac{\alpha T_0}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{T_a - T_0}{T_0} \left(\frac{r}{r_a} \right)^2 \right]. \quad (\text{VIII.49})$$

Вычисляя значения интеграла $J_T(r)$ при заданном законе изменения температуры и используя формулы (VIII.42) или (VIII.43), можем найти температурные напряжения в любой точке диска с центральным отверстием или в сплошном.

3 Для практического использования целесообразно представить формулы для напряжений σ_r и σ_φ в зависимости от напряжений на каком-либо радиусе диска. Пусть при $r = r_1$ (см. рис. VIII.6):

$$\sigma_r = \sigma_{r1}; \quad \sigma_\varphi = \sigma_{\varphi1}. \quad (\text{VIII.50})$$

Тогда для определения постоянных A и B в соответствии с с (VIII.37) имеем уравнения:

$$\sigma_{r1} = A - B r_1^2 - \frac{3 + \nu}{8} \frac{\gamma \omega^2}{g} r_1^2 - E J_T(r_1);$$

$$\sigma_{\varphi1} = A + B r_1^2 - \frac{1 + 3\nu}{8} \frac{\gamma \omega^2}{g} r_1^2 + E J_T(r_1) - E \alpha T(r_1),$$

откуда находим:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (\sigma_{r1} + \sigma_{\varphi1}) + \frac{1 + \nu}{4} \frac{\gamma \omega^2}{g} r_1^2 + \frac{1}{2} E \alpha T(r_1), \\ B &= -\frac{r_1^2}{2} (\sigma_{r1} - \sigma_{\varphi1}) - \frac{1 - \nu}{8} \frac{\gamma \omega^2}{g} r_1^2 - E J_T(r_1) + \frac{r_1^2}{2} E \alpha T(r_1). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.51})$$

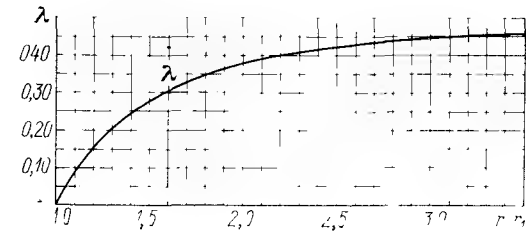


Рис. VIII.8. Коэффициент λ при $1,0 \leq r/r_1 \leq 3,5$

Подставляя (VIII.51) в (VIII.37) и проводя преобразования, окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (1 - \lambda) \sigma_{r1} + \lambda \sigma_{\varphi1} + \beta \Omega(r_1) + \theta_1(r_1); \\ \sigma_\varphi &= \lambda \sigma_{r1} + (1 - \lambda) \sigma_{\varphi1} + \delta \Omega(r_1) + \theta_2(r_1), \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.52})$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{(r/r_1)^2} \right];$$

$$\Omega(r_1) = \frac{\gamma \omega^2}{g} r_1^2;$$

$$\beta = \frac{1 + \nu}{4} + \frac{1 - \nu}{8} \frac{1}{(r/r_1)^2} - \frac{3 + \nu}{8} (r/r_1)^2;$$

$$\delta = \frac{1 + \nu}{4} - \frac{1 - \nu}{8} \frac{1}{(r/r_1)^2} - \frac{1 + 3\nu}{8} (r/r_1)^2;$$

$$\theta_1(r_1) = E \{ \lambda \alpha T(r_1) + [(r_1/r)^2 J_T(r_1) - J_T(r)] \};$$

$$\begin{aligned} \theta_2(r_1) &= E \{ (1 - \lambda) \alpha T(r_1) - \\ &- \alpha T(r) - [(r_1/r)^2 J_T(r_1) - J_T(r)] \}. \end{aligned}$$

На рис. VIII.8—VIII.10 построены кривые зависимости λ , β , δ от r/r_1 при $\nu = 0,3$.

В качестве примера получим формулы для определения напряжений во вращающемся, неравномерно нагретом диске постоянной толщины, посаженном на вал с натягом. Пусть на внешнем радиусе диска при $r = r_a$

$$\sigma_r = \sigma_{r_a}.$$

Натяг, с которым диск посажен на вал, равен Δ . Температура вала постоянна по радиусу и равна T_n . Температура диска задана функцией $T = T(r)$, значения которой при $r = r_a$ равны $T = T_a$, а при $r = r_0$ — $T = T_0$. Для решения задачи воспользуемся формулами (VIII.52), в которых примем $r_1 = r_a$, $\sigma_{r1} = \sigma_{r_a}$ и $\sigma_{\varphi1} = \sigma_{\varphi_a}$.

Тогда напряжения на любом радиусе диска

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (1 - \lambda) \sigma_{r_a} + \\ &+ \lambda \sigma_{\varphi_a} + \beta \Omega(r_a) + \theta_1(r_a); \\ \sigma_{\varphi} &= \lambda \sigma_{r_a} + (1 - \lambda) \sigma_{\varphi_a} + \\ &+ \delta \Omega(r_a) + \theta_2(r_a). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.53})$$

В этих формулах значения напряжений σ_{r_a} заданы, а неизвестные значения напряжений σ_{φ_a} определим из условия на внутреннем радиусе (VIII.26) для диска, посаженного на вал с натягом.

На внутреннем радиусе ($r = r_0$) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_0} &= (1 - \lambda) \sigma_{r_a} + \lambda \sigma_{\varphi_a} + \\ &+ \beta \Omega(r_a) + \theta_1(r_a); \\ \sigma_{\varphi_0} &= \lambda \sigma_{r_a} + (1 - \lambda) \sigma_{\varphi_a} + \\ &+ \delta \Omega(r_a) + \theta_2(r_a), \end{aligned} \right\}$$

Рис VIII.9 Коэффициенты β и δ при $0,4 \leq r/r_1 \leq 1,0$

где λ , β и δ определяются по кривым рис. VIII.8—VIII.10 при $r/r_1 = r_0/r_a$;

$$\begin{aligned} \theta_1(r_a) &= E [\lambda \alpha T_a + (r_a/r_0)^2 J_T(r_a)]; \\ \theta_2(r_a) &= E [(1 - \lambda) \alpha T_a - \alpha T_0 - (r_a/r_0)^2 J_T(r_a)]; \\ J_T(r_0) &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя σ_{r_0} и σ_{φ_0} в условие (VIII.26), получим уравнение относительно неизвестной величины σ_{φ_a} , откуда окончательно находим:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi_a} &= \frac{E (\Delta - \Delta T) / (2r_0) + D - (\delta - C\beta) \Omega(r_a) - [\theta_2(r_a) - C\theta_1(r_a)]}{1 - \lambda(1 + C)} - \\ &- \frac{\lambda - C(1 - \lambda)}{1 - \lambda(1 + C)} \sigma_{r_a}. \end{aligned}$$

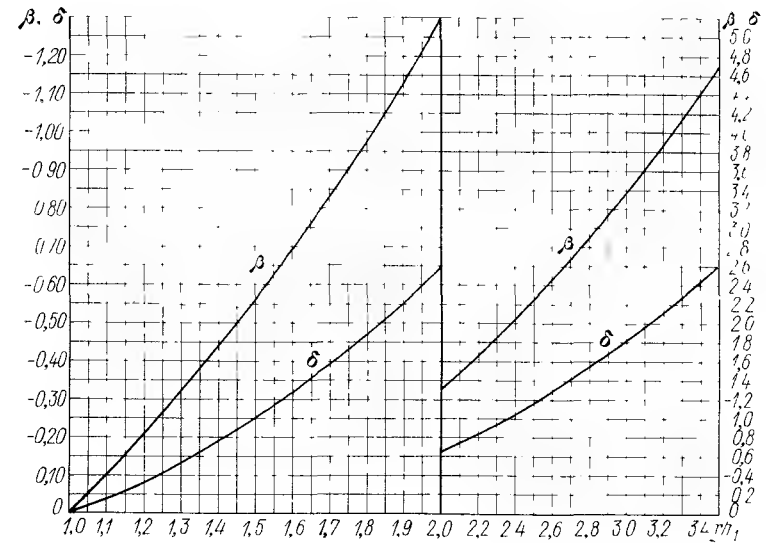


Рис. VIII.10. Коэффициенты β и δ при $1,0 \leq r/r_1 \leq 3,5$

Вычислив σ_{φ_a} , можем подсчитать напряжения на любом радиусе диска по формулам (VIII.53).

VIII.7. ДИСК КОНИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Рассмотрим вращающийся равномерно нагретый диск конического профиля (рис VIII.11). Уравнение профиля может быть записано в виде

$$h = \frac{R - r}{R} h_0,$$

где R — радиус полного конуса ($h = 0$); h_0 — толщина диска при $r = 0$.

Перейдем к относительной координате $t = r/R$ при $0 \leq r \leq R$; $0 \leq t \leq 1$, тогда $h = (1 - t) h_0$.

Введя новую искомую функцию $X = u t$ и заменив в уравнении (VIII.5) h его выражением, а также приняв, что $T = \text{const}$, получим

$$X'' + \frac{4t - 3}{t(t - 1)} X' + \frac{1 + \nu}{t(t - 1)} X = - \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{1 - \nu^2}{E} R^3. \quad (\text{VIII.54})$$

Однородное уравнение (VIII.54)

$$X'' + \frac{4t - 3}{t(t - 1)} X' + \frac{1 + \nu}{t(t - 1)} X = 0$$

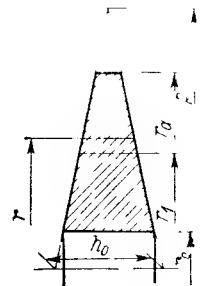


Рис. VIII.11 Конический профиль

является гипергеометрическим дифференциальным уравнением; его интегралы X_1 и X_2 выражаются в виде бесконечных рядов и для практического пользования могут быть представлены в виде кривых или таблиц [159]. Частный интеграл уравнения (VIII.54) будем искать в виде

$$X^* = at^2 + bt + c.$$

Подставив в уравнение и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях t в правой и левой частях, найдем a , b и c . В результате получим

$$X^* = -\frac{(1-\nu^2)}{(1+\nu)} \frac{1}{E} \frac{\gamma\omega^2}{g} R^3 \left[t^2 - \frac{3+\nu}{5+\nu} t - \frac{3(3+\nu)}{(5+\nu)(1+\nu)} \right].$$

Общий интеграл уравнения (VIII.54) будет иметь вид:

$$X = A'X_1 + B'X_2 + X^*,$$

где A' и B' — постоянные интегрирования. Зная X , находим $u = tX$ и далее по формулам (VIII.4) — напряжения. Последние могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= Ap_1 + Bp_2 + \Omega_k p_c; \\ \sigma_f &= Aq_1 + Bq_2 + \Omega_k q_c, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.55})$$

где A и B — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий; p_1 и q_1 — решения, соответствующие интегралу $u_1 = tX_1$, а p_2 и q_2 — интегралу $u_2 = tX_2$;

$$\Omega_k = \frac{\gamma\omega^2}{g} R^2.$$

Решения p_c и q_c , соответствующие частному интегралу $u^* = tX^*$, определяются выражениями:

$$p_c = \frac{df(t)}{dt} + \nu \frac{f(t)}{t}; \quad q_c = \frac{f(t)}{t} + \nu \frac{df(t)}{dt},$$

где

$$f(t) = -\frac{t}{1+\nu} \left[t^2 - \frac{3+\nu}{5+\nu} t - \frac{3(3+\nu)}{(5+\nu)(1+\nu)} \right].$$

Решения p_1 и q_1 , p_2 и q_2 выражаются бесконечными рядами. Численные их значения могут быть представлены (при заданном коэффициенте Пуассона ν) в виде кривых или таблиц в зависимости от $t = r/R$ [217; 226]. В табл. VIII.1 даны численные значения p_1 , p_2 , q_1 и q_2 , а также p_c и q_c в зависимости от $t = r/R$ при $\nu = 0,3$.

Решения p_1 и q_1 имеют бесконечно большие значения на периферии конуса ($r = R$; $t = 1$), а p_2 и q_2 — на оси диска ($r = 0$; $t = 0$). Следовательно, для диска с полным конусом нужно положить $A = 0$, а постоянную B — разделить из граничного условия на внутреннем радиусе. Для конического диска без центрального отверстия необходимо положить равной нулю

$t = r/R$	Радиальные напряжения			Окружные напряжения		
	p_1	p_2	p_c	q_1	q_2	q_c
0,00	1,434	—∞	0,1653	1,434	∞	0,1653
0,02	1,456	—1731,470	0,1677	1,449	1779,950	0,1670
0,04	1,480	—429,340	0,1699	1,466	454,740	0,1686
0,06	1,504	—189,060	0,1719	1,482	206,660	0,1700
0,08	1,529	—105,260	0,1736	1,499	118,930	0,1713
0,10	1,555	—66,620	0,1751	1,517	77,890	0,1724
0,12	1,583	—45,710	0,1763	1,535	55,370	0,1735
0,14	1,612	—33,150	0,1773	1,554	41,650	0,1744
0,16	1,642	—25,030	0,1781	1,574	32,650	0,1751
0,18	1,673	—19,490	0,1787	1,595	26,420	0,1757
0,20	1,706	—15,540	0,1790	1,616	21,910	0,1762
0,22	1,740	—12,640	0,1790	1,638	18,540	0,1766
0,24	1,777	—10,440	0,1789	1,661	15,950	0,1768
0,26	1,815	—8,730	0,1785	1,686	13,920	0,1769
0,28	1,855	—7,390	0,1779	1,711	12,290	0,1768
0,30	1,897	—6,310	0,1770	1,737	10,960	0,1766
0,32	1,942	—5,430	0,1760	1,765	9,860	0,1763
0,34	1,989	—4,700	0,1746	1,794	8,940	0,1758
0,36	2,040	—4,100	0,1731	1,824	8,160	0,1753
0,38	2,093	—3,590	0,1713	1,856	7,490	0,1745
0,40	2,150	—3,158	0,1693	1,889	6,910	0,1737
0,42	2,210	—2,789	0,1670	1,925	6,410	0,1727
0,44	2,275	—2,471	0,1645	1,962	5,980	0,1715
0,46	2,345	—2,195	0,1618	2,002	5,590	0,1703
0,48	2,419	—1,954	0,1588	2,044	5,250	0,1689
0,50	2,500	—1,743	0,1557	2,089	4,940	0,1673
0,52	2,587	—1,557	0,1522	2,137	4,670	0,1657
0,54	2,681	—1,393	0,1486	2,189	4,420	0,1639
0,56	2,784	—1,247	0,1447	2,244	4,200	0,1619
0,58	2,896	—1,116	0,1406	2,303	4,000	0,1599
0,60	3,019	—0,999	0,1362	2,368	3,816	0,1577
0,62	3,155	—0,895	0,1316	2,438	3,648	0,1553
0,64	3,306	—0,800	0,1268	2,514	3,494	0,1529
0,66	3,474	—0,715	0,1217	2,598	3,353	0,1502
0,68	3,663	—0,637	0,1164	2,690	3,222	0,1475
0,70	3,876	—0,567	0,1109	2,793	3,101	0,1446
0,72	4,120	—0,503	0,1052	2,908	2,990	0,1416
0,74	4,400	—0,445	0,0992	3,038	2,886	0,1385
0,76	4,730	—0,391	0,0929	3,186	2,789	0,1352
0,78	5,110	—0,342	0,0865	3,357	2,699	0,1318
0,80	5,570	—0,297	0,0798	3,557	2,614	0,1282
0,82	6,130	—0,256	0,0729	3,796	2,535	0,1245
0,84	6,840	—0,218	0,0657	4,090	2,461	0,1207
0,86	7,740	—0,183	0,0583	4,450	2,391	0,1168
0,88	8,940	—0,151	0,0507	4,920	2,325	0,1127
0,90	10,610	—0,121	0,0428	5,550	2,263	0,1085
0,92	13,130	—0,093	0,0347	6,470	2,205	0,1041
0,94	17,300	—0,067	0,0264	7,940	2,149	0,0996
0,96	25,650	—0,043	0,0178	10,770	2,097	0,0950
0,98	50,670	—0,021	0,0090	18,850	2,047	0,0902
1,00	∞	0	0	∞	2,000	0,0853

постоянную B , а A определить из граничного условия на внешнем радиусе. Для диска с полным конусом и без центрального отверстия постоянные A и B равны нулю одновременно.

В дисках паровых турбин коническая часть имеет центральное отверстие и срезана на внешнем радиусе цилиндрической поверхностью. В этом случае A и B определяются из граничных условий на внутреннем и внешнем радиусах конической части.

Если на некотором радиусе $r = r_1$ (см. рис. VIII.11) заданы радиальные и окружные напряжения $\sigma_r = \sigma_{r1}$ и $\sigma_\varphi = \sigma_{\varphi1}$, то постоянные A и B можно выразить через эти напряжения. Определив при $t_1 = r_1/R$ значения $p_1 = p'_1, \dots, q_c = q'_c$ и подставив эти значения, а также значения заданных напряжений в (VIII.55), найдем A и B :

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{q'_2(\sigma_{r1} - p'_c \Omega_k) - p'_2(\sigma_{\varphi1} - q'_c \Omega_k)}{p'_1 q'_2 - q'_1 p'_2}; \\ B &= \frac{p'_1(\sigma_{\varphi1} - q'_c \Omega_k) - q'_1(\sigma_{r1} - p'_c \Omega_k)}{p'_1 q'_2 - q'_1 p'_2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.56})$$

VIII.8. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРОФИЛИ И ДИСК РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Рассмотрение экспоненциальных профилей начнем с профиля равного сопротивления, выделив его из других профилей этого типа ввиду практического значения, которое этот профиль имеет. Примем радиальные и окружные напряжения в диске постоянными (не зависящими от радиуса), равными между собой:

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_0$$

и найдем профиль, удовлетворяющий этому условию.

Полагая в уравнении (VIII.1) $\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_0$, получим

$$\frac{dh}{dr} + \frac{1}{\sigma_0} \frac{\gamma \omega^2}{g} h r = 0.$$

Это уравнение допускает разделение переменных

$$\frac{dh}{h} = - \frac{\gamma \omega^2}{g \sigma_0} r dr.$$

Интегрируя, получим

$$\ln h = - \frac{\gamma \omega^2}{2g \sigma_0} r^2 + A$$

Постоянную интегрирования A определяем из условия на внешнем радиусе: $r = r_a$; $h = h_a$, откуда

$$A = \ln h_a + \frac{\gamma \omega^2}{2g \sigma_0} r_a^2.$$

Подставляя выражение для постоянной A в полученное выше решение, окончательно найдем

$$h = h_a \exp \left[\frac{\gamma \omega^2}{2g \sigma_0} (r_a^2 - r^2) \right]. \quad (\text{VIII.57})$$

Таким образом, получили выражение для профиля равного сопротивления (рис VIII.12), в котором радиальные и окружные напряжения постоянны и равны между собой. Полученный профиль является частным случаем экспоненциальных профилей. Рассмотрим экспоненциальные профили в более общем виде, определяемые уравнением [141]:

$$h = h_a (r_a/r)^{(k^2+1)/(k-\nu)} \exp [c (r_a^{3-k} - r^{3-k})], \quad (\text{VIII.58})$$

где h_a — толщина диска при $r = r_a$;

$$c = \frac{a}{b(k+\nu)(3-k)}; \quad a = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\gamma \omega^2}{g};$$

b и k — постоянные, причем $k \neq 3$. Замегаим, что при $k = 3$ профиль диска переходит в гиперболический

$$h = h_a \left(\frac{r_a}{r} \right)^{(8b/a) [b(3+\nu)]}.$$

Решение дифференциального уравнения (VIII.5) при постоянной температуре ($T = \text{const}$) и при толщине профиля, заданной уравнением (VIII.58), представляется в виде

$$u = Au_1 + Bu_2 + br^k, \quad (\text{VIII.59})$$

где u_1 и u_2 — частные интегралы уравнения (VIII.5) без свободного члена; br^k — частный интеграл уравнения (VIII.5) со свободным членом.

Решения u_1 и u_2 выражаются в виде бесконечных рядов, являющихся конфлюэнтными гипергеометрическими функциями, и для практического применения требуют составления численных таблиц.

Для экспоненциальных профилей, определяемых уравнением из [86; 140]

$$h = c \exp(-kr^m)$$

(где m — параметр, а k и c вычисляются из условия прохождения кривой через две заданные точки), интегралы однородного уравнения (VIII.5) также выражаются в виде бесконечных рядов, являющихся конфлюэнтными гипергеометрическими функциями, и для практического применения требуют составления численных таблиц. Только при

$$m = \pm 2/(3j) \quad (j = 1, 2, \dots; \nu = 1/3)$$

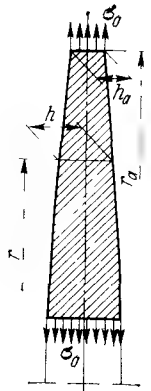


Рис. VIII.12
Профиль равного сопротивления

интегралы уравнений имеют замкнутый вид. Однако лишь при $j = 1$ выражения этих интегралов содержат небольшое число членов и пользование ими без предварительного составления таблиц практически еще возможно. При $j \geq 2$ выражения интегралов уже настолько громоздки, что пользование ими без таблиц затруднительно.

Рассмотрим частный случай уравнения (VIII.58), соответствующий $k = 1$. Кроме того, в решении (VIII.59) положим $A = B = 0$. Тогда получим $u = br$. Подставив u в (VIII.4), найдем выражение для напряжений:

$$\sigma_r = Eb/(1 - \nu) = \sigma_0; \quad \sigma_\varphi = Eb/(1 + \nu) = \sigma_0.$$

Таким образом, $\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_0$ и, следовательно, рассматриваемый профиль является профилем равного сопротивления.

Выразив b через напряжения

$$b = \frac{1 - \nu}{E} \sigma_0,$$

найдем выражение для радиального перемещения

$$u = \frac{1 - \nu}{E} \sigma_0 r.$$

Подставив b в выражение для s , из (VIII.58) найдем

$$h = h_a \exp \left[\frac{\gamma \omega^2}{2g\sigma_0} (r_a^2 - r^2) \right],$$

что совпадает с выражением (VIII.57), полученным выше.

Так как в диске равного сопротивления напряжения во всех точках должны быть одинаковыми, то усилия, приложенные на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях, ограничивающих профиль, должны быть равны постоянному растягивающему напряжению σ_0 .

На внутренней поверхности вращающегося диска растягивающие усилия практически неосуществимы. Ввиду этого диски с профилем равного сопротивления должны выполняться без центрального отверстия. Обычно такие диски или близкие к ним применяются в сварных или сболченных роторах (см. п. 1.2), где они выполняются со специальными цилиндрическими выступами. По этим выступам диски свариваются или сбалчиваются между собой (см. рис. 1.25).

На внешнем радиусе диска должно удовлетворяться условие (VIII.7) или (VIII.8). Зная центробежную силу лопаток и обода и задаваясь значением h_a , найдем из одного из этих условий:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma'_{ra}}{1 + F_n/(h_a r_a)} \quad \text{или} \quad \sigma_0 = \sigma'_{ra},$$

где $\sigma'_{ra} = (C_{об} + C_n)/(2\pi r_a h_a)$.

Затем с помощью формулы (VIII.57) вычисляем толщину диска при любом радиусе. Положив $r = 0$, из выражения (VIII.57) получим

$$\ln \frac{h_0}{h_a} = \frac{\gamma \omega^2}{2g\sigma_0} r_a^2 = \frac{\gamma}{2g\sigma_0} u_a^2,$$

где h_0 — толщина диска при $r = 0$; $u_a = \omega r_a$ — окружная скорость на обода диска при $r = r_a$.

Толщина диска в центре очень сильно возрастает с увеличением окружной скорости на периферии. Это обстоятельство ограничивает применение дисков с профилем равного сопротивления.

В реальных конструкциях сварных роторов применяют диски, близкие к дискам равного сопротивления, но с более простым профилем. В центральной части толщина дисков обычно постоянна, а далее переход к шейке обода осуществляется по коническому профилю.

При профилировании высоконагруженных дисков с центральным отверстием для выравнивания напряжений вдоль радиуса полотно диска выполняют коническим, а в центральной части толщину увеличивают за счет развитой ступицы (втулки). Однако достигнуть равнопрочности вдоль радиуса в реальных конструкциях дисков как с отверстием, так и без отверстия практически не удается.

Глава IX

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ РАСЧЕТА ДИСКОВ И РОТОРОВ

В гл. VIII отмечалось, что система дифференциальных уравнений (VIII.1) и (VIII.1a) или одно дифференциальное уравнение (VIII.5) для тонких дисков разрешимы в замкнутом виде лишь при постоянных параметрах упругости и для профилей определенной геометрической формы, некоторые из которых рассмотрены выше. В остальных случаях необходимо либо задаваться распределением напряжений и определять соответствующий профиль диска, либо применять приближенные способы решения уравнений для заданного произвольного профиля.

Задача профилирования диска по заданным напряжениям не получила в практике турбостроения широкого распространения, так как обычно задаются размерами диска исходя из конструктивных особенностей проточной части турбины и технологических соображений его изготовления, а затем производят его поверочный расчет. Таким образом, задача приближенных методов заключается в вычислении напряжений в диске заданных размеров и формы. Для решения этой задачи предложен ряд

приближенных способов, наибольшее применение из которых нашли метод двух расчетов, представляющий собой метод начальных параметров, основанный на использовании замкнутых решений для частного вида профилей, и метод последовательных приближений, заключающийся в численном интегрировании системы основных дифференциальных уравнений [83; 215].

Для расчета «толстых» дисков широкое применение получили универсальные численные методы, такие, например, как метод конечных элементов [68; 146; 156]. Для расчета цельнокованых и сварных роторов численные методы по существу являются единственными, которые дают достаточно достоверную картину их напряженного состояния.

IX.1. МЕТОД ДВУХ РАСЧЕТОВ

Метод двух расчетов основан на использовании замкнутых решений, полученных для определенного вида профилей. При составлении расчетной схемы диск разбивается по радиусу на несколько участков, в пределах которых часть профиля диска представляет собой профиль постоянной толщины, конический или какой-либо другой, допускающий замкнутое решение основного дифференциального уравнения (VIII.5).

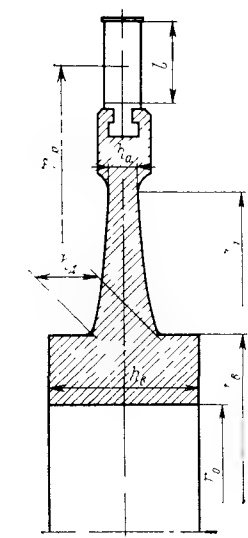


Рис. IX.1. Диск паровой турбины со втулкой и ободом

При расчете на границах между участками удовлетворяются условия сопряжения (VIII.33) и граничные условия на внешнем и внутреннем радиусах. В пределах каждого участка решение дифференциальных уравнений будет содержать две произвольные постоянные и, следовательно, при разбивке диска на i участков необходимо определить $2i$ постоянных. Для их определения имеем два граничных условия и $2(i-1)$ условий сопряжения. Так как решение системы уравнений для определения произвольных постоянных громоздко, то для вычисления напряжений в диске применяют специальный прием, который называют методом двух расчетов. Рассмотрим применение этого метода на примере расчета диска, имеющего втулку постоянной толщины и лопатно-конического профиля (рис. IX.1). Наличие обода учитывается граничным условием (VIII.7). Будем рассматривать равномерно нагретый вращающийся диск.

Напряжения во втулке могут быть вычислены по формулам (VIII.52) для профиля постоянной толщины. В пределах полотна диска ($r_b \leq r \leq r_a$, рис. IX.1) напряжения определяются

по формулам (VIII.55), полученным для конического профиля, в которых постоянные A и B вычисляются по (VIII.56). Вычисления можно вести от внутреннего радиуса (от втулки) к внешнему (к ободу) или наоборот. Рассмотрим расчет диска от втулки к ободу. Вычисления напряжений производятся с помощью двух расчетов. В первом случае вычисляются напряжения во вращающемся диске ($\omega \neq 0$). На внутреннем радиусе втулки принимаем радиальные напряжения равными заданным. Как уже отмечалось в п. VIII.2, для дисков со свободным центральным отверстием при $r = r_0$ $\sigma_r = \sigma_{r_0} = 0$, а для дисков, насаженных на вал с натягом, при $r = r_0$ $\sigma_{r_0} = -p$, где p — давление между диском и валом.

Задаемся окружными напряжениями на внутреннем радиусе втулки. Таким образом, при $r = r_0$ $\sigma_{r_0}^I = \sigma_{r_0}$, $\sigma_{\varphi_0}^I$ равно любому числу.

Зная для втулки напряжения $\sigma_{r_0}^I$ и $\sigma_{\varphi_0}^I$ на внутреннем радиусе, можем по формулам (VIII.52) вычислить напряжения $\sigma_{r_b}^I$ и $\sigma_{\varphi_b}^I$ на внешнем радиусе ($r = r_b$):

$$\sigma_{r_b}^I = (1 - \lambda) \sigma_{r_0}^I + \lambda \sigma_{\varphi_0}^I + \beta \Omega(r_0);$$

$$\sigma_{\varphi_b}^I = \lambda \sigma_{r_0}^I + (1 - \lambda) \sigma_{\varphi_0}^I + \delta \Omega(r_0),$$

где $\Omega(r_0) = \frac{\gamma \omega^2}{g} r_0^2$, а λ , β и δ определяются по кривым (см. рис. VIII.8 и VIII.10) в зависимости от r_b/r_0 или по формулам (VIII.52).

Из условий сопряжения (VIII.34) найдем напряжения на внутреннем радиусе полотна диска ($r = r_b$):

$$\sigma_{r_d}^I = \sigma_{r_b}^I (h_b/h_d); \quad \sigma_{\varphi_d}^I = \sigma_{\varphi_b}^I + \nu(h_b/h_d - 1) \sigma_{r_b}^I.$$

По формулам (VIII.55) вычислим напряжения на внешнем радиусе конического полотна ($r = r_a$):

$$\sigma_{r_a}^I = A p_1 + B p_2 + \Omega_k p_c,$$

$$\sigma_{\varphi_a}^I = A q_1 + B q_2 + \Omega_k q_c,$$

где $p_1, \dots, q_c$ определяются по табл. VIII.1 в зависимости от r_a/R ; A и B вычисляются по формулам (VIII.56) при $p'_1, \dots, q'_c$, определенным по табл. VIII.1 в зависимости от r_b/R .

При втором расчете рассматриваем невращающийся диск ($\omega = 0$). На внутреннем радиусе втулки радиальные напряжения принимаем равными нулю, а окружные — любому числу, не равному нулю, т. е. при $r = r_0$, $\sigma_{r_0}^{II} = 0$, $\sigma_{\varphi_0}^{II}$ равно любому числу, не равному нулю. Аналогично предыдущему найдем

напряжения на внешнем радиусе полотна диска ($r = r_a$): $\sigma_{r_a}^I$ и $\sigma_{\varphi_a}^{II}$. Составляем выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^I + k\sigma_r^{II}; \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi^I + k\sigma_\varphi^{II}, \end{aligned} \right\} \quad (IX.1)$$

где индексом I обозначены напряжения, полученные при первом расчете ($\omega \neq 0$), а индексом II — при втором ($\omega = 0$); k — постоянная, которую нужно определить.

Как показано в п VIII 3, выражения (IX.1) являются решением дифференциальных уравнений для вращающегося диска. При этом на внутреннем радиусе диска ($r = r_0$) $\sigma_r = \sigma_{r_0}$, т. е. граничное условие здесь выполнено. Так как σ_r^I и σ_r^{II} , а также σ_φ^I и σ_φ^{II} удовлетворяют условиям сопряжения в месте стыка полотна диска со втулкой, то этим же условиям удовлетворяют и σ_r и σ_φ . Для полного решения задачи необходимо удовлетворить граничному условию на внешнем радиусе диска.

Граничное условие на внешнем радиусе ($r = r_a$) полотна диска удовлетворим выбором соответствующего значения k . Из (IX.1) при $r = r_a$ имеем:

$$\sigma_{r_a} = \sigma_{r_a}^I + k\sigma_{r_a}^{II}; \quad \sigma_{\varphi_a} = \sigma_{\varphi_a}^I + k\sigma_{\varphi_a}^{II}.$$

Подставив в граничное условие (VIII.7), получим уравнение для определения k :

$$\sigma_{r_a}^I + k\sigma_{r_a}^{II} = \sigma'_{r_a} - \frac{F_H}{h_a r_a} (\sigma_{\varphi_a}^I + k\sigma_{\varphi_a}^{II}).$$

Найдя k , можем вычислить напряжения в любой точке диска по формулам (IX.1).

Рассмотрим теперь расчет диска от обода к втулке. Аналогично предыдущему вычислений напряжений производим методом двух расчетов. При первом расчете вычисляем напряжения во вращающемся диске. Задаем на внешнем радиусе полотна диска ($r = r_a$) произвольное значение $\sigma_{\varphi_a}^I$ и из граничного условия (VIII.7) вычисляем

$$\sigma_{r_a}^I = \sigma'_{r_a} - \frac{F_H}{h_a r_a} \sigma_{\varphi_a}^I. \quad (IX.2)$$

Можно задавать, наоборот, произвольное значение $\sigma_{r_a}^I$ и из (VIII.7) вычислять $\sigma_{\varphi_a}^I$. Зная напряжения $\sigma_{r_a}^I$ и $\sigma_{\varphi_a}^I$ на внешнем радиусе конического полотна диска, по формулам (VIII.55) найдем напряжения $\sigma_{r_d}^I$ и $\sigma_{\varphi_d}^I$ в месте стыка полотна с втулкой ($r = r_b$):

$$\begin{aligned} \sigma_{r_d}^I &= A p_1 + B p_2 + \Omega_k p_c; \\ \sigma_{\varphi_d}^I &= A q_1 + B q_2 + \Omega_k q_c, \end{aligned}$$

где $p_1, \dots, q_c$ определяются по табл. VIII.1 в зависимости от r_b/R ; A и B вычисляются по формулам (VIII.56) при $p'_1, \dots, q'_c$, определенным по табл. VIII.1 в зависимости от r_a/R .

Напряжения на внешнем радиусе втулки определяются условиями сопряжения (VIII.34):

$$\sigma_{r_b}^I = (h_d/h_b) \sigma_{r_d}^I; \quad \sigma_{\varphi_b}^I = \sigma_{\varphi_d}^I + (h_d/h_b - 1) \sigma_{r_d}^I.$$

По формулам (VIII.52) вычисляем напряжения на внутреннем радиусе втулки ($r = r_0$):

$$\sigma_{r_0}^I = (1 - \lambda) \sigma_{r_b}^I + \lambda \sigma_{\varphi_b}^I + \beta \Omega(r_b);$$

$$\sigma_{\varphi_0}^I = \lambda \sigma_{r_b}^I + (1 - \lambda) \sigma_{\varphi_b}^I + \delta \Omega(r_b),$$

где $\Omega(r_b) = \frac{\gamma \omega^2}{g} r_b^2$, а λ , β и δ определяются по кривым рис. VIII.8 и VIII.10 в зависимости от r_0/r_b или по формулам (VIII.52).

При втором расчете рассматриваем невращающийся диск ($\omega = 0$). Задаем на внешнем радиусе полотна диска ($r = r_a$) произвольное значение (не равное нулю) $\sigma_{\varphi_a}^{II}$ (или $\sigma_{r_a}^{II}$). Из граничного условия (VIII.9) вычисляем $\sigma_{r_a}^{II}$ (или $\sigma_{\varphi_a}^{II}$)

$$\sigma_{r_a}^{II} = - \frac{F_H}{h_a r_a} \sigma_{\varphi_a}^{II}. \quad (IX.3)$$

Произведя расчет диска подобно предыдущему, найдем на внутреннем радиусе втулки ($r = r_0$) $\sigma_{r_0}^{II}$ и $\sigma_{\varphi_0}^{II}$. Составляем выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^{II} + k\sigma_r^{II}; \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi^I + k\sigma_\varphi^{II}. \end{aligned} \right\} \quad (IX.4)$$

Как показано выше, (IX.4) является решением дифференциальных уравнений для вращающегося диска. Так как $\sigma_{r_a}^I$ и $\sigma_{\varphi_a}^I$ удовлетворяют граничному условию (IX.2), а $\sigma_{r_a}^{II}$ и $\sigma_{\varphi_a}^{II}$ — условию (IX.3), то

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_a} &= \sigma_{r_a}^I + k\sigma_{r_a}^{II}; \\ \sigma_{\varphi_a} &= \sigma_{\varphi_a}^I + k\sigma_{\varphi_a}^{II} \end{aligned} \right\} \quad (IX.4a)$$

также удовлетворяют граничному условию на внешнем радиусе диска (VIII.7). Нетрудно видеть, что σ_r и σ_φ удовлетворяют и условиям сопряжения в месте стыка полотна диска с втулкой.

Постоянная k определяется из граничного условия на внутреннем радиусе диска ($r = r_0$), где имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_0} &= \sigma_{r_0}^I + k\sigma_{r_0}^{II}; \\ \sigma_{\varphi_0} &= \sigma_{\varphi_0}^I + k\sigma_{\varphi_0}^{II} \end{aligned} \right\} \quad (IX.4b)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи граничных условий на внутреннем радиусе диска.

1. На внутренней поверхности центрального отверстия задано давление между диском и валом при расчетной частоте вращения, равное $-p$. В этом случае при $r = r_0$ $\sigma_{r0} = -p$. Тогда

$$\sigma_{r0}^I + k\sigma_{r0}^{II} = -p,$$

откуда

$$k = (-p - \sigma_{r0}^I) / \sigma_{r0}^{II}. \quad (IX.5)$$

В частном случае при $p = 0$ имеем свободно вращающийся диск, для которого

$$\sigma_{r0} = 0 \quad \text{и} \quad k = -\sigma_{r0}^I / \sigma_{r0}^{II}. \quad (IX.6)$$

Зная k , можем вычислить напряжения по (IX.4) в любой точке диска, а по формуле (VIII.26) — натяг, с которым диск должен быть посажен на вал,

$$\Delta = 2r_0 (\sigma_{\varphi 0} + Cp - D) / E. \quad (IX.7)$$

Здесь принято, что диск нагревается равномерно и разностью между температурными перемещениями диска и вала можно пренебречь.

Далее определяем освобождающее число оборотов диска по формуле (VIII.29)

$$n^* = n \sqrt{\frac{E\Delta}{2r_0 (\sigma_{\varphi 0} - D)}}, \quad (IX.8)$$

для чего предварительно находим напряжения на внутреннем радиусе свободно вращающегося диска $\sigma_{\varphi 0} = \sigma_{\varphi 0}^I + k\sigma_{\varphi 0}^{II}$, определив для этого постоянную k по (IX.6).

2. Задан натяг между диском и валом. Для определения постоянной k используем условие (IX.7). Подставляя (IX.4б) в это условие, получим уравнение относительно k

$$\sigma_{\varphi 0}^I + k\sigma_{\varphi 0}^{II} - C(\sigma_{r0}^I + k\sigma_{r0}^{II}) - D = E\Delta / (2r_0),$$

откуда

$$k = \frac{E\Delta / (2r_0) + D + C\sigma_{r0}^I + \sigma_{\varphi 0}^I}{\sigma_{\varphi 0}^{II} - C\sigma_{r0}^{II}}. \quad (IX.9)$$

Зная k , находим напряжения в любой точке диска и далее освобождающее число оборотов по формуле (IX.8), определив предварительно k по (IX.6) и напряжения на внутреннем радиусе свободно вращающегося диска $\sigma_{\varphi 0} = \sigma_{\varphi 0}^I + k\sigma_{\varphi 0}^{II}$.

3. Задано освобождающее число оборотов n^* . В этом случае необходимо предварительно вычислить напряжения на внутреннем радиусе свободно вращающегося диска $\sigma_{\varphi 0}$, как указывалось выше. Используя формулу (IX.8), находим натяг

$$\Delta = \frac{2r_0 (\sigma_{\varphi 0} - D)}{E} \left(\frac{n^*}{n} \right)^2. \quad (IX.10)$$

Зная натяг, по формуле (IX.9) вычисляем k , а по (IX.4) — напряжения в любой точке диска.

4. Приведем в заключение формулы для вычисления напряжений в невращающемся диске от посадки на вал с натягом.

Граничное условие в соответствии с (VIII.30) в этом случае имеет вид

$$\Delta = \frac{2r_0}{E} (\sigma_{\varphi 0}^H - C\sigma_{r0}^H). \quad (IX.11)$$

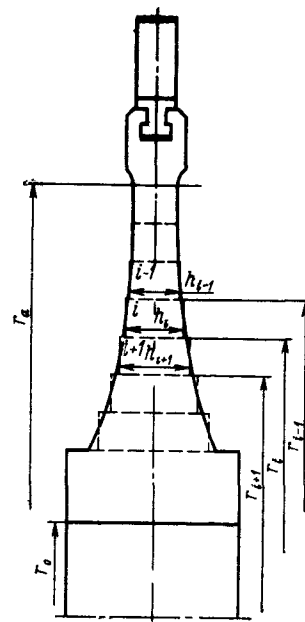


Рис. IX.2. Представление профиля диска рядом профилей постоянной толщины

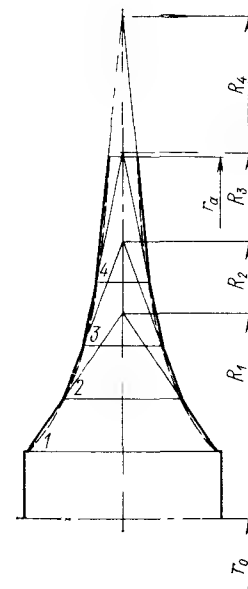


Рис. IX.3. Представление профиля диска рядом конических профилей

Используем только результаты расчета невращающегося диска ($\omega = 0$): σ_r^{II} и σ_{φ}^{II} . Составим выражения:

$$\sigma_r^H = k\sigma_r^{II}; \quad \sigma_{\varphi}^H = k\sigma_{\varphi}^{II}. \quad (IX.12)$$

Напряжения σ_r^H и σ_{φ}^H удовлетворяют граничному условию (IX.3) на внешнем радиусе и условиям сопряжения. Тогда, подставив (IX.12) в граничное условие (IX.11), получим уравнение относительно k , откуда найдем

$$k = \frac{E\Delta}{2r_0 (\sigma_{\varphi 0}^{II} - C\sigma_{r0}^{II})}. \quad (IX.13)$$

Далее по формулам (IX.12) можем вычислить напряжения в любой точке невращающегося диска.

Таким образом, в результате двух расчетов могут быть определены действующие в диске напряжения.

Если полотно диска представляет собой не конический профиль, как это рассмотрено выше, а какой-либо другой, например профиль постоянной толщины, то при расчете на данном участке нужно использовать формулы, соответствующие этому профилю.

Если полотно диска образовано любой кривой, то, представляя профиль диска в виде ряда конических профилей (с радиусами полных конусов $R_1 \dots R_4$) или профилей постоянной толщины, сопряженных между собой (рис. IX.2 и IX.3), можно указанным методом выполнить расчет диска любого произвольного профиля. При этом в местах стыка отдельных участков должны выполняться условия сопряжения (VIII.33), а на внешнем и внутреннем радиусах — соответствующие граничные условия.

IX.2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Решение задачи для диска произвольного профиля с учетом неравномерного нагрева и при переменных параметрах упругости может быть получено только приближенно, например методом последовательных приближений. В этом случае более эффективным представляется способ решения задачи с использованием системы дифференциальных уравнений (VIII.1) и (VIII.1a) [83]. Запишем уравнение (VIII.1a) в следующем виде:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r\sigma_\varphi}{E} \right) + \frac{\nu}{r} \left(\frac{r\sigma_r}{E} \right) = \frac{d}{dr} \left(\nu \frac{r\sigma_r}{E} \right) + \frac{\sigma_r}{E} - r \frac{d(\alpha T)}{E}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое в сокращенной форме можно представить так:

$$\frac{dy}{dr} + p(r)y = f(r), \quad (IX.14)$$

где

$$y = r\sigma_\varphi/E; \quad p(r) = \nu/r; \\ f(r) = \frac{d}{dr} \left(\nu \frac{r\sigma_r}{E} \right) + \frac{\sigma_r}{E} - r \frac{d(\alpha T)}{dr}.$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений [159], общий интеграл уравнения (IX.14)

$$y = \exp \left[- \int_{r_0}^r p(r) dr \right] \left\{ \int_{r_0}^r f(r) \exp \left[\int_{r_0}^r p(r) dr \right] dr + C \right\},$$

где C — постоянная интегрирования.

Примем, что коэффициент Пуассона $\nu = \text{const}$ и не зависит от температуры. Тогда

$$\exp \left[\int_{r_0}^r p(r) dr \right] = \exp \left(\nu \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} \right) = \exp [\nu \ln r - \nu \ln r_0] = \left(\frac{r}{r_0} \right)^\nu.$$

Заменив в общем интеграле $y(r)$, $p(r)$ и $f(r)$ их выражениями и проведя несложные преобразования, получим

$$\sigma_\varphi = \nu \sigma_r + \frac{(1-\nu^2)E}{r^{1+\nu}} \int_{r_0}^r \frac{\sigma_r}{E} r^\nu dr + \theta(r) + A \frac{E}{r^{1+\nu}}, \quad (IX.15)$$

где

$$\theta(r) = \frac{(1+\nu)E}{r^{1+\nu}} \int_{r_0}^r (\alpha T) r^\nu dr - E\alpha T,$$

$$A = C - \frac{\nu}{E_0} r_0^{1+\nu} \sigma_{r_0} + (\alpha T)_{r_0} r_0^{1+\nu},$$

$$(\alpha T)_0 = \alpha(r_0) T(r_0) \text{ и } E_0 = E(r_0).$$

Уравнение (VIII.1) запишем в виде

$$\frac{d(h\sigma_r)}{dr} = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{r} h - \frac{\gamma \omega^2}{g} hr.$$

Откуда, интегрируя, найдем

$$\sigma_r = \frac{1}{h} \int_{r_0}^r \frac{h}{r} (\sigma_\varphi - \sigma_r) dr - \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{1}{h} \int_{r_0}^r hr dr + \frac{h_0}{h} \sigma_{r_0},$$

где σ_{r_0} — неизвестное напряжение на внутреннем радиусе диска. Используя уравнение (IX.15), образуем разность

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = - (1-\nu) \sigma_r + \frac{(1-\nu^2)E}{r^{1+\nu}} \int_{r_0}^r \frac{\sigma_r}{E} r^\nu dr + \theta(r) + A \frac{E}{r^{1+\nu}}.$$

Подставляя эту разность в выражение для σ_r , получим

$$\sigma_r = \frac{1}{h} \int_{r_0}^r \frac{h}{r} \left[\frac{(1-\nu^2)E}{r^{1+\nu}} \int_{r_0}^r \frac{\sigma_r}{E} r^\nu dr - (1-\nu) \sigma_r \right] dr + \\ + \frac{1}{h} \int_{r_0}^r \frac{h}{r} \theta(r) dr - \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{1}{h} \int_{r_0}^r hr dr + A \frac{1}{h} \int_{r_0}^r \frac{h}{r^{2+\nu}} dr + \frac{h_0}{h} \sigma_{r_0}. \quad (IX.16)$$

Уравнения (IX.15) и (IX.16) представляют собой систему двух линейных неоднородных интегральных уравнений, решение которых может быть получено методом последовательных приближений [83].

Прежде чем излагать суть метода последовательных приближений, выполним некоторые преобразования полученной системы. Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} N(r) &= \frac{1}{h} \int_{r_0}^r \frac{h}{r} \left[\frac{(1-\nu^2)E}{r^{1+\nu}} \int_{r_0}^r \frac{\sigma_r}{E} r^\nu dr - (1-\nu)\sigma_r \right] dr; \\ M(r) &= \frac{(1-\nu^2)E}{r^{1+\nu}} \int_{r_0}^r \frac{\sigma_r}{E} r^\nu dr + \nu\sigma_r; \\ K(r) &= \frac{1}{h} \left[\int_{r_0}^r \frac{h}{r} \theta(r) dr - \frac{\gamma\omega^2}{g} \int_{r_0}^r hr dr \right]; \\ I(r) &= \frac{1}{h} \int_{r_0}^r \frac{Eh}{r^{2+\nu}} dr. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX } 17)$$

Тогда система уравнений (IX.15) и (IX.16) запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= N(r) + K(r) + AI(r) + \frac{h_0}{h} \sigma_{r_0}; \\ \sigma_\varphi &= M(r) + \theta(r) + A \frac{F}{r^{1+\nu}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX } 18)$$

Постоянные A и σ_{r_0} должны быть определены из граничных условий на внешнем и внутреннем радиусах диска.

Из условия (VIII 7) на внешнем радиусе диска ($r = r_a$) имеем:

$$\begin{aligned} N(r_a) + K(r_a) + AI(r_a) + \frac{h_0}{h_a} \sigma_{r_0} &= \\ &= \sigma'_{ra} - \frac{F_H}{h_a r_a} \left[M(r_a) + \theta(r_a) + A \frac{E_a}{r_a^{1+\nu}} \right], \end{aligned}$$

где $E_a = E(r_a)$.

Откуда находим:

$$\begin{aligned} A &= A' - A''\sigma_{r_0}; \\ A' &= \frac{\left[\sigma'_{ra} - K(r_a) - \frac{F_H}{h_a r_a} \theta(r_a) \right] - N(r_a) - \frac{F_H}{h_a r_a} M(r_a)}{I(r_a) + \frac{F_H E_a}{h_a r_a^{2+\nu}}}; \quad (\text{IX } 19) \\ A'' &= \frac{h_0/h_a}{I(r_a) + \frac{F_H E_a}{h_a r_a^{2+\nu}}}. \end{aligned}$$

Постоянная σ_{r_0} определяется из граничного условия на внутреннем радиусе диска. Рассмотрим некоторые частные случаи граничных условий на внутреннем радиусе ($r = r_0$).

1. На внутреннем радиусе задано давление между диском и валом при расчетной частоте вращения, равное ($-p$). В этом случае при $r = r_0$ в соответствии с (IX.17)

$$N(r_0) = K(r_0) = I(r_0) = 0,$$

и из (IX 18) получим

$$\sigma_{r_0} = -p \quad (\text{IX } 20)$$

В частном случае при $r = 0$ имеем свободно вращающийся диск, для которого

$$\sigma_{r_0} = 0. \quad (\text{IX } 20a)$$

Вычислив по уравнениям (IX.18) напряжения в диске, можем найти необходимый натяг, используя условие (VIII 26),

$$\Delta = 2r_0(\sigma_{\varphi 0} - C\sigma_{r_0} - D)/E_0 + \Delta_T$$

По формуле (VIII 28) вычисляем освобождающее число оборотов, соответствующее найденному натягу. Для этого предварительно необходимо подсчитать напряжения на внутреннем радиусе свободно вращающегося равномерно нагретого диска при рабочей частоте вращения $\sigma_{\varphi\omega}$ и температурные напряжения в свободном невращающемся диске $\sigma_{\varphi T}$.

При вычислении $\sigma_{\varphi\omega}$ нужно положить $T(r) = 0$. Температурные напряжения $\sigma_{\varphi T}$ вычисляются при $\omega = 0$. На внутреннем радиусе в том и другом случаях должно выполняться условие (IX.20a).

2. Задан натяг Δ между диском и валом. В этом случае на внутреннем радиусе используем условие (VIII 26). Учитывая, что при $r = r_0$

$$\begin{aligned} N(r_0) &= K(r_0) = I(r_0) = 0; \quad M(r_0) = \nu\sigma_{r_0}; \\ \theta(r_0) &= -E(r_0)\alpha(r_0)T(r_0) = -(E\alpha T)_0. \end{aligned}$$

Из (VIII 26) получим

$$\begin{aligned} \nu\sigma_{r_0} - (E\alpha T)_0 + (A' - A''\sigma_{r_0})(E_0/r_0^{1+\nu}) - C\sigma_{r_0} - D &= \\ &= (\Delta - \Delta_T)(E_0/2r_0) \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\sigma_{r_0} = \frac{(\Delta - \Delta_T)(E_0/2r_0) + D + (E\alpha T)_0 - A'(E_0/r_0^{1+\nu})}{\nu - C - A''(E_0/r_0^{1+\nu})}. \quad (\text{IX } 21)$$

Освобождающее число оборотов в соответствии с заданным натягом можно вычислить, как указывалось выше, по формуле (VIII.28).

3. При заданном освобождающем числе оборотов n^* предварительно нужно найти напряжения на внутреннем радиусе свободно вращающегося равномерно нагретого диска при рабочей частоте вращения $\sigma_{\varphi\omega}$ и температурные напряжения $\sigma_{\varphi T}$ на этом же радиусе в свободном невращающемся диске при заданном законе

изменения температуры. Затем, используя формулу (VIII.28), находим натяг, соответствующий заданному освобождающему числу оборотов,

$$\Delta = \frac{2r_0(\sigma_{\Phi 0} - D)}{E_0} \left(\frac{n^*}{n} \right)^2 + \frac{2r_0}{E_0} \sigma_{\Phi T} + \Delta_T. \quad (\text{IX.22})$$

Далее напряжения вычисляются в последовательности, указанной для расчета диска при заданном натяге.

4. Для вычисления напряжений в невращающемся диске, вызванных посадкой его на вал с натягом и заданным температурным полем, необходимо в расчетных уравнениях положить $\omega = 0$. Кроме того, в формуле (IX.19) будут равны нулю напряжения от центробежных сил обода и лопаток: $\sigma'_{ra} = 0$.

5. Для сплошного диска в соответствии с условием (VIII.12) при $r = 0$ $\sigma_{r0} = \sigma_{\Phi 0}$. Однако при $r = 0$ расчетные уравнения (IX.18) будут иметь особенность вида 0/0. Во избежание этого будем рассматривать диск с фиктивным отверстием малого радиуса ($r_0 \ll 0,01 r_a$), на контуре которого будет выполняться условие (VIII.12). Тогда в соответствии с этим условием в центре диска имеем

$$\sigma_{r0} = \nu \sigma_{\Phi 0} - (E\alpha T)_0 + (A' - A''\sigma_{r0})(E_0/r_0^{1+\nu}),$$

откуда находим

$$\sigma_{r0} = \frac{A'(E_0/r_0^{1+\nu}) - (E\alpha T)_0}{1 - \nu + A''(E_0/r_0^{1+\nu})}. \quad (\text{IX.23})$$

Рассмотрим метод последовательных приближений, для чего уравнения (IX.18) представим в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(k)} &= N_{k-1}(r) + A_{k-1}I(r) + \frac{h_0}{h} \sigma_{r0}^{(k-1)} + K(r), \\ \sigma_{\Phi}^{(k)} &= M_{k-1}(r) + A_{k-1} \frac{E}{r^{1+\nu}} + \theta(r), \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.24})$$

где

$$\left. \begin{aligned} N_{k-1}(r) &= \frac{1}{h} \int_{r_0}^r \frac{h}{r} \left[\frac{(1-\nu^2)E}{r^{1+\nu}} \int_{r_0}^r \frac{\sigma_r^{(k-1)}}{E} r^{\nu} dr - \right. \\ &\quad \left. - (1-\nu) \sigma_r^{(k-1)} \right] dr; \\ M_{k-1}(r) &= \frac{(1-\nu^2)E}{r^{1+\nu}} \int_{r_0}^r \frac{\sigma_r^{(k-1)}}{E} r^{\nu} dr + \nu \sigma_r^{(k-1)}; \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.25})$$

$$A_{k-1} = A'_{k-1} - A''\sigma_{r0}^{(k-1)}; \quad (\text{IX.26})$$

$$A'_{k-1} = \frac{\left[\sigma'_{ra} - K(r_a) - \frac{F_H}{h_a r_a} \theta(r_a) \right] - N_{k-1}(r_a) - \frac{F_H}{h_a r_a} M_{k-1}(r_a)}{I(r_a) + \frac{F_H E_a}{h_a r_a^{2+\nu}}};$$

$$A' = \frac{h_0/h_a}{I(r_a) + F_H E_a / h_a r_a^{2+\nu}};$$

для диска с заданным давлением на поверхности центрального отверстия

$$\sigma_{r0}^{(k-1)} = -p = \text{const}; \quad (\text{IX.27})$$

для диска с заданным натягом

$$\sigma_{r0}^{(k-1)} = \frac{(\Delta - \Delta_l)(E_0/2r_0) + D + (E\alpha T)_0 - A'_{k-1}F_0/r_0^{1+\nu}}{\nu - C - A'E_0/r_0^{1+\nu}}; \quad (\text{IX.28})$$

для сплошного диска

$$\sigma_{r0}^{(k-1)} = \frac{A'_{k-1}(E_0/r_0^{1+\nu}) - (E\alpha T)_0}{1 - \nu + A''(E_0/r_0^{1+\nu})}. \quad (\text{IX.29})$$

Рассмотрим вычисление напряжений в диске при заданном давлении на поверхности центрального отверстия $\sigma_{r0} = -p$. В исходном нулевом приближении полагаем $\sigma_r^{(0)} = 0$. Тогда по (IX.25) $N_0(r) = M_0(r) = 0$, а постоянная A_0 вычисляется по формуле (IX.26) и равна

$$A_0 = \frac{\left[\sigma'_{ra} - K(r_a) - \frac{F_H}{h_a r_a} \theta(r_a) \right]}{I(r_a) + \frac{F_H E_a}{h_a r_a^{2+\nu}}}.$$

По уравнениям (IX.24) находим первое приближение для напряжений $\sigma_r^{(1)}$ и $\sigma_{\Phi}^{(1)}$.

В следующем приближении по (IX.25) вычисляем $N_1(r)$ и $M_1(r)$; постоянную A_1 находим по формуле (IX.26), а по уравнениям (IX.24) напряжения во втором приближении $\sigma_r^{(2)}$ и $\sigma_{\Phi}^{(2)}$ и т. д. Вычисления проводятся до тех пор, пока не будут выполнены условия, выбранные для установления точности расчета, например,

$$\left| \frac{\sigma_r^{(k)} - \sigma_r^{(k-1)}}{\sigma_r^{(k-1)}} \right| 100\% \leq \delta\% \quad (\text{IX.30})$$

или

$$\left| \frac{\sigma_i^{(k)} - \sigma_i^{(k-1)}}{\sigma_i^{(k-1)}} \right| 100\% \leq \delta\%, \quad (\text{IX.31})$$

где $\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\phi^2 - \sigma_r \sigma_\phi}$, σ_i — интенсивность напряжений; δ — погрешность вычисления, принимаемая обычно не более 1%.

Если напряжения в диске определяются при заданном натяге, то, как и выше, в исходном приближении полагаем $\sigma_r^{(0)} = 0$. Тогда в соответствии с (IX.25) $N_0(r) = M_0(r) = 0$, постоянная A , вычисляется по формуле (IX.26)

$$A_0 = \frac{\sigma'_{ra} - K(r_a) - \frac{F_H}{h_a r_a} \theta(r_a)}{I(r_a) + \frac{F_H E_a}{h_a r_a^{2+\nu}}},$$

а постоянная $\sigma_{r0}^{(0)}$ — по формуле (IX.28)

$$\sigma_{r0}^{(0)} = \frac{(\Delta - \Delta_T)(E_0/2r_0) + D + (E\alpha T)_0 - A_0'(E_0/r_0^{1+\nu})}{\nu - C - A''(E_0/r_0^{1+\nu})}.$$

По уравнениям (IX.24) находим напряжения в первом приближении $\sigma_r^{(1)}$ и $\sigma_\phi^{(1)}$. В следующем приближении по (IX.25) вычисляем $N_1(r)$ и $M_1(r)$, а по (IX.26) и (IX.28) — постоянную A_1 и напряжения на внутреннем радиусе $\sigma_{r0}^{(1)}$. По уравнениям (IX.24) находим напряжения $\sigma_r^{(2)}$ и $\sigma_\phi^{(2)}$ во втором приближении и т. д. до выполнения условия, определяющего точность вычислений.

Аналогичным образом вычисляются напряжения и в сплошном диске.

Проведенные расчеты показывают быструю сходимость указанного метода последовательных приближений. Интегралы при расчете диска вычисляются численно. Для этого диск по радиусу разбивается на ряд участков с интерполяцией на этих участках ширины профиля $h(r)$, температуры $T(r)$, модуля упругости $E(r)$ и коэффициента линейного расширения $\alpha(r)$.

Из сопоставления результатов расчета дисков методом двух расчетов и методом последовательных приближений следует, что напряжения, полученные одним и другим методом, практически совпадают.

IX.3. ОБЪЕМНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ДИСКАХ

При выводе основных уравнений для тонкого диска предполагалось, что деформации и напряжения распределены по его толщине в осевом направлении равномерно. Однако диски паровых турбин, как правило, имеют втулку, осевые размеры которой существенно превосходят толщину полотна. В этом случае напряжения и деформации во втулке в осевом направлении будут распределены неравномерно. Так, радиальные перемещения на внутреннем радиусе втулки у ее края значительно меньше, чем перемещения в средней части (рис. IX.4). Подобная неравномерность имеет место и в распределении напряжений. Из кривых, показанных

на рис. IX.4, видно, что окружные напряжения имеют максимальные значения в средней части втулки и существенно уменьшаются на краях. Кроме того, указанная неравномерность распределения радиальных перемещений в диске приводит к возникновению осевых напряжений, которые на внутреннем радиусе втулки могут достигать относительно больших значений. Существенная неравномерность распределения напряжений по ширине диска будет иметь место и в зоне сопряжения втулки с полотном. Здесь уже не будет выполняться условие, полученное при рассмотрении тонких дисков, заключающееся в том, что радиальные напряжения в местах стыка втулки и полотна обратно пропорциональны их осевым размерам. Большое влияние на напряженное состояние диска в этой зоне оказывает концентрация напряжений.

Таким образом, в турбинных дисках при развитой ширине втулки напряженно-деформированное состояние отличается от плоского и представляет собой трехосное осесимметричное напряженное состояние.

Решение осесимметричной задачи теории упругости для турбинных дисков может быть получено только приближенными численными методами, к которым относятся вариационно-разностный метод, метод конечных элементов и др. [36, 59, 68]. Наиболее эффективным и универсальным, получившим широкое распространение в расчетной практике за последние годы, является метод конечных элементов. Идея этого метода заключается в численной минимизации энергетического функционала, записанного обычно в перемещениях для рассматриваемой области с учетом действующих внешних нагрузок, температурного поля, переменных параметров упругости при соответствующих краевых условиях. В общем случае этот энергетический функционал может быть записан в виде

$$\Pi = W - A, \quad (\text{IX.32})$$

где W — потенциальная энергия упругодеформированного тела; A — работа внешних сил.

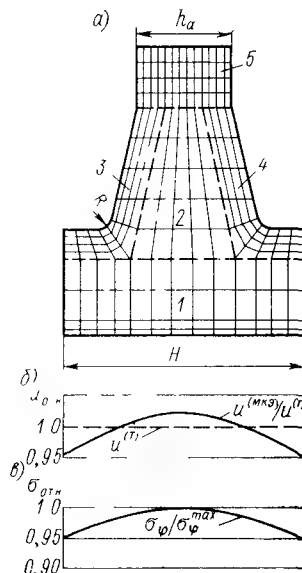


Рис IX.4 К расчету диска методом конечных элементов:

а — расчетная сеточная область, б — неравномерность радиальных перемещений по ширине втулки ($u^{(mkz)}$ — перемещения, вычисленные методом конечных элементов; $u(r)$ — перемещения, вычисленные по схеме тонкого диска), в — распределение окружных напряжений на внутреннем радиусе втулки

Реализация метода конечных элементов, как известно, включает в себя три основных этапа.

На первом этапе выбирается схема конечных элементов с заданием их формы, необходимой для дискретизации расчетной области, и функций, аппроксимирующих искомые перемещения внутри конечного элемента. Выбор схемы конечного элемента определяет структуру матрицы жесткости и точность расчета при достаточно редкой сеточной области. Конечные элементы, применяемые при решении осесимметричных задач, имеют кольцевую форму с произвольным трехугольным или четырехугольным сечением при линейном обычно законе аппроксимации неизвестных по двум направлениям.

На втором этапе производится выбор метода решения системы алгебраических уравнений. Обычно для этой цели применяются прямые и итерационные методы [185]. Наибольшее распространение получили метод Гаусса, метод сопряженных градиентов и релаксационные методы. Эффективность того или другого метода зависит от структуры матрицы жесткости, полученной на первом этапе реализации метода конечных элементов.

На третьем (последнем) этапе производится вычисление деформаций и напряжений в точках рассматриваемой области. Напряжения могут быть вычислены непосредственно в узлах сеточной области или в центрах конечных элементов.

К настоящему времени разработан целый ряд различных алгоритмов и программ реализации на ЭВМ метода конечных элементов применительно к решению осесимметричных задач теории упругости, например в [15, 50; 158]. Так, алгоритм, включенный в систему математического обеспечения расчетов пространственных конструкций «Прочность-75», разработанный в Киевском инженерно-строительном институте, основан на применении моментной схемы конечного элемента [154, 158]. Получаемая ленточная симметричная матрица жесткости допускает решение алгебраической системы так называемым модифицированным блочным методом Гаусса [74]. Дискретизация осесимметричного тела достигается применением кольцевых конечных элементов, которые имеют в сечении форму произвольных четырехугольников. При моделировании криволинейного контура в зонах галтелей могут быть использованы криволинейные четырехугольники. Криволинейные стороны таких четырехугольников аппроксимируются параболами или сплайновыми кривыми. При составлении программы для указанного алгоритма разработан проблемно-ориентированный язык, позволяющий максимально автоматизировать задание входной информации, формирование и решение системы уравнений, способы обработки промежуточных и окончательных результатов.

При дискретизации области, занимаемой конструкцией, сначала выполняется разбивка ее на небольшое количество подобластей стандартного вида (фрагментов), внутри которых дальнейшее

деление на конечные элементы выполняет ЭВМ по заранее заданным для каждого типа фрагментов алгоритмам. Одновременно вычисляются топологические, метрические и физико-механические характеристики каждого элемента. На рис IX 4 представлено сечение диска, разбитого на пять фрагментов (указаны цифрами), внутри которых нанесена расчетная сетка заданной густоты. Идея фрагментации конструкции позволяет существенно повысить возможности метода конечных элементов по автоматизации операции при общем и локальном сущении сетки с выделением и независимым расчетом зон конструкции, содержащих концентраторы, с применением для этого варианта динамического распределения памяти ЭВМ. Результаты расчетов в виде перемещений выдаются в узлах расчетной сетки, а напряжения вычисляются в центре каждого конечного элемента. Для повышения точности вычисления напряжений на контуре рассматриваемой области предусмотрено выделение приграничной зоны со сгущенной сеткой.

Рассмотрим далее некоторые особенности объемного напряженного состояния турбинных дисков, выявленные в результате расчетных исследований¹. Расчеты выполнялись для равномерно нагретых свободно вращающихся дисков, имеющих втулку и полотно постоянной толщины.

Выше отмечалось, что если осевые размеры втулки существенно превосходят толщину полотна, то напряжения по ширине втулки будут распределяться неравномерно. Окружные напряжения, которые обычно определяют прочность диска, имеют в этом случае максимальные значения в средней части втулки и минимальные по краям. Степень неравномерности распределения напряжений зависит в основном от двух параметров относительной ширины втулки (H/h) и относительной высоты $[(r_v - r_0)/h]$ — рис IX 5.

На рис IX 5 приведены кривые, определяющие степень неравномерности распределения окружных напряжений в зависимости от указанных параметров. Как следует из кривых, при относительно большой ширине втулки ($H/h \geq 3$) и малой ее высоте $[(r_v - r_0)/h \leq 1,0]$ напряжения на краях могут оказаться более чем на 20% ниже напряжений в средней части. При большой высоте втулки $[(r_v - r_0)/h \geq 3]$ неравномерность распределения

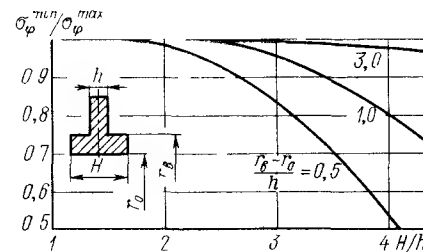


Рис IX 5 Степень неравномерности окружных напряжений на внутреннем радиусе втулки в зависимости от ее геометрических параметров

¹ Расчеты дисков методом конечных элементов выполнены по программе Киевского инж.-строит. инст. [158] канд. физ.-мат. наук М. А. Ковалевским и инж. С. А. Тихомировым.

напряжений практически отсутствует. Расчеты показывают, что с ростом ширины и высоты втулки максимальные окружные напряжения в диске снижаются. Степень этого снижения по отношению к напряжениям на внутреннем радиусе диска постоянной толщины ($H/h = 1$) представлена кривыми, приведенными на рис. IX.6. Из кривых следует, что, увеличивая размеры втулки, можно существенно снизить максимальные окружные напряжения в диске. При этом больше снижение дает увеличение ширины втулки. Увеличение высоты втулки приводит к некоторому снижению окружных напряжений до тех пор, пока параметр $(r_b - r_0)h < 1$. При дальнейшем увеличении высоты втулки напряжения остаются практически постоянными и в конечном итоге могут даже возрасти.

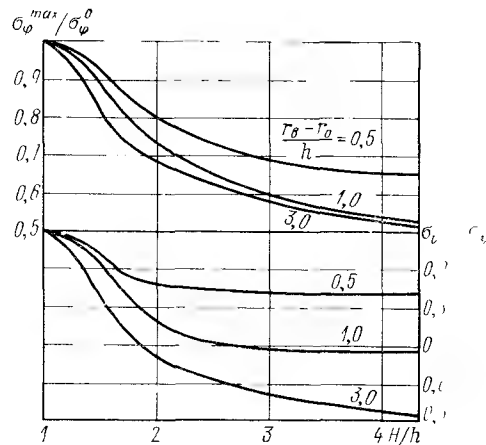


Рис. IX.6 Снижение максимальных окружных напряжений и интенсивности напряжений в диске в зависимости от геометрических параметров втулки

Однако, чтобы судить о прочности диска по его напряженному состоянию, необходимо рассматривать эквивалентное напряжение (см п I.5), в качестве которого может быть принята интенсивность напряжений, которая на поверхности внутреннего отверстия свободно вращающегося диска вычисляется по формуле

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_\phi^2 + \sigma_z^2 - \sigma_\phi \sigma_z},$$

где σ_ϕ и σ_z — окружные и осевые напряжения. На рис. IX.6 приведены кривые изменения максимальных значений интенсивности напряжений на внутреннем радиусе втулки в зависимости от ее геометрических параметров. Значения интенсивности напряжений отнесены к окружному напряжению на внутреннем радиусе диска постоянной толщины ($H/h = 1$), в котором максимальное значение интенсивности напряжений равно этому окружному напряжению ($\sigma_r = 0$). Как следует из кривых, для дисков с относительно небольшой высотой втулки $[(r_b - r_0)/h \leq 1]$ снижение эквивалентных напряжений при увеличении ее ширины будет иметь место до тех пор, пока параметр $H/h < 2 \div 2,5$. Дальнейшее увеличение ширины втулки не приводит к снижению интенсивности напряжений, а следовательно, и к повышению прочности диска вследствие увеличения осевых сжимающих напряжений. Для дисков с большей относительной высотой втулки $[1 < (r_b - r_0)/h]$ некоторого снижения эквивалентных напряжений можно еще достигнуть увеличением ширины втулки, так как рост в этом случае

осевых сжимающих напряжений будет менее значительным. Приведенные кривые позволяют ориентировочно оценить пределы целесообразного увеличения габаритных размеров втулки при проектировании дисков.

С ростом осевого размера втулки радиальные перемещения по ее ширине, как уже отмечалось, будут также неодинаковы: максимальные в средней части и минимальные на краях. Перемещения на краях втулки могут оказаться существенно меньшими по сравнению со средними, в качестве которых можно принять перемещения, вычисленные по схеме тонкого диска. Отношения минимальных перемещений к средним в зависимости от параметров втулки представлены в виде кривых на рис IX.7. Из кривых видно, что при относительно широкой втулке (параметр $H/h \geq 3$) с малой высотой $[(r_b - r_0)/h = 0,5 \div -1,0]$ средние перемещения могут превышать минимальные более чем на 25%. Этот факт указывает на то, что освобождающее число оборотов, вычисленное по схеме тонкого диска, может оказаться существенно заниженным по сравнению с фактическим. Так как радиальные перемещения и напряжения в свободно вращающемся равномерно нагретом диске прямо пропорциональны квадрату частоты вращения ротора, то с точностью до радиальных перемещений вала можно записать

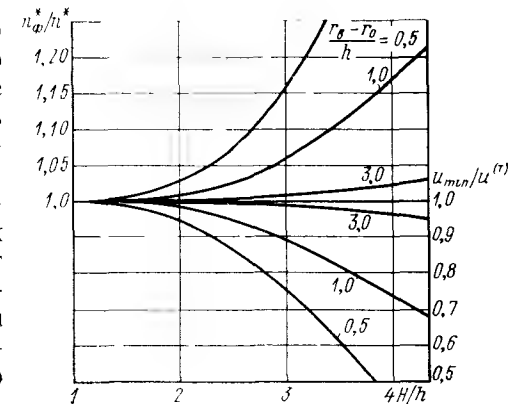


Рис IX.7 Относительные значения минимального радиального перемещения и фактического освобождающего числа оборотов в зависимости от геометрических параметров втулки

на то, что освобождающее число оборотов, вычисленное по схеме тонкого диска, может оказаться существенно заниженным по сравнению с фактическим. Так как радиальные перемещения и напряжения в свободно вращающемся равномерно нагретом диске прямо пропорциональны квадрату частоты вращения ротора, то с точностью до радиальных перемещений вала можно записать

$$n_\phi^* = n^* \sqrt{u^{(r)}/u_{\min}}, \quad (\text{IX.33})$$

где n_ϕ^* — фактическое освобождающее число оборотов.

На рис. IX.7 приведены кривые относительных значений фактического освобождающего числа оборотов в зависимости от ширины и высоты втулки. Видно, что для диска с относительно широкой втулкой ($H/h \geq 2,5$) фактическое освобождающее число оборотов может превышать вычисленное по схеме тонкого диска на 10—15%.

IX.4. РАСЧЕТ ЦЕЛЬНОКОВАННЫХ РОТОРОВ

Цельнокованный ротор при расчете его на прочность можно рассматривать как вращающийся цилиндр большой длины резкого переменного сечения (см рис. I.22). Выступающими частями

являются диски, на внешнем радиусе которых действуют радиальные усилия, создаваемые центробежными силами обода и лопаток. Кроме дисков ротор может иметь различные уплотнительные выступы и канавки. На поверхности внутреннего отверстия цилиндра (центральная расточка ротора) нагрузка отсутствует.

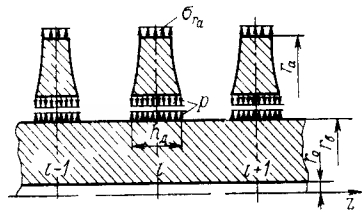


Рис IX 8 Расчетная схема цельнокованого ротора

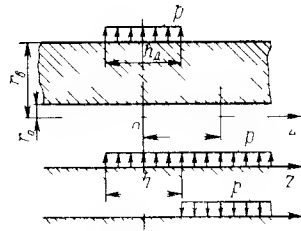


Рис IX 9 Скачкообразное изменение поверхностной нагрузки

Долгое время для расчета цельнокованых роторов широкое применение находил приближенный метод, предложенный Е. Я. Герцбергом [45]. Этот метод основан на замене цельнокованого ротора толстостенным цилиндром постоянного диаметра, который нагружен на отдельных участках кольцевыми нагрузками

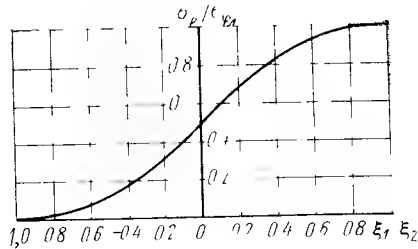


Рис IX 10 График для определения значений $\lambda(\xi_1)$ и $\lambda(\xi_2)$ при $\xi_1 = \xi + \beta$ и $\xi_2 = \xi - \beta$

(рис IX 8). Эти нагрузки представляют собой радиальные напряжения, которые имеют место в сечении стыка полотна диска с бочкой ротора. Для определения напряжений в толстостенном цилиндре может быть использовано приближенное решение В. Л. Бидермана [142], полученное для цилиндра со скачкообразной нагрузкой.

Составляя линейную комбинацию решений от двух скачкообразных нагрузок разных

знаков с интенсивностью p и $-p$, можно найти напряжения от действия нагрузки, приложенной на ограниченном участке (рис IX 9).

Окружные напряжения на внутреннем радиусе цилиндра в любой точке с координатой z можно вычислить по формуле

$$\sigma_{\phi}^{(p)}(z) = \lambda(\xi) \sigma_{\phi}, \quad (\text{IX } 34)$$

где $\sigma_{\phi} = \frac{2p}{1 - (r_0/r_{\text{в}})^2}$ — окружное напряжение на внутреннем радиусе бесконечно длинного толстостенного цилиндра с равномерной поверхностной нагрузкой (задача Ляме), $\lambda(\xi) = \lambda(\xi_1) - \lambda(\xi_2)$, $\lambda(\xi_1)$ и $\lambda(\xi_2)$ определяются по графику

рис. IX 10 в зависимости от $\xi_1 = \xi + \beta$ и $\xi_2 = \xi - \beta$ при $\xi = z/r_{\text{в}}$ и $\beta = h_d/(2r_{\text{в}})$.

Если цельнокованный ротор имеет n дисков, то окружные напряжения на внутреннем радиусе цилиндра следует подсчитать от действия кольцевой нагрузки каждого i -го диска и просуммировать по всем дискам. Расчеты показывают, что если точка, в которой определяются напряжения, находится от i -го диска на расстоянии, равном наружному диаметру цилиндра или превышающему его ($\geq 2r_{\text{в}}$), то влиянием этого и последующих дисков в этой

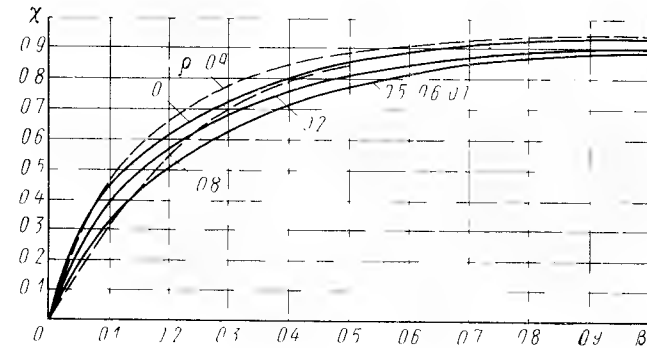


Рис IX 11 Кривые для коэффициента χ

точке можно пренебречь. Если учесть напряжения во вращающемся толстостенном цилиндре от собственной центробежной силы, то суммарные напряжения на внутреннем радиусе ротора можно найти по формуле

$$\sigma_{\phi}(z) = \sum_n \sigma_{\phi}^{(p)}(z) + \sigma_{\phi}^{(\omega)}, \quad (\text{IX } 35)$$

где

$$\sigma_{\phi}^{(\omega)} = \left[(1 - \nu) + (3 + \nu) \left(\frac{r_0}{r_{\text{в}}} \right)^2 \right] \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{r_{\text{в}}^2}{4}$$

Задача теперь заключается в нахождении неизвестного радиального усилия p в месте стыка полотна диска с бочкой ротора. Это усилие можно определить из условия равенства радиальных перемещений толстостенного цилиндра и полотна диска при $r = r_{\text{в}}$.

$$u_d(r_{\text{в}}) = u_{\text{в}}(r_{\text{в}}) \quad (\text{IX } 36)$$

Радиальные перемещения на внешнем радиусе толстостенного вращающегося цилиндра, нагруженного кольцевой нагрузкой, интенсивность которой p , можно определить по формуле

$$u_{\text{в}} = \frac{r_{\text{в}}}{E} [(C - \nu)\chi p + D], \quad (\text{IX } 37)$$

где

$$C = \frac{1 + (r_0/r_B)^2}{1 - (r_0/r_B)^2};$$

$$D = \left[(1 - \nu) + (3 + \nu) \left(\frac{r_0}{r_B} \right)^2 \right] \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{r_B^2}{4};$$

χ — коэффициент, который находится по графику (рис. IX.11) в зависимости от отношения $\rho = r_0/r_B$ и $\beta = h_d/2r_B$. При этом принимается, что касательные напряжения в месте стыка полотна диска с цилиндром отсутствуют.

Если цельнокованный ротор имеет n дисков, то радиальные перемещения под i -м диском будут зависеть от нагрузок, создаваемых соседними дисками. Учет этого влияния значительно усложняет расчет. Вычисления показывают, что если пренебречь влиянием соседних дисков при определении перемещений, то значения окружных напряжений на расточке ротора оказываются завышенными не более, чем на 10%. Отнеся это завышение в запас прочности, в дальнейшем будем вычислять неизвестное усилие p без учета влияния соседних дисков по (IX.37). Радиальные перемещения в полотне диска при $r = r_B$ определяются по формуле

$$u_d = \frac{r_B}{E} (\sigma_{\varphi_d} - \nu \sigma_{r_d}), \quad (IX.38)$$

где σ_{r_d} и σ_{φ_d} — радиальные и окружные напряжения в полотне диска при $r = r_B$.

Если напряжения в диске вычисляются по методу двух расчетов (см. п. IX.1), то

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\varphi_d} &= \sigma_{\varphi_d}^I + k \sigma_{\varphi_d}^{II}; \\ \sigma_{r_d} &= \sigma_{r_d}^I + k \sigma_{r_d}^{II} = p. \end{aligned} \right\} \quad (IX.39)$$

Из условия (IX.36) получаем уравнение для определения постоянной k :

$$(\sigma_{\varphi_d}^I - \nu \sigma_{r_d}^I) + k(\sigma_{\varphi_d}^{II} - \nu \sigma_{r_d}^{II}) = (C - \nu) \chi \sigma_{r_d}^I + D + k(C - \nu) \chi \sigma_{r_d}^{II},$$

откуда находим

$$k = \frac{(\sigma_{\varphi_d}^I - \nu \sigma_{r_d}^I) - (C - \nu) \chi \sigma_{r_d}^I - D}{(C - \nu) \chi \sigma_{r_d}^{II} - (\sigma_{\varphi_d}^{II} - \nu \sigma_{r_d}^{II})}. \quad (IX.40)$$

Зная k , по (IX.39) вычисляем искомое радиальное усилие в зоне сопряжения диска с бочкой ротора. Определив радиальные усилия от действия каждого диска на бочку ротора, по формулам (IX.34) и (IX.35) вычисляем окружные напряжения на расточке цельнокованого ротора.

Если напряжения в полотне диска вычисляются методом последовательных приближений (см. п. IX.2), то в данном случае уравнения IX.24) и формулы (IX.25) запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(k)} &= N_{k-1}(r) + A_{k-1} I(r) + \frac{h_d}{h} p_{k-1} + K(r); \\ \sigma_{\varphi}^{(k)} &= M_{k-1}(r) + A_{k-1} \frac{1}{r^{1+\nu}}, \end{aligned} \right\} \quad (IX.41)$$

где

$$\left. \begin{aligned} N_{k-1}(r) &= \frac{1}{h} \int_{r_B}^r \frac{h}{r} \left[\frac{1 - \nu^2}{r^{1+\nu}} \int_{r_B}^r \sigma_r^{(k-1)} r^{\nu} dr - (1 - \nu) \sigma_r^{(k-1)} \right] dr; \\ M_{k-1}(r) &= \frac{1 - \nu^2}{r^{1+\nu}} \int_{r_B}^r \sigma_r^{(k-1)} r^{\nu} dr + \nu \sigma_r^{(k-1)}; \\ K(r) &= -\frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{1}{h} \int_{r_B}^r h r dr; \quad I(r) = \frac{1}{h} \int_{r_B}^r \frac{h}{r^{2+\nu}} dr. \end{aligned} \right\} \quad (IX.42)$$

В этих формулах опущены члены, соответствующие температурной нагрузке, так как решение, используемое для толстостенного цилиндра с кольцевой поверхностной нагрузкой, получено без учета температурного поля.

Постоянная A_{k-1} , как и выше, определяется из условия (VIII.7) на внешнем радиусе диска, откуда находим

$$A_{k-1} = \frac{[\sigma_{r_a}' - K(r_a)] - N_{k-1}(r_a) - \frac{F_H}{h_a r_a} M_{k-1}(r_a) - \frac{h_d}{h_a} p_{k-1}}{I(r_a) + \frac{F_H}{h_a r_a^{2+\nu}}}. \quad (IX.43)$$

В соответствии с (IX.41) и (IX.38) радиальное перемещение в диске при $r = r_B$

$$u_d = A_{k-1} (E r_B^{\nu}).$$

Тогда условие (IX.36) примет вид

$$A_{k-1} r_B^{1+\nu} = (C - \nu) \chi p_k + D,$$

откуда

$$p_k = \frac{A_{k-1} - D r_B^{1+\nu}}{(C - \nu) \chi r_B^{1+\nu}}. \quad (IX.44)$$

Метод последовательных приближений подробно изложен в п. IX.2 и практически остается тем же. Напомним, что, как и выше, в качестве исходного нулевого приближения полагаем $\sigma_r^{(0)} = 0$, включая и напряжение на радиусе $r = r_B$, т. е. $p_0 = 0$.

Тогда в соответствии с (IX.42) $N_0(r) = M_0(r) = 0$. По (IX.43) вычисляем постоянную A_0 и далее по уравнениям (IX.41) — напряжения $\sigma_r^{(1)}$ и $\sigma_\varphi^{(1)}$ в первом приближении. В следующем приближении по (IX.42) вычисляем $N_1(r)$ и $M_1(r)$, по формуле (IX.44) находим p_1 , по (IX.43) — постоянную A_1 . По уравнениям (IX.41) вычисляем напряжения $\sigma_r^{(2)}$ и $\sigma_\varphi^{(2)}$ во втором приближении и т.д. Точность вычисления можно оценивать по значению искомого напряжения

$$\left| \frac{p_k - p_{k-1}}{p_k} \right| 100\% \leq \delta_0. \quad (\text{IX.45})$$

Вычислив таким образом интенсивность радиальной нагрузки в местах сопряжения бочки ротора с каждым диском, находим окружные напряжения на расточке цельнокованого ротора.

Изложенный приближенный метод расчета относительно прост и легко реализуется на ЭВМ. Однако он не дает возможности учесть многие геометрические факторы цельнокованого ротора, такие как, например, изменение наружного диаметра бочки, и не позволяет выявить важные особенности напряженного состояния ротора. В частности, остаются невычисленными осевые напряжения, которые на расточке ротора могут достигать относительно больших значений и вносить существенную поправку в величину эквивалентных напряжений. Большим недостатком приближенного метода является то, что он не учитывает температурных нагрузок, которые могут являться определяющими для роторов высокого и среднего давлений.

Наиболее полное представление о напряженном состоянии цельнокованого ротора могут дать численные методы решения осесимметричных задач для тел сложной геометрической формы. Как уже отмечалось, наиболее эффективным и универсальным из этих методов является метод конечных элементов. Структура алгоритма и программа на ЭВМ, разработанные для решения осесимметричных задач [158] и использованные выше для расчета турбинных дисков, остаются пригодными и для расчета цельнокованных роторов, отличаясь только значительно большим объемом вычислений. При дискретизации области, которая представляет собой диаметрально сечение ротора, сначала выполняется, как и при расчете дисков, разбивка ее на небольшое количество подобластей стандартного вида (фрагментов) с заданием координат узловых точек этих фрагментов в базовой системе координат (рис IX.12). Дальнейшее деление фрагментов на конечные элементы и вычисление координат узловых точек выполняет ЭВМ по заранее заданным алгоритмам. Законы изменения температурного поля и упругих постоянных также задаются укрупненно, по фрагментам. Для контроля сетка, построенная ЭВМ с заданными исходными данными, может быть выведена на графопостроитель. Разработанная программа позволяет определить напряженное состояние в зоне таких концентраторов, как галтели в месте

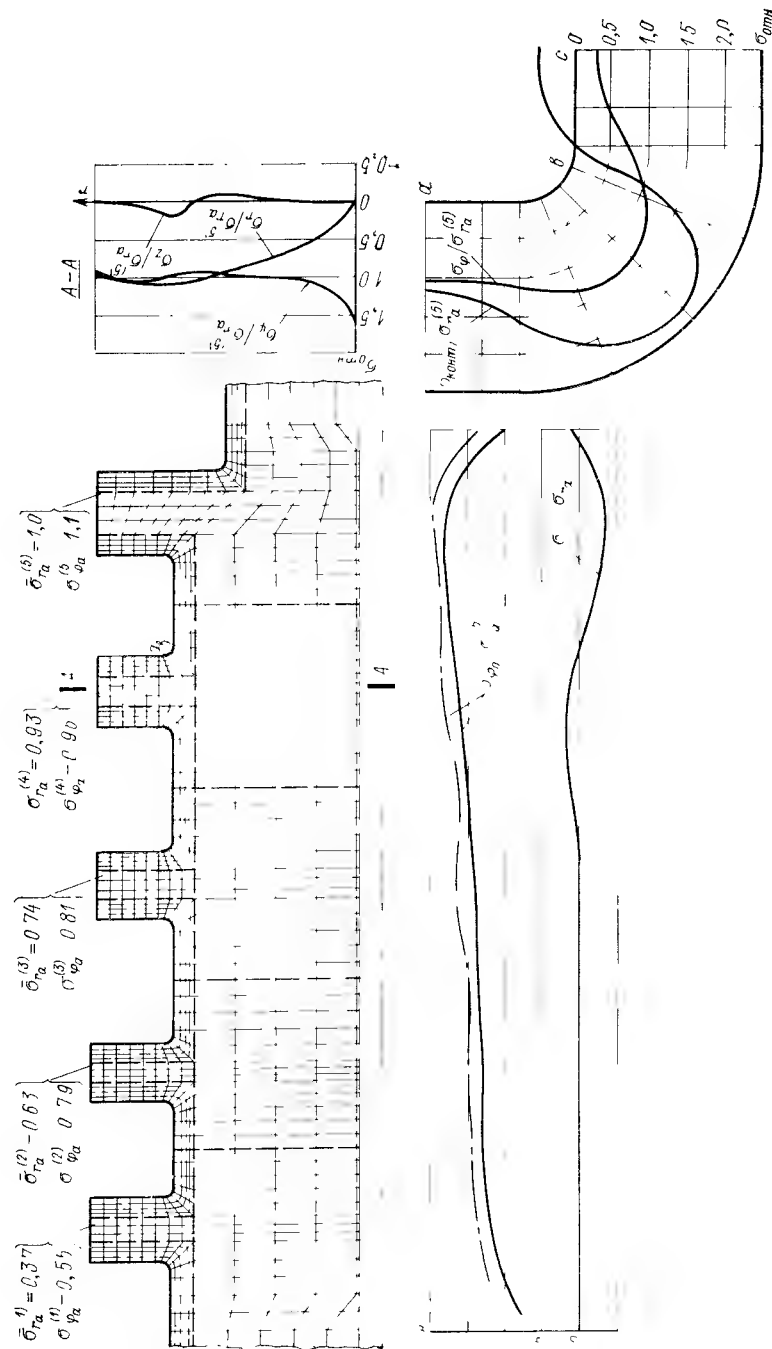


Рис. IX.12. Конечно-элементная расчетная схема цельнокованого ротора и эпюры относительных напряжений: — метод конечных элементов, - - - приближенный метод

перехода от полотна диска к бочке ротора, ступенчатого изменения диаметра бочки, кольцевых выточек и канавок. Результаты расчета в виде перемещений и напряжений выдаются соответственно в узловых точках сетки и в центрах конечных элементов. На рис. IX.12 в качестве примера приведено сечение цельнокованого ротора, разбитого на ряд стандартных фрагментов и с построенной сеткой внутри каждого из них¹. Там же приведены кривые относительных напряжений на расточке ротора, по радиусу одного из дисков и на контуре галтели в основании диска. Для сравнения приведена кривая окружных напряжений, вычисленных на расточке ротора по указанному выше приближенному методу. Из сравнения следует, что максимальные окружные напряжения, вычисленные по приближенному методу, оказываются примерно на 10% выше максимальных напряжений, вычисленных методом конечных элементов.

IX.5. К РАСЧЕТУ СВАРНЫХ РОТОРОВ

При оценке прочности сварного ротора необходимо определить напряжения, действующие в дисках и перемычках (см. рис. I.25). Напряженное состояние в перемычках определяется действием центробежных сил их собственной массы, а также разностью радиальных перемещений дисков, которые они соединяют. Различие в радиальных перемещениях дисков приводит к возникновению изгибающих моментов и перерезывающих сил, приложенных на краях перемычек в местах сопряжения с дисками. Напряжения в центральной части дисков в основном определяются центробежными силами собственной массы и центробежными силами рабочих лопаток. Напряжения, возникающие от упругого взаимодействия с перемычками, имеют местный характер, однако могут достигать значительной величины.

Расчет на прочность сварного ротора представляет собой весьма сложную задачу. В приближенных расчетных методах, в частности в широко распространенном методе, изложенном в [136], сварной ротор представляется состоящим из отдельных дисков, связанных между собой короткими тонкостенными цилиндрическими оболочками (перемычками). Радиальные перемещения диска и цилиндрической оболочки в местах сопряжения на радиусе, совпадающем с радиусом срединной поверхности оболочки, принимаются равными. Кроме того, угол поворота крайних сечений оболочки принимается равным нулю.

Как показали сопоставления с экспериментальными данными и с результатами расчетов методом конечных элементов, напряженное состояние в перемычках, определенное указанным приближенным методом, плохо соответствует действительному. Это от-

носится как к уровню действующих напряжений, так и к характеру их распределения. Объясняется это тем, что принятая расчетная схема не учитывает упругой податливости соединения перемычек с дисками.

Другой приближенный метод расчета сварных роторов [46] использует идею расчета цельнокованых роторов [45], изложенную в предыдущем параграфе. Реальная конструкция сварного ротора сводится к расчетной схеме, включающей цилиндры постоянного сечения, толщина которых равна толщине перемычек, и диски, нагруженные центробежными силами обода и лопаток, а также радиальными усилиями, возникающими в местах стыка диска и цилиндра (рис. IX.13). В этом случае цилиндры рассматриваются как толстостенные. Неизвестные радиальные усилия p_1 и p_2 находятся из условий равенства средних радиальных перемещений наружных и внутренних поверхностей цилиндра и дисков на участках сопряжения. При этом касательными напряжениями на участке сопряжения пренебрегают. После определения неизвестных радиальных усилий p_1 и p_2 можно найти напряжения во всех элементах ротора (в дисках и цилиндре), как это было показано в предыдущем параграфе.

Этот метод обладает большей точностью, чем предыдущий, однако напряжения, определенные в местах сопряжения перемычек с дисками, где они имеют максимальные значения, существенно отличаются от действительных. Ввиду этого при проектировании сварного ротора напряжения в дисках ориентировочно оценивают путем их расчета без учета взаимосвязи с перемычками и другими дисками. При этом диски стараются спрофилировать так, чтобы, с одной стороны, их радиальные перемещения на радиусе расположения перемычек были приблизительно равны между собой, а с другой, — радиальному перемещению свободно вращающейся перемычки. Радиальные перемещения свободной перемычки можно приближенно оценить по формуле для тонкого вращающегося кольца

$$u_k = \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{R^3}{E}, \quad (\text{IX.46})$$

где R — радиус расположения перемычек

Тогда на радиусе расположения перемычек должно удовлетворяться условие

$$u_d = u_k; \quad (\text{IX.47})$$

или

$$\sigma_\phi - \nu \sigma_r = \frac{\gamma \omega^2}{g} R^2, \quad (\text{IX.48})$$

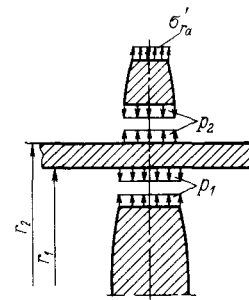


Рис IX.13. Расчетная схема сварного ротора

¹ Расчеты методом конечных элементов выполнены по программе Киевского инж.-строит. инст [158] канд физ.-мат. наук М. А. Ковалевским и инж. Д. Х. Краковским.

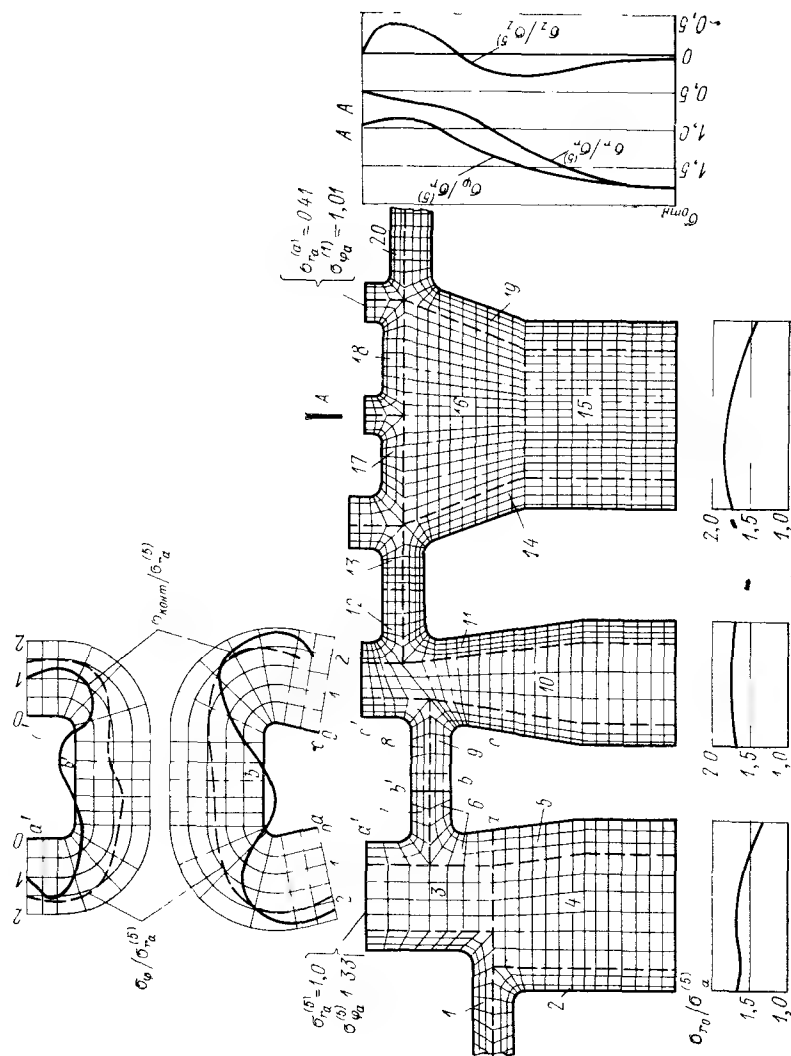


Рис IX 14. Конечнo-элементная расчетная схема сварного ротора и эпюры относительных напряжений

где u_d — радиальное перемещение диска на радиусе R ; σ_r и σ_ϕ — радиальные и окружные нормальные напряжения на этом же радиусе.

Если условие (IX 48) выполняется, то в перемычке не будут возникать напряжения изгиба и она будет испытывать только действие окружных напряжений, близких к напряжениям в тонком вращающемся кольце,

$$\sigma_\phi = \frac{\gamma \omega^2}{g} R^2. \quad (\text{IX.49})$$

Влияние перемычек на напряженное состояние дисков в этом случае также будет минимальным.

Как уже указывалось (см. п 1.2), диски сварных роторов, как правило, выполняются сплошными. Это в некоторых случаях позволяет приблизить их профиль к профилю равного сопротивления и добиться приблизительного выполнения условия (IX.48). Однако практически это удастся далеко не всегда и напряженное состояние сварного ротора, особенно в местах сопряжения перемычек с дисками, будет относительно сложным. Наиболее полное представление о напряженном состоянии сварного ротора могут дать расчеты, выполненные с помощью метода конечных элементов [158].

Для расчета сварных роторов используется численное решение осесимметричной задачи теории упругости. Структура алгоритма и программа расчета на ЭВМ остаются те же, что и для расчета цельнокованных роторов. Однако представление расчетной схемы сварного ротора в дискретизированном виде в связи со сложностью конструкции является более трудоемким. Используя идею фрагментации [158], значительную часть операций при построении сетки удастся переложить на ЭВМ, но предварительная разбивка расчетной области на фрагменты и их сочленение между собой требуют некоторой изобретательности. На рис. IX.14 в качестве примера представлен участок сварного ротора, для дискретизации которого потребовалось 20 фрагментов, относящихся к различным типам стандартных геометрических форм. На этом же рисунке приведены некоторые результаты расчета сварного ротора, представленные в виде кривых относительных напряжений. Приведены кривые напряжений по оси дисков, по радиусу наиболее напряженного диска и по контуру одной из перемычек¹. Представленные эпюры свидетельствуют о сложности напряженного состояния сварного ротора, особенно в зонах сопряжения перемычек с дисками, где наблюдается значительная концентрация контурных напряжений.

¹ Расчеты методом конечных элементов выполнены по программе Киевского инж.-строит. инст. [158] канд. физ.-мат. наук. М. А. Ковалевским.

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

При определенном уровне напряжений и температуры в дисках, роторах и лопатках могут появляться остаточные деформации, не исчезающие при полном снятии нагрузки. Эти остаточные деформации могут быть разделены на пластические, появляющиеся в процессе нагружения детали, и деформации ползучести, нарастающие с течением времени. И те, и другие деформации приводят к перераспределению напряжений в объеме детали даже в том случае, если величина этих деформаций не сказывается на изменении ее размеров. Деформации ползучести, кроме того, при длительных сроках эксплуатации паровых турбин могут привести к заметному изменению размеров дисков и т. д. Ввиду этого при оценке прочности рабочих лопаток, дисков и роторов явления пластичности и ползучести необходимо принимать во внимание с учетом конкретных условий эксплуатации (температуры, характеристик маневренности агрегата и др.).

Расчеты за пределами упругости при одноосном растяжении производятся непосредственно с использованием диаграммы растяжения или серии кривых ползучести. В случае более сложного напряженного состояния необходимо знать закономерности, связывающие деформации с напряжениями, а при ползучести еще и со временем. Эти закономерности, с одной стороны, должны наиболее полно описывать взаимосвязь между указанными параметрами, а с другой, — быть достаточно простыми, чтобы позволить решать практические задачи. Такие закономерности должны также отражать характер нагружения детали. Условно нагружение разделяют на «простое» и «сложное» [81, 116; 169].

Простое нагружение соответствует случаю, когда компоненты напряжений в любой точке тела возрастают пропорционально одному параметру. При этом к внешним нагрузкам должен быть отнесен и неравномерный нагрев. Характерной чертой такого нагружения является его однонаправленность, приводящая к монотонному росту деформаций [169]. Примером простого нагружения может служить нагружение ротора центробежными силами при достаточно равномерном его прогреве. В этом случае напряжения изменяются практически пропорционально параметру — квадрату частоты вращения.

Случаи нагружения, когда различные нагрузки, действующие на тело, изменяются независимо друг от друга, относятся к сложному нагружению. К этому виду нагружения относится также малоцикловое нагружение, о котором уже говорилось в п. I.3 и I.5.

Прежде чем переходить к изложению основных уравнений теории пластичности и теории ползучести, напомним некоторые, необходимые в последующем, соотношения теории упругости для изотропного тела.

Как известно [81; 116], в теории упругости шесть независимых компонент тензора напряжений связаны с шестью независимыми компонентами тензора деформаций физическими уравнениями обобщенного закона Гука.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]/E, \\ \varepsilon_y &= [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]/E, \\ \varepsilon_z &= [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]/E, \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G; \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G; \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G, \end{aligned} \right\} \quad (X.1)$$

где E и G — модули упругости первого и второго рода; ν — коэффициент Пуассона; E , G и ν — параметры упругости, между которыми существует следующая зависимость

$$G = E/[2(1 + \nu)]. \quad (X.2)$$

Уравнения (X.1) могут быть записаны и в другом виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= [(1 + \nu)\sigma_x - 3\nu\sigma_0]/E, \\ \varepsilon_y &= [(1 + \nu)\sigma_y - 3\nu\sigma_0]/E, \\ \varepsilon_z &= [(1 + \nu)\sigma_z - 3\nu\sigma_0]/E, \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G; \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G; \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G, \end{aligned} \right\} \quad (X.3)$$

где $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ — среднее напряжение в данной точке.

Имея в виду, что относительное изменение объема при упругом деформировании равно сумме трех линейных деформаций, из (X.3) находим

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{3(1 - 2\nu)}{E}\sigma_0 \quad (X.4)$$

Учитывая, что средняя деформация

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3, \quad (X.5)$$

из (X.4) получим

$$\varepsilon_0 = \frac{1 - 2\nu}{E}\sigma_0 \quad (X.6)$$

Используя соотношения (X.2) и (X.6), уравнения (X.3) преобразуем к виду:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon_0 &= (\sigma_x - \sigma_0)/(2G); \\ \varepsilon_y - \varepsilon_0 &= (\sigma_y - \sigma_0)/(2G); \\ \varepsilon_z - \varepsilon_0 &= (\sigma_z - \sigma_0)/(2G); \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G; \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G; \\ \gamma_{zx} &= \tau_{zx}/G. \end{aligned} \right\} \quad (X.7)$$

Разности $(\sigma_x - \sigma_0)$; $\dots$; $(\varepsilon_z - \varepsilon_0)$ представляют собой компоненты тензора, называемого девиатором напряжений и соответ-

ственно девиатором деформаций, и имеют определенный физический смысл. Представим общий случай напряженно-деформированного состояния тела в виде суммы двух состояний, которые определяются: первое — одинаковыми нормальными напряжениями σ_0 , действующими в трех взаимно перпендикулярных площадках, и соответствующими им одинаковыми в трех направлениях линейными деформациями ϵ_0 ; второе — нормальными напряжениями $s_x = \sigma_x - \sigma_0$; $s_y = \sigma_y - \sigma_0$; $s_z = \sigma_z - \sigma_0$ и касательными τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , а также соответствующими им линейными деформациями $e_x = \epsilon_x - \epsilon_0$; $e_y = \epsilon_y - \epsilon_0$; $e_z = \epsilon_z - \epsilon_0$ и деформациями сдвига γ_{xy} ; γ_{yz} ; γ_{zx} . Первое состояние соответствует всестороннему растяжению или сжатию, в котором имеет место только упругое изменение объема, прямо пропорциональное сумме нормальных напряжений (X.4). Во втором состоянии сумма нормальных напряжений и соответственно объемная деформация равны нулю ($s_x + s_y + s_z = 0$ и $e_x + e_y + e_z = 0$), а имеет место только изменение формы (искажается форма элемента). Поскольку, как показывает опыт, возникновение пластических деформаций сопровождается только изменением формы элемента, то девиаторные компоненты напряжений и будут определять возможность возникновения и развития пластического деформирования.

Из (X.7) следует пропорциональность между компонентами девиатора напряжений и девиатора деформаций с коэффициентом пропорциональности, равным удвоенной величине модуля сдвига:

$$\frac{\epsilon_x - \epsilon_0}{\sigma_x - \sigma_0} = \frac{\epsilon_y - \epsilon_0}{\sigma_y - \sigma_0} = \frac{\epsilon_z - \epsilon_0}{\sigma_z - \sigma_0} = \frac{\gamma_{xy}}{2\tau_{xy}} = \frac{\gamma_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{\gamma_{zx}}{2\tau_{zx}} = \frac{1}{2G}. \quad (X.8)$$

Выясним далее связь между интенсивностями напряжений и деформаций в пределах упругости. Как известно [116], интенсивность напряжений представляет собой величину

$$\sigma_i = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (X.9)$$

или

$$\sigma_i = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (X.9a)$$

Для частного случая одноосного растяжения ($\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$\sigma_i = \sigma, \quad (X.10)$$

а для чистого сдвига ($\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\tau$)

$$\sigma_i = \sqrt{3}\tau. \quad (X.11)$$

Величину, совпадающую при чистом сдвиге с величиной наибольшего касательного напряжения, называют интенсивностью касательных напряжений T . В соответствии с (X.11)

$$T = \sigma_i / \sqrt{3}. \quad (X.12)$$

Интенсивность деформаций определяется так:

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}, \quad (X.13)$$

или

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}. \quad (X.13a)$$

Для частного случая одноосного растяжения [$\epsilon_1 = \epsilon$; $\epsilon_2 = \epsilon_3 = (\epsilon - 3\epsilon_0)/2$]

$$\epsilon_i = \epsilon - \epsilon_0, \quad (X.14)$$

где ϵ_0 — средняя деформация в соответствии с (X.5), а для чистого сдвига ($\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0$; $\gamma_{xy} = \gamma$; $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$)

$$\epsilon_i = \gamma / \sqrt{3}. \quad (X.15)$$

Величину, совпадающую при чистом сдвиге с величиной наибольшей угловой деформации, называют интенсивностью деформаций сдвига Γ . В соответствии с (X.15) она равна

$$\Gamma = \sqrt{3}\epsilon_i. \quad (X.16)$$

Подставляя теперь (X.3) в (X.13) и учитывая (X.9), получим

$$\epsilon_i = \sigma_i / 3G, \quad (X.17)$$

а в соответствии с формулами (X.12) и (X.16)

$$T = G\Gamma. \quad (X.18)$$

Следовательно, в пределах упругости интенсивность напряжений прямо пропорциональна интенсивности деформаций

X.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

При простом нагружении широко применяется так называемая деформационная теория пластичности, устанавливающая взаимосвязь между напряжениями и полными деформациями в данный момент нагружения. В этом случае деформационная теория хорошо согласуется с экспериментальными данными [116; 169].

При сложном нагружении в прикладных задачах обычно применяется теория течения или деформационная теория в приращениях, которая может быть распространена как на условия изотропного, так и анизотропного упрочнения. Эта теория устанавливает взаимосвязь между приращениями пластических деформаций и напряжений. Теория течения позволяет более полно отразить историю нагружения и выявить характер упругопластического деформирования при сложных видах нагружения. Заметим, что

при простом нагружении обе теории пластичности дают одинаковые результаты. Здесь рассмотрим более подробно деформационную теорию пластичности.

Деформационная теория пластичности основана на следующих предположениях [81; 116].

1. Полная деформация может быть представлена в виде суммы упругой и пластической деформаций

$$\epsilon_x = \epsilon_x^e + \epsilon_x^p \text{ и т. д.} \quad (\text{X.19})$$

2. Объемная деформация материала является упругой, т. е. за счет пластического деформирования изменения объема не происходит и, следовательно, между значениями средних напряжений и средних деформаций сохраняется зависимость (X.6). Обычно в инженерных расчетах величиной упругого изменения объема при пластическом деформировании материала пренебрегают, т. е. считают материал несжимаемым. В этом случае

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_0 = 0. \quad (\text{X.20})$$

Как следует из (X.6), это равносильно предположению, что коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$.

3. Компоненты девиатора деформаций пропорциональны компонентам девиатора напряжений, т. е.

$$\frac{\epsilon_x - \epsilon_0}{\sigma_x - \sigma_0} = \frac{\epsilon_y - \epsilon_0}{\sigma_y - \sigma_0} = \frac{\epsilon_z - \epsilon_0}{\sigma_z - \sigma_0} = \frac{\gamma_{xy}}{2\tau_{xy}} = \frac{\gamma_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{\gamma_{zx}}{2\tau_{zx}} = \frac{\psi}{2G}, \quad (\text{X.21})$$

где ψ — некоторая функция напряжений (параметр пластичности).

Заметим, что в пределах упругости параметр пластичности $\psi = 1$ [см. формулу (X.8)].

Соотношения (X.21) можно записать в виде физических уравнений (уравнения Генки):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x - \epsilon_0 &= (\psi/2G)(\sigma_x - \sigma_0); \\ \epsilon_y - \epsilon_0 &= (\psi/2G)(\sigma_y - \sigma_0); \\ \epsilon_z - \epsilon_0 &= (\psi/2G)(\sigma_z - \sigma_0); \\ \gamma_{xy} &= (\psi/G)\tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = (\psi/G)\tau_{yz}; \quad \gamma_{zx} = (\psi/G)\tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.22})$$

4. Интенсивность напряжений при данной температуре является определенной функцией интенсивности деформаций, не зависящей от вида напряженного состояния. Для всех напряженных состояний зависимость $\sigma_i = f(\epsilon_i)$, называемая обобщенной кривой деформирования, одинакова. Это, в свою очередь, позволяет воспользоваться для построения обобщенной кривой деформирования результатами простейших испытаний, например, при одноосном растяжении образцов.

В соответствии с (X.10) и (X.14) при одноосном растяжении имеем:

$$\sigma_i = \sigma; \quad \epsilon_i = \epsilon - \epsilon_0.$$

Учитывая, что при одноосном растяжении среднее напряжение $\sigma_0 = \sigma/3$, по (X.6) находим

$$\epsilon_0 = \frac{1-2\nu}{3E} \sigma.$$

Тогда окончательно для построения обобщенной кривой деформирования имеем следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= \sigma; \\ \epsilon_i &= \epsilon - \frac{1-2\nu}{3E} \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.23})$$

Как следует из (X.23), обобщенная кривая деформирования мало отличается от диаграммы растяжения, а для несжимаемого материала, для которого $\nu = 0,5$, они совпадают. На основании сформулированных гипотез найдем далее параметр пластичности ψ .

Используя уравнения Генки (X.22) и формулы (X.9) и (X.13), найдем

$$\epsilon_i = [\psi/3G] \sigma_i,$$

откуда

$$\psi = 3G(\epsilon_i/\sigma_i). \quad (\text{X.24})$$

Тогда уравнения деформационной теории пластичности можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x - \epsilon_0 &= \frac{3}{2} \frac{\epsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0); \\ \gamma_{xy} &= 3 \frac{\epsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy} \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.25})$$

Для несжимаемого материала в уравнениях (X.25) необходимо положить $\epsilon_0 = 0$ и они примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{3}{2} \frac{\epsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0); \\ \gamma_{xy} &= 3 \frac{\epsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy} \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.26})$$

Уравнения (X.25) останутся справедливыми и при наличии неравномерного температурного поля. Действительно, при нагреве происходит только изменение объема любого элемента без изменения его формы, а следовательно, компоненты девиатора деформаций останутся неизменными и пропорциональность в выражении (X.21) сохранится.

С учетом температурных расширений полная деформация представляется в виде суммы упругой, пластической и температурной деформаций:

$$\epsilon_x = \epsilon_x^e + \epsilon_x^p + \epsilon_{xT} \text{ и т. д.}, \quad (\text{X.27})$$

а выражение (X.6) примет вид

$$\epsilon_0 = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_0 + \epsilon_T. \quad (\text{X.28})$$

Для практических расчетов иногда удобно параметр пластичности ψ выразить через так называемый секущий модуль [169]. Исходя из диаграммы одноосного растяжения он равен (рис. X 1, а)

$$E_c = \sigma/\epsilon, \quad (X 29)$$

где $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$ — полная деформация

В отличие от модуля упругости E , зависящего для данного материала только от температуры, секущий модуль зависит как от температуры, так и от достигнутой деформации $E_c = E_c(\epsilon, T)$. Другими словами, он зависит от положения точки на

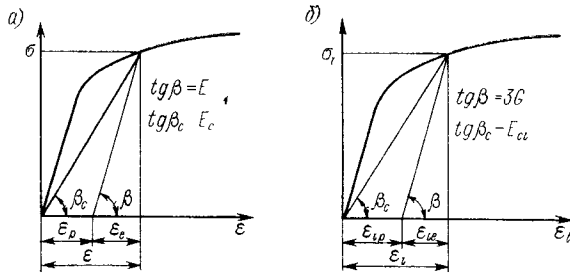


Рис. X 1 Кривые упругопластического деформирования

диаграмме растяжения, соответствующей данному моменту нагружения. В упругом состоянии $E_c = E$, а при развитой пластической деформации $E_c \ll E$.

Аналогично (X.29) секущий модуль вводится и для обобщенной кривой деформирования (рис. X.1, б):

$$E_{ci} = \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} = \frac{3G}{\psi} = \frac{3E}{2(1+\nu)} \frac{1}{\psi}. \quad (X 30)$$

Тогда параметр пластичности

$$\psi = \frac{3}{2(1+\nu)} \frac{E}{E_{ci}}. \quad (X 31)$$

Преобразуем теперь физические уравнения деформационной теории пластичности (X.22). Подставляя сюда (X.28), запишем их в виде:

$$\epsilon_x = \frac{\psi}{2G} (\sigma_x - \sigma_0) + \frac{1-2\nu}{E} \sigma_0 + \epsilon_T, \quad \gamma_{xy} = (\psi/G) \tau_{xy} \quad \text{и т. д.},$$

а с учетом (X.2) получим:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \{ (1+\nu) \psi \sigma_x - [(1+\nu) \psi - (1-2\nu)] \sigma_0 \} + \epsilon_T; \quad (X.32)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \psi \tau_{xy} \quad \text{и т. д.}$$

Подставляя в эти уравнения параметр пластичности ψ в соответствии с (X.31), представим их в форме уравнений обобщенного закона Гука (X.3).

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E^*} [(1+\nu^*) \sigma_x - 3\nu^* \sigma_0] + \epsilon_T; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G^*} \tau_{xy} \quad \text{и т. д.}, \end{aligned} \right\} \quad (X 33)$$

где

$$\left. \begin{aligned} E^* &= \frac{E_{ci}}{1 + \frac{1-2\nu}{3E} E_{ci}}; \quad G^* = \frac{1}{3} E_{ci}, \\ \nu^* &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1-2\nu}{3E} E_{ci}}{1 + \frac{1-2\nu}{3E} E_{ci}}. \end{aligned} \right\} \quad (X 34)$$

Очевидно, что для несжимаемого материала

$$E^* = E_{ci} = \sigma_i/\epsilon_i; \quad \nu^* = 0,5. \quad (X 35)$$

Таким образом, физические уравнения деформационной теории пластичности могут быть записаны в форме, совпадающей с уравнениями обобщенного закона Гука

В заключение заметим, что в основе теории течения лежат те же предположения, что и в деформационной теории пластичности, однако они формулируются в приращениях пластических деформаций

Х.3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Как уже указывалось в п. 1.3, изучение свойств ползучести и длительной прочности материалов производят путем испытаний образцов в условиях простого растяжения. Получаемые в результате таких испытаний кривые ползучести позволяют произвести расчет деталей при одноосном напряженном состоянии. Однако как и в теории пластичности, для обобщения полученных результатов на другие, более сложные виды напряженного состояния необходимо установить зависимости между напряжениями, деформациями, скоростями деформаций и временем при определенной температуре. Естественно, установление той или иной зависимости и ее апробация производятся сначала для простейших видов напряженного состояния (одноосное растяжение, чистый сдвиг) при изменяющихся напряжениях, а далее, с принятием некоторых допущений, она распространяется на сложное напряженное состояние.

В настоящее время в прикладных задачах наибольшее применение находят три теории ползучести: старения, течения и упрочнения, которые иногда называют техническими теориями ползу-

части [116]. Эти теории дают возможность решать конкретные прикладные задачи как при стационарной ползучести, когда деформация детали происходит при постоянных во времени напряжениях, так и при нестационарной ползучести, когда деформация детали происходит при изменяющихся во времени напряжениях. Рассмотрим названные теории ползучести подробнее

Теория старения. Согласно этой теории устанавливается взаимосвязь при определенной температуре между деформацией, напряжением и временем

$$\Phi_1(\epsilon, \sigma, t) = 0. \quad (X.36)$$

При построении аналитических зависимостей уравнение (X.36) обычно представляют в виде

$$\epsilon^c = Q(\sigma) \Omega(t), \quad (X.37)$$

где $Q(\sigma)$ — функция, зависящая только от напряжений при данной температуре; $\Omega(t)$ — функция, зависящая только от времени при данной температуре.

Широкое распространение теория старения получила в форме степенного закона

$$\epsilon^c = \Omega(t) \sigma^m. \quad (X.38)$$

где m — показатель ползучести, зависящий от температуры¹.

Функцию времени $\Omega(t)$ аналитическими зависимостями обычно не аппроксимируют, а для проведения расчетов ее задают графически, обрабатывая кривые ползучести, полученные под действием постоянной нагрузки. Вид этой функции показан на рис. X.2. Прямой участок графика соответствует ползучести с постоянной скоростью деформации. На этом участке можно принять

$$\Omega(t) = Bt.$$

а степенной закон ползучести представить в виде

$$\epsilon^c = Bt\sigma^m, \quad (X.39)$$

где B — коэффициент, постоянный при данной температуре.

Возможны и другие аналитические представления теории старения, например в виде

$$\epsilon^c = Q_1(\sigma) \psi(t) + Q(\sigma) t, \quad (X.40)$$

где $Q(\sigma)$ и $Q_1(\sigma)$ — функции напряжений при постоянной температуре; $\psi(t)$ — функция времени при постоянной температуре.

Наиболее удобная для практического использования формулировка теории старения была предложена Ю. Н. Работновым [139].

¹ Для показателя ползучести m наблюдается зависимость от уровня напряжений, однако в практических расчетах его принимают постоянным при данной температуре.

Она заключается в том, что зависимость между напряжениями, деформациями и временем при определенной температуре задается графически семейством изохронных кривых для заданного момента времени.

Если имеются кривые ползучести при разных значениях напряжений σ_1, σ_2 и т. д., то для заданного момента времени t_1 можно построить зависимость $\sigma = f_1(\epsilon)$ — изохронную кривую. Такое построение показано на рис. X.3. Аналогичным образом строятся изохронные кривые $\sigma = f_2(\epsilon)$ для времени t_2 , $\sigma = f_3(\epsilon)$ для времени t_3 и т. д. Если температурное поле рассчитываемой

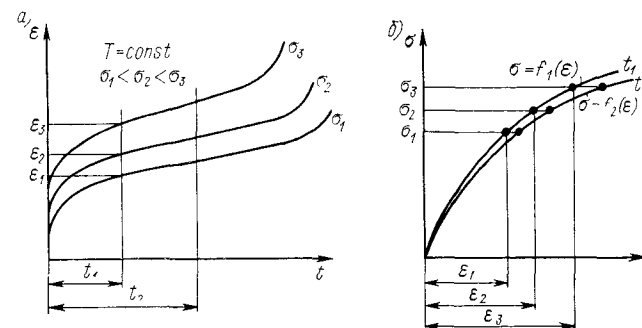


Рис. X.3. Построение изохронных кривых: а — кривые ползучести при различных напряжениях; б — изохронные кривые для моментов времени t_1 и t_2

конструкции неравномерно, то необходимо иметь семейство изохронных кривых для различных температур.

Очевидно, что расчет на ползучесть по теории старения Ю. Н. Работнова для заданного момента времени эквивалентен упругопластическому расчету по заданной кривой деформирования. Ввиду этого теорию старения иногда называют деформационной теорией ползучести.

Для проведения расчетов в этом случае аппроксимация кривых ползучести не требуется, что повышает точность определения напряженного состояния.

Для того чтобы учесть изменение напряжений и деформаций во времени, необходимо произвести несколько расчетов для выбранных значений времени. Вычисления показывают, что теория старения в любой формулировке дает практически достаточную точность при расчете конструкций с постоянно действующими или монотонно возрастающими силовыми или температурными нагрузками (простое нагружение). Заметим, что подобный характер нагружения близок к нагружению деталей стационарных паровых турбин, в частности роторов, дисков и лопаток при установившихся режимах работы. Недостатком теории старения является то, что она не учитывает истории нагружения.

Теория течения. Согласно этой теории устанавливается взаимосвязь при определенной температуре между скоростью пластической деформации, напряжением и временем

$$\Phi_2(\xi^c, \sigma, t) = 0 \quad (X 41)$$

Для практических расчетов наибольшее распространение теория течения получила в форме степенного закона [79]

$$\xi^c = B(t) \sigma^m, \quad (X 42)$$

где m — показатель ползучести, зависящий от температуры, $B(t)$ — функция времени, зависящая от температуры

Функцию $B(t)$, как и функцию $\Omega(t)$ в степенном законе теории старения, аналитически не аппроксимируют, а представляют графически при обработке кривых ползучести. Характер изменения этой функции показан на рис X 2. Прямой участок соответствует установившейся ползучести ($\xi^c = \text{const}$). В этом случае $B(t) = B = \text{const}$

Очевидно, что в стадии установившейся ползучести степенной закон теории течения может быть получен дифференцированием уравнения (X 39)

Известны также и другие аналитические представления теории течения, например в виде [116]

$$\xi^c = B_1(t) \text{sh}(m_1 \sigma), \quad (X 43)$$

где $B_1(t)$ — функция времени, зависящая от температуры, m_1 — постоянная времени, зависящая от температуры

Заметим, что использование теории течения в форме (X 43) приводит к более сложному математическому решению задачи, хотя и дает несколько большую точность

К недостаткам теории течения следует отнести то, что она, как и теория старения, не позволяет учесть историю нагружения

Теория упрочнения. Согласно этой теории устанавливается взаимосвязь между пластической деформацией, скоростью пластической деформации и напряжением

$$\Phi_3(\epsilon^c, \xi^c, \sigma) = 0 \quad (X 44)$$

Аналитическая зависимость теории упрочнения обычно представляется в виде

$$\xi^c (\epsilon^c)^\beta = f(\sigma)$$

Наиболее достоверные результаты при описании явления ползучести с учетом изменяющихся во времени нагрузок и температуры теория упрочнения дает в том случае, если функцию $f(\sigma)$ принять в виде [116]

$$f(\sigma) = a \sigma^m$$

Тогда согласно теории упрочнения взаимосвязь между пластической деформацией, скоростью пластической деформации и напряжением будет определяться уравнением

$$\xi^c (\epsilon^c)^\beta = a \sigma^m, \quad (X.45)$$

где β , a и m — постоянные параметры, зависящие от температуры и определяемые при обработке кривых ползучести

Из трех приведенных здесь технических теорий ползучести лучше всего согласуется с экспериментальными данными теория упрочнения. Однако практическое применение этой теории ограничено из-за математических затруднений при решении конкретных прикладных задач

Сопоставление экспериментальной кривой релаксации при заданной постоянной деформации с теоретическими кривыми, построенными по кривым ползучести с использованием теорий старения и течения, показывает, что экспериментальная кривая располагается между теоретическими несколько ниже кривой по теории старения и выше кривой по теории течения [116]. Заметим, что при установившейся ползучести все теории дают один и тот же результат

Обобщение зависимостей на сложное напряженное состояние, полученных для одноосного, в теории ползучести, базируется практически на тех же гипотезах, которые были приняты в теории пластичности [79, 116]

1. Полная деформация представляется в виде суммы упругой мгновенной пластической деформации и деформации ползучести

$$\epsilon_x = \epsilon_x^e + \epsilon_x^p + \epsilon_x^c \text{ и т. д.} \quad (X 46)$$

2. Объемная деформация материала при ползучести является упругой, т. е. за счет ползучести изменения объема не происходит

$$\epsilon_x^c + \epsilon_y^c + \epsilon_z^c = 0 \quad (X 47)$$

Как и в теории пластичности, учитывая малость объемной деформации, в инженерных расчетах материал можно считать несжимаемым и тогда

$$\epsilon_0 = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)/3 = 0, \quad (X 48)$$

а коэффициент Пуассона принимать $\nu = 0,5$.

Условие (X 47) распространяется и на скорости деформаций ползучести. Дифференцируя (X.47) по времени, получим

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = 0, \quad (X 49)$$

где

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{d}{dt} (\epsilon_x^c) \text{ и т. д.}$$

3. Интенсивности напряжений и деформаций при сложном напряженном состоянии связаны такими же зависимостями, как и при одноосном. Это допущение позволяет распространить сформулированные выше зависимости технических теорий ползучести для одноосного напряженного состояния на сложное. Например, зависимость степенного закона старения (X 38) примет вид

$$\epsilon_i^c = \Omega(t) \sigma_i^m \quad (X 50)$$

или с учетом упругих деформаций

$$\varepsilon_i = \sigma_i / (3G) + \Omega(t) \sigma_i^m. \quad (X.51)$$

При использовании теории старения в формулировке Ю. Н. Работнова зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ определяется изохронной кривой для данного момента времени, полученной при одноосном растяжении.

Указанное допущение распространяется и на интенсивности скоростей деформаций ползучести. Тогда степенной закон теории течения можно записать в виде

$$\xi_i = B(t) \sigma_i^m, \quad (X.52)$$

где ξ_i — интенсивность скоростей деформаций ползучести,

$$\xi_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\xi_3 - \xi_1)^2}.$$

4. Компоненты девиатора деформаций пропорциональны компонентам девиатора напряжений, т. е.

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\sigma_1 - \sigma_0} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\sigma_2 - \sigma_0} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_0}{\sigma_3 - \sigma_0} = \frac{\psi}{2G}, \quad (X.53)$$

или компоненты скоростей ползучести пропорциональны девиаторным компонентам напряжений

$$\frac{\xi_1}{\sigma_1 - \sigma_0} = \frac{\xi_2}{\sigma_2 - \sigma_0} = \frac{\xi_3}{\sigma_3 - \sigma_0} = \lambda. \quad (X.54)$$

Соотношения (X.53) приводят к уравнениям, аналогичным уравнениям Генки (X.22):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_0 &= [\psi / (2G)] (\sigma_1 - \sigma_0); \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_0 &= [\psi / (2G)] (\sigma_2 - \sigma_0); \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_0 &= [\psi / (2G)] (\sigma_3 - \sigma_0). \end{aligned} \right\} \quad (X.55)$$

Нетрудно показать, что и в теории ползучести, как и в теории пластичности, физические уравнения (X.55) могут быть представлены в форме уравнений (X.35), т. е. записаны в виде

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E^*} [(1 + \nu^*) \sigma_1 - 3\nu^* \sigma_0] + \varepsilon_T \text{ и т. д.}, \quad (X.56)$$

где

$$\left. \begin{aligned} E^* &= \frac{E_{ci}}{1 + \frac{1-2\nu}{3E} E_{ci}}; \\ \nu^* &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1-2\nu}{3E} E_{ci}}{1 + \frac{1-2\nu}{3E} E_{ci}}. \end{aligned} \right\} \quad (X.56a)$$

Зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций может быть задана аналитически, например в форме (X.51), или при использовании теории старения и формулировке Ю. Н. Работнова, в виде изохронных кривых для фиксированного момента времени. В таком случае решение задачи ползучести при использовании теории старения ничем не отличается от решения упругопластической задачи.

Как уже указывалось выше, расчеты с учетом ползучести материала, основанные на применении теории старения (деформационная теория ползучести), дают достаточно точные результаты при простом или близком к простому нагружению. Кроме того, деформационная теория ползучести может быть использована для решения большого класса задач стационарной ползучести, где всегда реализуется простое нагружение, так как напряжения в детали при постоянных внешних нагрузках остаются постоянными. Заметим, что в деталях стационарных паровых турбин с длительными сроками эксплуатации процесс стационарной ползучести (перераспределение напряжений) заканчивается за относительно короткий промежуток времени. В этом случае для оценки длительной прочности может оказаться достаточным проведение расчета в стадии стационарной ползучести, если считать, что температурные напряжения, возникающие при переменных режимах, могут вызывать только упругопластическое деформирование, которое должно учитываться при оценке малоциклового прочностного состояния детали.

Х.4. РАСЧЕТ ДИСКОВ И РОТОРОВ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ. МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОСТИ

Решение прикладных задач с учетом пластичности и ползучести материала сопряжено со значительными трудностями. Точное решение имеют лишь некоторые простейшие из них. Ввиду этого большинство прикладных задач решается с помощью различных приближенных методов. Наиболее эффективными являются вариационные методы [79; 81], а также методы, основанные на сведениях физически нелинейной задачи, обусловленной учетом пластических деформаций или деформаций ползучести, к последовательности решения линейных задач с переменными параметрами упругости или дополнительными деформациями [11; 12; 15].

Остановимся подробнее на так называемом методе переменных параметров упругости с применением деформационной теории пластичности или ползучести. Этот метод был предложен А. А. Ильюшиным и развит в дальнейшем в работах И. А. Биргера. В основу метода положено представление физических уравнений деформационной теории пластичности в форме обобщенного закона Гука [см. уравнения (X.33)], в которых «параметры упругости» в отличие от обычных упругих параметров зависят от напряженно-деформированного состояния в точке.

Как известно [114; 172], решение задачи теории упругости сводится в общем случае к интегрированию системы дифференциальных уравнений, включающей: три уравнения равновесия; шесть уравнений совместности деформаций, связывающих относительные деформации с перемещениями; шесть физических уравнений обобщенного закона Гука. Интегрирование уравнений производится при краевых условиях, заданных в напряжениях или перемещениях.

Из трех названных групп уравнений первые две — уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций — являются справедливыми как для упругого состояния, так и для неупругого. Сохраняются неизменными для обоих состояний и условия на границе. Различными являются только физические уравнения третьей группы. Однако, если эти уравнения для неупругого состояния тела представить в форме обобщенного закона Гука, то формально в математической постановке задача деформационной теории пластичности или ползучести будет совпадать с задачей теории упругости с переменными параметрами и, следовательно, решение упругой задачи может быть использовано для решения задачи пластичности или ползучести. В последнем случае, однако, переменные параметры упругости являются неизвестными, так как сами зависят от искомых значений деформаций или напряжений. Поэтому расчет в этом случае проводится методом последовательных приближений.

Дадим изложение метода переменных параметров упругости на примере решения упругопластической задачи для вращающегося неравномерно нагретого диска произвольного профиля. Уравнения (X.33) в этом случае примут вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E^*} [\sigma_r - \nu^* \sigma_\varphi] + \varepsilon_T, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E^*} [\sigma_\varphi - \nu^* \sigma_r] + \varepsilon_T, \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.57})$$

где переменные параметры упругости равны

$$E^* = \frac{\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}{1 + \frac{1-2\nu}{3E} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}; \quad \nu^* = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1-2\nu}{3E} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}{1 + \frac{1-2\nu}{3E} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}. \quad (\text{X.57a})$$

Для упругопластического расчета диска будем использовать решение, полученное в п. IX.2.

В исходном приближении принимаем $E_{(0)}^* = E$ и $\nu_{(0)}^* = \nu$, т.е. переменные параметры упругости равные значениям модуля упругости и коэффициента Пуассона при заданной температуре, переменной по радиусу. По уравнениям (IX.18) с учетом заданных граничных условий вычисляем упругие значения напряжений $\sigma_r(0)$ и $\sigma_\varphi(0)$ и интенсивность напряжений $\bar{\sigma}_i(0)$ в каждой расчетной точке

диска. Интенсивность напряжений вычисляем по формуле (X.9a), которая в данном случае примет вид

$$\bar{\sigma}_i = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2} - \sigma_r \sigma_\varphi. \quad (\text{X.58})$$

Далее определяем интенсивность деформаций в первом приближении

$$\varepsilon_{i(1)} = \bar{\sigma}_{i(0)} / E_{(0)}^* = \bar{\sigma}_{i(0)} / E.$$

По диаграмме деформирования находим соответствующее значение интенсивности напряжений $\sigma_{i(1)}$ в первом приближении (рис. X.4). Заметим, что диаграмма деформирования может быть задана и таблично.

По значениям интенсивностей $\sigma_{i(1)}$ и $\varepsilon_{i(1)}$, используя формулы (X.57a), вычисляем переменные параметры упругости $E_{(1)}^*$ и $\nu_{(1)}^*$ в первом приближении. Затем повторяем упругий расчет диска по уравнениям (IX.18) при новых значениях параметров. В результате находим напряжения $\sigma_r(1)$ и $\sigma_\varphi(1)$ в первом приближении. Вычисляем интенсивность напряжений $\bar{\sigma}_{i(1)}$ по формуле (X.58) и интенсивность деформаций во втором приближении

$$\varepsilon_{i(2)} = \bar{\sigma}_{i(1)} / E_{(1)}^*$$

По диаграмме деформирования находим соответствующее значение интенсивности напряжений $\sigma_{i(2)}$ (рис. X.4) и по формулам (X.57a) определяем новые значения переменных параметров упругости $E_{(2)}^*$ и $\nu_{(2)}^*$. Выполнив следующий расчет, находим напряжения $\sigma_r(2)$ и $\sigma_\varphi(2)$ во втором приближении и т.д.

Вычисления последовательных приближений необходимо продолжать до тех пор пока напряжения или модуль E^* в некотором последующем приближении будут достаточно близки к их значениям в предыдущем приближении. Точность расчета задается в виде отношения

$$\left| \frac{E_{(j)}^* - E_{(j-1)}^*}{E_{(j)}^*} \right| \leq \delta,$$

где j — номер приближения, δ — заданная точность вычислений.

Расчеты показывают, что сходимость метода весьма быстрая. Обычно необходимая точность достигается уже в третьем приближении.

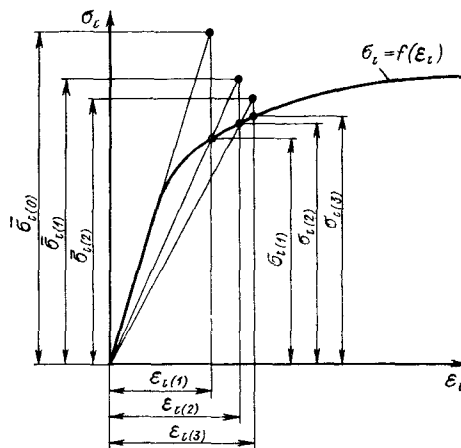


Рис. X.4 Процесс последовательных приближений в методе переменных параметров упругости

В случае, если материал считается несжимаемым, что вполне допустимо при расчете тонких дисков, то формулы (X.57a) упрощаются и переменные параметры упругости будут:

$$E^* = \sigma_i / \varepsilon_i; \quad \nu^* = 0,5. \quad (X.59)$$

Принцип метода переменных параметров полностью сохраняется и при расчете дисков в условиях ползучести с применением деформационной теории. В том случае, если используется теория старения в формулировке Ю. Н. Работнова, то зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций для фиксированного момента времени задается семейством изохронных кривых для необходимого диапазона температур. Если же теория старения используется в виде аналитической зависимости, например в виде (X.50), то вычисление интенсивности напряжений в каждом приближении производится по формуле:

$$\sigma_{i(j)} = \left[\frac{\varepsilon_{i(j)}}{\Omega(t)} \right]^{1/m},$$

где интенсивность деформаций находится, как и выше.

$$\varepsilon_{i(j)} = \frac{\bar{\sigma}_{i(j-1)}}{E_{(j-1)}^*}.$$

Далее по формулам (X.57a) или (X.59) определяются переменные параметры упругости $E_{(j)}^*$ и $\nu_{(j)}^*$ и расчет продолжается по вышеизложенному алгоритму. Метод переменных параметров упругости в совокупности с методом последовательных приближений (см. п. IX.2) представляют алгоритм, удобный для программирования на ЭВМ.

На рис. X.5 приведены кривые распределения напряжений по радиусу диска в условиях упругости и стационарной ползучести. Диск изготовлен из роторной стали Р2М [155], равномерно нагрет до температуры 530 °С и имеет частоту вращения $n = 3000$ об/мин. Размеры диска, а также нагрузки на внешнем и внутреннем радиусах указаны на рисунке. Из рассмотрения кривых следует, что при ползучести происходит существенное перераспределение напряжений. Так, на внутреннем радиусе максимальные окружные напряжения снижаются примерно на 25%.

Метод переменных параметров упругости применим и в совокупности с численными методами, например вариационно-разностным или методом конечных элементов [15; 89]. В этом случае необходимо, чтобы численное решение упругой задачи было построено с учетом переменного модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν . Решение физически нелинейных задач не представляет в этом случае принципиальных трудностей.

Весьма эффективны такие методы для расчета «толстых» дисков, цельнокованных и сварных роторов. Для этого может быть использовано решение осесимметричной задачи теории упругости методом конечных элементов, построенное с учетом переменных

упругих параметров [15; 158]. Физические уравнения (X.33) или (X.56) для осесимметричного напряженного состояния могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E^*} [(1 + \nu^*) \sigma_r - 3\nu^* \sigma_0] + \varepsilon_T; \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E^*} [(1 + \nu^*) \sigma_\varphi - 3\nu^* \sigma_0] + \varepsilon_T; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E^*} [(1 + \nu^*) \sigma_z - 3\nu^* \sigma_0] + \varepsilon_T; \\ \gamma_{rz} &= \frac{2(1 + \nu^*)}{E^*} \tau_{rz}, \end{aligned} \right\} \quad (X.60)$$

где E^* и ν^* — переменные параметры упругости, определяемые формулами (X.57a) или (X.59).

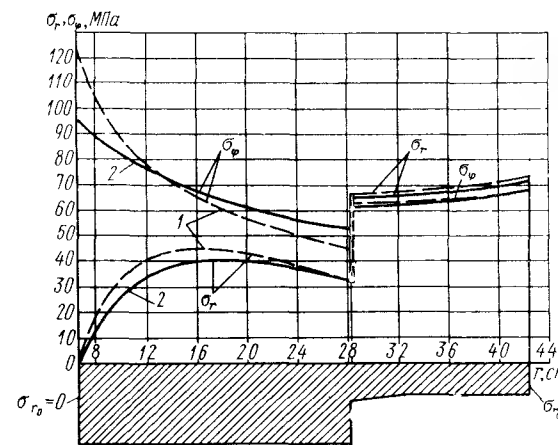


Рис. X.5 Распределение напряжений в диске:
1 — при упругом деформировании, 2 — при стационарной ползучести

Алгоритм расчета по методу переменных параметров упругости в этом случае ничем не отличается от вышеизложенного. В качестве исходного приближения также принимаются напряжения $\sigma_r(0)$, $\sigma_\varphi(0)$, $\sigma_z(0)$ и $\tau_{rz}(0)$, полученные при упругом расчете, когда $E_{(0)} = E$ и $\nu_{(0)} = \nu$. По значениям полученных напряжений в каждом конечном элементе вычисляется интенсивность напряжений $\bar{\sigma}_i(0)$. Интенсивность в этом случае вычисляется по формуле

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2}. \quad (X.61)$$

Далее определяется интенсивность деформаций $\varepsilon_{i(1)}$ и по обобщенной кривой деформирования находится соответствующее значение интенсивности напряжений $\sigma_{i(1)}$. Вычислив новые значе-

ния переменных параметров упругости в каждом конечном элементе, производят расчет следующего приближения и т. д.

При расчете в условиях ползучести связь между интенсивностями напряжений и деформаций, как и выше, задается изохронной кривой для фиксированного момента времени.

Х.5. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ И ПОЛЗУЧЕСТИ. МЕТОД НЕЙБЕРА

Для оценки прочности рабочих лопаток, в частности хвостовых соединений, а также дисков и роторов необходимо знать максимальные напряжения в зонах концентрации при упругих и упруго-пластических деформациях и при ползучести. Значительное место в этих случаях отводится экспериментальным методам, в которых напряжения могут быть определены на моделях методом тензометрирования, поляризационно-оптическими методами, к числу которых относятся методы фотоупругости и фотоползучести [3, 34; 76; 112]. С развитием универсальных численных методов максимальные напряжения в зонах концентрации могут быть определены также расчетным путем, например методом конечных элементов, методом потенциала и т. д. [37, 68; 156, 158]. Однако для приближенных расчетов важно иметь упрощенные методы определения максимальных напряжений в зонах концентрации, позволяющие хотя бы с ограниченной точностью дать оценку прочности той или иной конструкции.

Одним из известных приближенных методов оценки концентрации напряжений при нелинейных связях между напряжениями и деформациями является метод Нейбера [124]. В основу этого метода положена зависимость, связывающая коэффициенты концентрации напряжений и деформаций при упругопластическом деформировании с коэффициентом концентрации при упругом деформировании

$$k_p k_{ep} = k^2, \quad (\text{X.62})$$

где k и k_p — коэффициенты концентрации напряжений при упругом и упругопластическом деформировании; k_{ep} — коэффициент концентрации деформаций в упругопластическом состоянии.

Указанная зависимость установлена Г. Нейбером для напряженного состояния сдвига, однако предполагается, что конечные результаты могут быть распространены и на другие случаи. Так, в работах [3; 180], путем сопоставления с экспериментальными данными, зависимость Нейбера подтверждена для одноосного растяжения и изгиба полосы с отверстием и симметричными вырезами, а также для двухосного растяжения пластины с отверстием.

При распространении зависимости Нейбера на произвольное напряженное состояние необходимо использовать какой-либо

из известных критериев установления эквивалентных напряжений (см. п. I.5). Имея в виду сформулированное выше предположение (см. п. X.2) о постоянной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций для любого напряженного состояния при упругопластическом состоянии, здесь в качестве эквивалентных величин будем принимать интенсивности напряжений и деформаций. Тогда в общем случае зависимость (X.62) запишется в виде

$$\sigma_i^p \max \epsilon_i^p \max = k^2 \sigma_i^p \text{ном} \epsilon_i^p \text{ном}, \quad (\text{X.63})$$

где $\sigma_i^p \text{ном}$ и $\sigma_i^p \max$ — интенсивности номинальных и максимальных напряжений в зонах концентрации при упругопластическом деформировании; $\epsilon_i^p \text{ном}$ и $\epsilon_i^p \max$ — интенсивности номинальных и максимальных деформаций в зонах концентрации в упругопластическом состоянии

Интенсивности как номинальных, так и максимальных значений связаны между собой обобщенной кривой деформирования материала

$$\sigma_i^p = f(\epsilon_i^p). \quad (\text{X.64})$$

Зависимость (X.63) и уравнение обобщенной кривой деформирования (X.64) образуют систему двух уравнений, из которой могут быть определены неизвестные значения $\sigma_i^p \max$ и $\epsilon_i^p \max$. В общем виде эта система может быть решена графическим методом [178], для чего на обобщенную диаграмму упругопластического деформирования (рис X 6) следует нанести гиперболу, уравнение которой имеет вид

$$\sigma_i^p = \frac{k^2 \sigma_i^p \text{ном} \epsilon_i^p \text{ном}}{\epsilon_i^p}. \quad (\text{X.65})$$

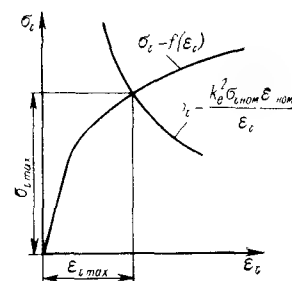


Рис X 6 Определение максимальных напряжений путем решения уравнений графическим методом

Координаты точки пересечения построенной гиперболы с обобщенной кривой деформирования определяют значения $\sigma_i^p \max$ и $\epsilon_i^p \max$.

В п. X.3 было показано, что решения задач ползучести с использованием теории старения эквивалентны решению упругопластических задач. Это позволяет обобщить изложенный здесь метод для определения максимальных напряжений и при ползучести. Если теория старения используется в формулировке Ю. Н. Работнова (см. п. X.3), то в этом случае решение задачи ползучести для фиксированного момента времени с использованием зависимости (X.63) ничем не отличается от вышеизложенного решения

упругопластической задачи. Нелинейная связь между напряжениями и деформациями задается в этом случае в виде изохронной кривой для заданного момента времени

$$\sigma_i^c = f(\epsilon_i^c t). \quad (X.66)$$

Чтобы исследовать изменение напряжений во времени при ползучести, следует выполнить расчеты для ряда значений времени t .

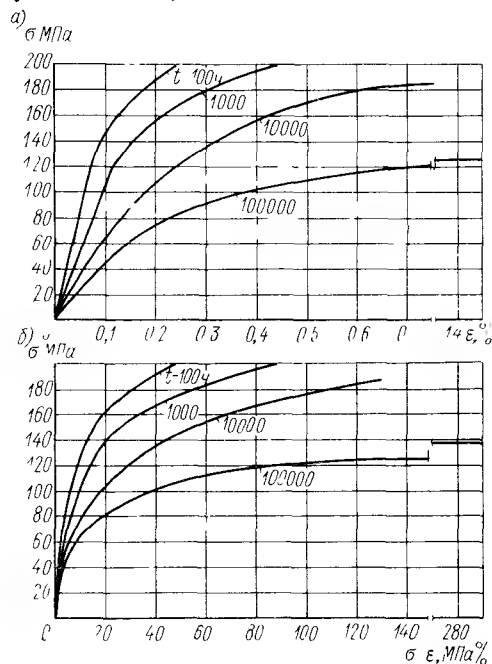


Рис. X.7. Изохронные кривые в координатах σ — ϵ (а) и σ — $\sigma_{\bar{\epsilon}}$ (б) для роторной стали Р2М при температуре 525 °С

Для практических расчетов кривые упругопластического деформирования σ — ϵ или семейство изохронных кривых для фиксированных моментов времени удобно перестраивать в координатах σ — $\sigma_{\bar{\epsilon}}$ [182]. Тогда, вычисляя в уравнении (X.63) правую часть, где все величины известны, по полученным кривым сразу находим максимальные значения напряжений $\sigma_{i \max}^p$, а затем $\epsilon_{i \max}^p$. На рис. X.7 такое построение выполнено для изохронных кривых роторной стали Р2М при температуре 525 °С¹.

Если теория старения используется в виде аналитической зависимости, например в форме степенного закона

$$\epsilon_i = \sigma_i / E + \Omega(t) \sigma_i^m, \quad (X.67)$$

то, подставляя ее в (X.63), находим

$$k_c^2 [1 + \Omega(t) E k_c^{m-1} \sigma_{i \text{ ном}}^{m-1}] = k^2 [1 + \Omega(t) E \sigma_{i \text{ ном}}^{m-1}], \quad (X.68)$$

где $k_c = \sigma_{i \max} / \sigma_{i \text{ ном}}$ — коэффициент концентрации напряжений при ползучести.

Уравнение (X.68) позволяет вычислить коэффициент концентрации при ползучести k_c для любого фиксированного момента времени. При установившейся ползучести $k_c = \text{const}$, $\sigma_{i \text{ ном}} = \text{const}$. Тогда, дифференцируя (X.68), найдем

$$k_c = k^{2/(m+1)}. \quad (X.69)$$

Используя зависимость (X.69), можно построить безразмерную диаграмму [180] для оценки концентрации напряжений при ползучести в зависимости от показателя ползучести m (рис. X.8). Следует иметь в виду, что формула (X.69) может дать несколько большую погрешность, чем графическое решение, так как показатель ползучести m , зависящий от уровня напряжений, принимается здесь постоянным.

В ряде работ проводилось сопоставление расчетных и экспериментальных значений коэффициентов концентрации на контурах галтелей плоских моделей при упругопластическом деформировании и при ползучести [3; 88; 178; 180]. Установлено, что, как правило, метод Нейбера дает верхнюю оценку максимальных напряжений, действующих в зоне концентрации напряжений. Для оценки точности метода Нейбера следовало бы найти нижнюю границу максимальных напряжений. Это позволяет выполнить другой простой метод, также предложенный Нейбером [125]. Связь между номинальной и максимальной деформациями при упругопластическом деформировании запишем в виде [182]

$$\epsilon_{\max}^p = k_{ep} \epsilon_{\text{ном}}^p, \quad (X.70)$$

где k_{ep} — коэффициент концентрации деформаций в упругопластическом состоянии.

Очевидно, что

$$\epsilon_{\max}^p > k \epsilon_{\text{ном}}^p,$$

так как $k = k_{\epsilon} < k_{ep}$, где k и k_{ϵ} — коэффициенты концентрации напряжений и деформаций в упругом состоянии.

Тогда деформация

$$\bar{\epsilon}_{\max}^p = k \epsilon_{\text{ном}}^p \quad (X.71)$$

будет соответствовать нижней оценке в зоне концентрации напряжений. Напряжения $\bar{\sigma}_{\max}^p$, соответствующие деформации $\bar{\epsilon}_{\max}^p$ определяются по кривой упругопластического деформирования. Подобная оценка нижней границы максимальных напряжений в зоне концентрации может быть распространена и на ползучесть.

Проведенное сопоставление максимальных напряжений на контуре угловой плоской модели, соответствующих верхней и ниж-

¹ По данным ЦКТИ им. И. И. Ползунова.

ней границам, показывает, что их расхождение не превышает 10% [182]. Это и определяет точность метода Нейбера.

Из зависимости (X.63) следует, что номинальные напряжения и деформации должны определяться при упругопластическом состоянии детали или при ползучести, что в некоторых случаях может привести к определенным усложнениям применения метода Нейбера. Так, например, если в качестве номинальных напряжений приняты суммарные напряжения растяжения и изгиба, то возникает необходимость решения упругопластической задачи при совместном действии растяжения и изгиба [182]. Положение существенным образом упрощается, если номинальные напряжения не превосходят предела текучести материала или не выходят за пределы начальных прямолинейных участков изохронных кривых, где имеет место линейная ползучесть (рис. X.7, а). В этом случае не происходит перераспределения номинальных напряжений и величина их остается неизменной. Тогда зависимость (X.63) для одноосного напряженного состояния может быть записана в виде [182]

$$\sigma_{\max}^p \varepsilon_{\max}^p = \sigma_{\max}^2 / E_c, \quad (X.72)$$

где $\sigma_{\max}$ — максимальные напряжения в зоне концентрации при упругом состоянии, E_c — секущий модуль, равный тангенсу угла наклона начального прямолинейного участка изохронной кривой в задачах ползучести или модулю упругости ($E_c = E$) в упругопластических задачах.

С использованием зависимости (X.72) при указанных выше условиях выбор номинальных напряжений не имеет значения, так как они не входят в эту зависимость.

Х.6. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ ЗАДАЧИ

Концентрация напряжений в дисках с эксцентричным отверстием при ползучести

Напряженное состояние в турбинном диске с эксцентричным отверстием близко к напряженному состоянию в бесконечной плоскости с круговым отверстием, растягиваемой в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Как известно [172], концентрация напряжений в пределах упругости в такой плоскости определяется по формуле

$$k = 3 - \sigma_2 / \sigma_1 \text{ при } \sigma_1 \geq \sigma_2. \quad (X.73)$$

где σ_1 и σ_2 — главные напряжений, действующие на бесконечную плоскость в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Если принять $\sigma_1 = \max(\sigma_r, \sigma_\phi)$ и $\sigma_2 = \min(\sigma_r, \sigma_\phi)$, где σ_r и σ_ϕ — радиальные и окружные напряжения в диске в зоне расположения эксцентричного отверстия, вычисленные в предположении отсутствия этого отверстия, то формулу (X.73) можно

применить и для оценки концентраций напряжений в диске. Однако этой формулой можно пользоваться в том случае, если отсутствует взаимное влияние отверстий на величину коэффициента концентрации.

Для учета взаимного влияния отверстий можно воспользоваться формулой И. Г. Тевековского, которая имеет вид [167]

$$k = 3 - \sigma_2 / \sigma_1 - d/l \text{ при } \sigma_1 \geq \sigma_2, \quad (X.74)$$

где d — диаметр эксцентричного отверстия; l — кратчайшее расстояние между контурами отверстий. При большом диаметре эксцентричного отверстия, а также при большом их числе коэффициент концентрации напряжений очевидно следует определять с учетом ослабления сечения [137]

$$k = (3 - \sigma_2 / \sigma_1 - d/l) / (1 - \alpha), \quad (X.75)$$

где $\alpha = F_{\text{отв}} / F_{\text{полн}}$ — коэффициент ослабления сечения; $F_{\text{отв}}$ — площадь отверстий в опасном (диаметральном или цилиндрическом) сечении диска, $F_{\text{полн}}$ — площадь этого сечения без учета отверстий.

Для оценки концентрации напряжений в диске в условиях ползучести применим изложенный выше метод Нейбера [180]. Будем считать, что на контуре свободного отверстия реализуется одноосное напряженное состояние. Тогда зависимость (X.63) можно записать в виде

$$\sigma_{1\max}^c \varepsilon_{1\max}^c = k^2 \sigma_1^c \varepsilon_1^c, \quad (X.76)$$

где $\sigma_{1\max}^c$ и $\varepsilon_{1\max}^c$ — максимальные значения напряжений и деформаций на контуре эксцентричного отверстия в условиях ползучести, σ_1^c и ε_1^c — наибольшие значения номинальных напряжений и деформаций (окружные или радиальные), вычисленные в диске в условиях ползучести в предположении отсутствия эксцентричного отверстия.

Подсчитав правую часть в уравнении (X.76), по изохронным кривым, перестроенным в координатах $\sigma - \sigma \varepsilon$, находим значение максимального напряжения на контуре эксцентричного отверстия. При установившейся ползучести для оценки концентрации напряжений в зоне эксцентричного отверстия можно воспользоваться формулой (X.69) или диаграммой, приведенной на рис. X.8. Для этого достаточно знать коэффициент концентрации напряжений в диске при упругом деформировании и показатель ползучести m .

В работе [180] проведено сопоставление расчетных значений максимальных напряжений, вычисленных с помощью метода Нейбера, с экспериментальными, полученными методом фотоползучести в пластинах с круговым отверстием при различных соотношениях главных напряжений σ_2 / σ_1 . Анализ показывает, что расхождения между расчетными и экспериментальными значениями не превышают 10%. Более подробные исследования концентрации напряжений в турбинных дисках вблизи эксцентричных отверстий

с проведением анализа результатов разгонных испытаний приведены в работе [137]. Аналогичным образом могут быть определены максимальные напряжения на контуре эксцентричного отверстия и в условиях упругопластического деформирования.

Концентрация напряжений в хвостовых соединениях при ползучести

Для исследования концентрации напряжений в хвостовых соединениях при ползучести применим также метод Нейбера.

Т-образное хвостовое соединение. Как было показано в п. VII 2, максимальные напряжения в хвосте лопатки имеют место на контуре галтели, радиус которой r (см. рис. VII.1). Коэффициент концентрации напряжений в этой галтели при упругих деформациях в соответствии с (VII.13) определяется отношением

$$k = \sigma_{\max} / \sigma_p.$$

Для определения максимальных напряжений при ползучести воспользуемся зависимостью (X.63), которая в данном случае для одноосного напряженного состояния, имеющего место на контуре галтели, примет вид [178]

$$\sigma_{\max}^c \epsilon_{\max}^c = k^2 \sigma_{\text{ном}}^c \epsilon_{\text{ном}}^c, \quad (\text{X.77})$$

где $\sigma_{\max}^c$ и $\epsilon_{\max}^c$ — максимальные напряжения и деформации на контуре галтели при ползучести.

Номинальное напряжение в уравнении (X.77) будет равно растягивающему напряжению в шейке хвоста, т. е. $\sigma_{\text{ном}}^c = \sigma_p$. Тогда значение номинальной деформации $\epsilon_{\text{ном}}^c$ находим по изохронной кривой для фиксированного момента времени. Подсчитав правую часть в уравнении (X.77), находим $\sigma_{\max}^c$. Коэффициент концентрации в галтели Т-образного хвоста при ползучести k_c определяется так:

$$k_c = \sigma_{\max}^c / \sigma_p, \quad (\text{X.78})$$

При установившейся ползучести коэффициент концентрации k_c можно вычислить по формуле (X.69) или найти по диаграмме, приведенной на рис. X.8, если известны показатель ползучести материала m и коэффициент концентрации напряжений в упругом состоянии.

В ободе диска Т-образного соединения максимальные напряжения при упругом деформировании определялись приближенно при рассмотрении его плоского поперечного сечения, т. е. не учитывалось действие окружных напряжений (см. п. VII.2). Было показано, что максимальные напряжения имеют место в галтели верхнего угла паза и вычисляются по формулам (VII.20) или

(VII.20a). В соответствии с (VII.22) коэффициент концентрации в этой галтели

$$k = \sigma_{\max} / \sigma_{\Sigma}.$$

В этой формуле напряжения $\sigma_{\text{ном}} = \sigma_{\Sigma} = \sigma_p + \sigma_{\Pi}$ представляют собой сумму напряжений растяжения и изгиба в сечении $I—I$ (см. рис. VII.1).

Как уже указывалось, при определении максимальных напряжений с использованием зависимости (X.63) номинальные напряжения и деформации должны быть вычислены с учетом упругопластических деформаций или в условиях ползучести. В работе [182] показано, что такая задача при растяжении полосы с изгибом может быть решена графо-аналитическим методом в сочетании с методом последовательных приближений. Тогда дальнейшая процедура определения максимальных напряжений по методу Нейбера будет аналогична описанной для хвоста лопатки. Положение существенным образом упрощается, если, как отмечалось в предыдущем параграфе, суммарные номинальные напряжения σ_{Σ} не выходят за пределы прямолинейных начальных участков изохронных кривых ползучести. Тогда вместо зависимости (X.77) можно воспользоваться зависимостью (X.72), в которой правую часть можно вычислить сразу, по известным максимальным напряжениям на контуре галтели при упругом деформировании. Далее максимальные напряжения при ползучести $\sigma_{\max}^c$ определяются, как и выше, по изохронным кривым в координатах $\sigma—\sigma\epsilon$. Как правило, уровень номинальных напряжений в реальных конструкциях хвостовых соединений позволяет использовать зависимость (X.72) для определения максимальных напряжений в условиях ползучести. Необходимо отметить, что определение напряжений указанным методом возможно только в том случае, если считать, что реактивные усилия в соединениях заплечиков остаются постоянными при ползучести или изменяются незначительно.

При установившейся ползучести коэффициент концентрации может быть вычислен также по формуле (X.69) или определен по диаграмме, приведенной на рис. X.8. В этом случае в качестве номинальных напряжений принимаются растягивающие напряжения σ_p^I в сечении $I—I$ [88]. Тогда условно коэффициент концентрации в галтели определяется так:

$$k_I = \sigma_{\max} / \sigma_p^I. \quad (\text{X.79})$$

Если максимальные напряжения при упругом деформировании определены в ободе диска путем решения осесимметричной задачи, например методом конечных элементов, как это было показано в примере п. VII.2, то на поверхности галтели будут известны главные напряжения, действующие в окружном направлении и

перпендикулярном к нему. В этом случае для вычисления максимальных напряжений при ползучести также можно применить метод Нейбера в виде зависимости (X.72), перейдя к интенсивностям напряжений и деформаций, т. е.

$$\sigma_{i \max}^c \epsilon_{i \max}^c = \sigma_{i \max}^2 / E_c, \quad (\text{X.80})$$

где $\sigma_{i \max} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$ и т. д.

Сопоставление расчетных значений максимальных напряжений при ползучести с экспериментальными значениями в хвостах рабочих лопаток и ободах дисков, полученными методом фотоползучести и методом фотоупругих покрытий, показывает, что расхождения между ними находятся в пределах 10–20% [88; 178; 182]. При этом следует учитывать, что погрешность самих поляризационно-оптических методов может достигать 10%. В работах [181; 183] проведено сопоставление расчетных и экспериментальных данных по длительной прочности плоских моделей Т-образных хвостов и ободов дисков. Из сопоставлений следует, что расхождения между расчетными значениями длительной прочности, определенными с помощью метода Нейбера и экспериментальными, не превышают 10%.

В качестве примера вычислим коэффициенты концентрации и максимальные напряжения при установившейся ползучести в хвосте рабочей лопатки и в ободе диска Т-образного хвостового соединения, расчет которого в пределах упругости приведен на стр. 295. Дополнительно укажем, что рабочая лопатка изготовлена из стали 15Х11МФ [155], а диск — из стали Р2М [155]. Рабочая температура составляет 525 °С. Для стали 15Х11МФ при температуре 525 °С показатель ползучести можно принять равным $m = 3,0$, а для стали Р2М — $m = 2,85$ ¹. Тогда, имея в виду, что в хвосте рабочей лопатки коэффициент концентрации при упругом деформировании $k = 4,55$ (см. п. VII.2), по диаграмме (рис. X.8) находим $k_c = 2,0$, т. е. при ползучести за счет перераспределения напряжений коэффициент концентрации снижается более чем в 2 раза.

В ободе диска максимальные напряжения в галтели верхнего угла паза $\sigma_{\max} = 356,3$ МПа (см. п. VII.2). Имея в виду, что растягивающие напряжения в сечении I—I равны $\sigma_p^I = 42,4$ МПа, найдем условный коэффициент концентрации $k_I = 356,3/42,4 = 8,4$. Тогда по диаграмме (рис. X.8) в соответствии с указанным выше значением показателя ползучести находим $k_I = 3,0$. Максимальные напряжения в галтели с учетом ползучести $\sigma_{\max}^c = k_I \sigma_p^I = 127$ МПа. Вычислим для сравнения максимальные напряжения в этой галтели, используя зависимость (X.72).

Воспользуемся изохронными кривыми для стали Р2М, приведенными на рис. X.7. Секущий модуль начального прямолинейного участка изохронной кривой для $t = 10^5$ $E_c = 4 \cdot 10^2$ МПа/%. Тогда $\sigma_{\max}^c \epsilon_{\max}^c = \sigma_{\max} / E_c = 316$. По кривой $\sigma - \sigma \epsilon$ для $t = 10^5$ ч находим $\sigma_{\max}^c = 140$ МПа. Т. е. значения напряжений, определенные с использованием формулы (X.69) и зависимости (X.72), близки между собой.

Вильчатое хвостовое соединение. В п. VII.3 было показано, что максимальные напряжения в хвосте рабочей лопатки имеют место на контуре заклепочного отверстия и определяются по формуле (VII.42)

$$\sigma_{\max} = k \sigma_p$$

Будем считать, что при ползучести центробежная нагрузка, действующая на хвостовое соединение, распределяется равномерно между верхним и нижним рядами заклепок. Принимая, что контактное давление между заклепкой и хвостом лопатки распределено по контуру отверстия по закону косинуса (см. рис. VII.10,з), будем также считать, что в зоне действия максимальных напряжений на контуре отверстия (сечение I—I, рис. VII.9) реализуется одноосное напряженное состояние. Тогда для определения максимальных напряжений в условиях ползучести можно использовать зависимость Нейбера, записанную в виде (X.77). Номинальное напряжение в данном случае равно растягивающему напряжению в сечении I—I хвоста лопатки, т. е. $\sigma_{\text{ном}}^c = \sigma_p^I$, и определяется по формуле (VII.23). Найдя, как и выше, для заданного номинального напряжения соответствующее значение $\epsilon_{\text{ном}}^c$ и подсчитав правую часть уравнения (X.77), по изохронным кривым в координатах $\sigma - \sigma \epsilon$ определяем максимальное напряжение $\sigma_{\max}^c$ на контуре заклепочного отверстия в условиях ползучести. При установившейся ползучести для определения коэффициента концентрации можно использовать формулу (X.69) или диаграмму на рис. X.8.

Перейдем далее к оценке максимальных напряжений в гребнях обода диска. Очевидно, что эта задача близка к рассмотренной выше задаче о концентрации напряжений в диске с эксцентричным отверстием. Тогда максимальные напряжения на контуре заклепочных отверстий можно найти применяя зависимость Нейбера [см. формулу (X.76)]. Многочисленные расчеты дисков показывают, что при ползучести радиальные и окружные напряжения вблизи обода остаются практически неизменными, т. е. имеет место линейная ползучесть. В этом случае можно считать, что номинальные напряжения, принятые при оценке максимальных напряжений в гребнях обода диска в условиях упругости, будут оставаться неизменными в условиях ползучести.

В п. VII.3 было показано, что максимальные напряжения на контуре нижнего ряда заклепочных отверстий могут быть вычис-

¹ По данным ЦКТИ им. И. И. Ползунова.

лены по формуле (VII.45). С учетом сказанного выше определение максимальных напряжений на контуре этих отверстий в условиях ползучести с применением зависимости Нейбера будет аналогично определению максимальных напряжений на контуре эксцентричных отверстий в диске. Здесь, как и в хвосте лопатки, принимается, что в месте действия максимальных напряжений на контуре заклепочного отверстия (сечение $II-II$, рис. VII.9) реализуется одноосное напряженное состояние. При установившейся ползучести, как и выше, коэффициент концентрации можно вычислить по формуле (X.69) или найти по диаграмме, приведенной на рис. X.8.

Приближенно, применяя метод Нейбера, можно оценить максимальные напряжения и на контуре верхнего ряда заклепочных отверстий. Как было показано (см. п. VII.3), максимальные напряжения на контуре этих отверстий можно вычислить по формулам (VII.46) и (VII.47). Принимая номинальные напряжения в этих формулах неизменными в условиях ползучести метод определения максимальных напряжений остается прежним.

Елочное хвостовое соединение. Будем искать максимальные напряжения при ползучести в елочном хвостовом соединении, возникающие от растяжения статической центробежной нагрузкой. Решение этой задачи в общем случае представляет значительные трудности. Во-первых, растягивающие напряжения в шейках хвоста лопатки и выступа диска, а следовательно, и максимальные напряжения, будут зависеть от распределения нагрузки по зубьям хвостового соединения, которое изменится в условиях ползучести. Во-вторых, как было показано в п. VII.4, максимальные напряжения в первой, наиболее нагруженной, шейке хвоста существенным образом зависят от общей неравномерности распределения напряжений, обусловленной влиянием профильной части лопатки. Эта неравномерность также изменяется в условиях ползучести материала. Все это приводит к необходимости одновременного учета многих факторов, влияющих на максимальные напряжения в елочном хвостовом соединении.

Распределение нагрузки по зубьям елочного хвостового соединения в условиях упругопластического деформирования и ползучести рассмотрено в работах [165; 166], а в работе [60] кроме этого проведено еще и исследование напряженного состояния.

Здесь дадим приближенную оценку максимальных напряжений при ползучести в первой, наиболее нагруженной, шейке хвоста лопатки и в последней шейке выступа диска, принимая, что нагрузка по зубьям распределена равномерно или так, что напряжения смятия на контактных площадках всех зубьев будут равны (см. п. VII.4). Кроме того, примем, что на поверхности впадин реализуется одноосное напряженное состояние. При таких условиях для решения поставленной задачи можно применить метод Нейбера. В соответствии с формулой (VII.69) максимальные на-

пряжения в упругом состоянии на поверхности впадины хвоста или выступа диска определяются так:

$$\sigma_{\max} = k\sigma_p,$$

где σ_p — растягивающие напряжения в первой шейке хвоста или последней шейке выступа диска.

Приняв эти напряжения в качестве номинальных в зависимости (X.77), применим ее для определения максимальных напряжений в условиях ползучести. Очевидно, что в этом случае определение максимальных напряжений в указанных шейках елочного хвостового соединения ничем не будет отличаться от определения напряжений в Т-образном хвосте, что подробно рассмотрено выше.

Аналогичным образом могут быть определены максимальные напряжения в рассмотренных здесь хвостовых соединениях и при упругопластическом деформировании.

Удлинение рабочей лопатки при ползучести

Расчет рабочей лопатки в условиях ползучести в общем случае сводится к задаче растяжения совместно с изгибом и кручением закрученного стержня переменного сечения. В результате решения такой задачи можно найти распределение напряжений в сечениях лопатки и ее удлинение при ползучести. Однако решение этой задачи представляет известные трудности.

Практически при проектировании большой интерес представляет удлинение рабочих лопаток при ползучести, которое зависит в основном от растягивающих напряжений, вызванных центробежными силами. Если принять распределение растягивающих напряжений в сечениях лопатки равномерным, что допустимо, то их величина в процессе ползучести будет сохраняться неизменной. Определение удлинения в этом случае сводится к элементарным вычислениям. Для определения удлинения рабочей лопатки воспользуемся теорией старения в виде

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \Omega(t) \sigma^m.$$

Тогда интегрируя в пределах от 0 до l , найдем

$$\Delta l = \int_0^l \left[\frac{\sigma}{E} + \Omega(t) \sigma^m \right] dz,$$

где σ — растягивающие напряжения в сечениях лопатки, определяемые по формуле (III.4).

На участке установившейся ползучести можно принять (см. рис. X.2)

$$\Omega(t) = A + Bt,$$

где A и B — постоянные для данного материала при заданной температуре.

Формула для вычисления удлинения рабочей лопатки в этом случае примет вид

$$\Delta l = \frac{l}{E} \int_0^1 \sigma [1 + E(A + Bt) \sigma^{m-1}] d\zeta, \quad (X.81)$$

где $\zeta = z/l$ при $0 \leq \zeta \leq 1$, $0 \leq z \leq l$.

Постоянные A , B и m легко определяются, если известны скорости ползучести на установившемся участке кривой ползучести [116].

Указанные здесь приближенные методы оценки напряженного состояния в элементах ротора и рабочих лопатках основаны на деформационной теории пластичности и теории старения при ползучести и представляют собой решения при «простом» нагружении. Расчеты деталей турбомашин при «сложном нагружении» или в условиях нестационарной ползучести связаны с большими трудностями и могут быть выполнены лишь в отдельных случаях при определенных ограничениях [79; 81; 116; 169]. Важное место в проведении таких расчетов в последние годы начинают занимать универсальные численные методы [15; 37; 158].

Оценка прочности роторов и рабочих лопаток в условиях ползучести усложняется еще и тем, что они должны быть рассчитаны на определенную долговечность, т. е. на заданный ресурс эксплуатации, который для стационарных паровых турбин составляет 100—200 тыс. ч. В то же время данные по жаропрочным свойствам турбинных сталей на такой временной базе в настоящее время весьма ограничены.

Часть третья

ВИБРАЦИЯ ЛОПАТОК И ДИСКОВ

Глава XI

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

В гл. II указывалось, что с достаточной для практики точностью рабочие лопатки паровых турбин в большинстве случаев можно рассматривать как закрученные тонкостенные стержни переменного поперечного сечения, совершающие связанные изгибно-крутильные колебания. Изучение вопросов вибрации начнем с рассмотрения чисто изгибных, а в гл. XII — чисто крутильных колебаний лопаток постоянного поперечного сечения. Целесообразность такого рассмотрения объясняется следующими причинами:

1) для колебаний лопаток постоянного сечения имеются аналитические решения, позволяющие оценивать влияние различных факторов в общем виде;

2) в ряде случаев использование даже наиболее полной системы дифференциальных уравнений при представлении лопатки в виде тонкостенного стержня или применение метода конечных элементов не гарантирует совпадения экспериментальных и расчетных результатов из-за влияния технологических факторов (системы допусков при изготовлении лопаток, качества сборки лопаток на диск, характера соединения лопаток со связями и т. п.);

3) значительная часть результатов, полученных при изучении колебаний лопаток постоянного сечения (данные о величине пакетного множителя, эффективности установки связей, сравнительной возбудимости различных собственных форм, влиянии разброса в парциальных частотах лопаток и т. д.), остается справедливой и для закрученных лопаток переменного сечения.

XI.1. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТКИ

При выводе дифференциального уравнения изгибных колебаний лопатки используем следующие упрощающие предположения.

1. Пренебрегаем закрученностью лопатки, т. е. изменением угла установки по длине лопатки. Это позволяет считать, что

перемещения различных сечений лопатки при колебаниях происходят в одной плоскости.

2. Считаем, что центры тяжести и центры изгиба поперечных сечений совпадают. Это предположение вместе с предположением об отсутствии закрутки лопатки дает возможность рассматривать изгибные колебания независимо от крутильных.

3. Принимаем, что линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений, которая в рассматриваемом случае является упругой осью лопатки, является прямой, а амплитуда колебаний лопатки мала. Это предположение позволяет записать выражение для кривизны упругой оси лопатки $1/\rho$ в каждый момент времени в виде [159]

$$1/\rho = \partial^2 V / \partial z^2, \quad (\text{XI.1})$$

где z — координата, отсчитываемая вдоль оси лопатки; $V(z, t)$ — функция, определяющая зависимость прогиба различных точек упругой оси лопатки от координаты поперечного сечения z и времени t .

4. Полагаем, что размеры поперечных сечений лопатки малы по сравнению с ее длиной. Это дает возможность пренебречь влиянием перерезывающих сил и инерции вращения на деформацию лопатки и считать, что поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и в деформированном состоянии (гипотеза плоских сечений).

5. Пренебрегаем влиянием центробежных сил на собственные частоты лопаток.

6. Принимаем, что величина внутреннего и внешнего сопротивлений при колебаниях лопатки пропорциональна первой степени скорости с коэффициентом пропорциональности $2h$. Считаем, что величина коэффициента $2h$ мала по сравнению с частотой колебаний лопатки и неизменна по ее высоте. В п. II.6 отмечалось, что это предположение является приближенным, однако оно правильно описывает качественную картину колебаний при наличии сил сопротивления.

Часть принятых ограничений в дальнейшем будет снята и влияние первоначально неучтенных факторов подробно исследовано.

С учетом указанных выше предположений оказывается справедливым следующее дифференциальное уравнение:

$$EJ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = M, \quad (\text{XI.2})$$

где E — модуль упругости; J — момент инерции поперечного сечения; M — изгибающий момент, действующий в поперечном сечении лопатки.

За расчетную длину лопатки l принимаем длину ее рабочей части от стыка профиля с хвостом до вершины. Примем начало координат в месте стыка. Ось z направим вдоль упругой оси ло-

патки, а ось y — перпендикулярно к ней. Положительные направления осей, а также изгибающих моментов и перерезывающих сил Q изображены на рис. XI.1. Вырежем из лопатки элемент $ABCD$ длиной dz . Интенсивность внешней нагрузки, вызывающей колебания лопатки, обозначим $\varphi(z, t)$.

Интенсивность сил сопротивления в соответствии с принятым выше предположением такова:

$$-2h \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial V}{\partial t},$$

где γ/g и F — соответственно плотность материала лопатки и площадь ее поперечного сечения.

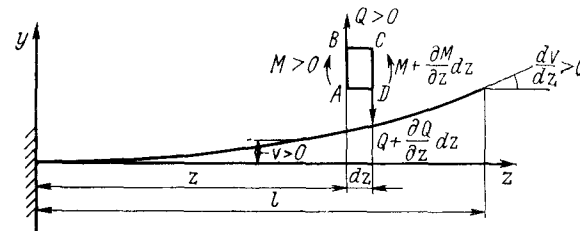


Рис. XI.1. Силы, действующие на элемент лопатки при колебаниях

Сила инерции, действующая на выделенный элемент при колебаниях

$$- \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} dz.$$

Спроектировав все приложенные к элементу $ABCD$ силы на ось y , получим:

$$- \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} dz + \varphi(z, t) dz - 2h \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial V}{\partial t} dz - \frac{\partial Q}{\partial z} dz = 0,$$

или

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = - \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2h \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial V}{\partial t} + \varphi(z, t). \quad (\text{XI.3})$$

Изгибающий момент относительно оси, проходящей через центр тяжести выделенного элемента, с учетом принятых предположений

$$Q dz - \frac{\partial M}{\partial z} dz = 0, \text{ или } \frac{\partial M}{\partial z} = Q. \quad (\text{XI.4})$$

Из уравнений (XI.3) и (XI.4) получаем

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = \frac{\partial Q}{\partial z} = - \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2h \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial V}{\partial t} + \varphi(z, t).$$

Учитывая уравнение (XI.2), найдем

$$\frac{\partial^2 \left(EJ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)}{\partial z^2} + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2h \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(z, t).$$

Если температура постоянна по высоте лопатки, то уравнение преобразуется к следующему:

$$E \frac{\partial^2 \left(J \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)}{\partial z^2} + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2h \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(z, t). \quad (\text{XI.5})$$

Наконец, если рассматривается лопатка постоянного сечения, то дифференциальное уравнение, описывающее колебания лопатки, примет следующий вид:

$$EJ \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2h \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(z, t). \quad (\text{XI.5a})$$

Перейдем к относительной координате, обозначив $\zeta = z/l$. Таким образом, при $0 \leq z \leq l$ будет выполняться соотношение $0 \leq \zeta \leq 1$. Уравнения (XI.5) и (XI.5a) примут следующий вид:

$$\frac{E}{l^4} \frac{\partial^2 \left(J \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} \right)}{\partial \zeta^2} + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2h \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(\zeta, t); \quad (\text{XI.6})$$

$$\frac{EJ}{l^4} \frac{\partial^4 V}{\partial \zeta^4} + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2h \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(\zeta, t). \quad (\text{XI.6a})$$

Для нахождения решения дифференциального уравнения (XI.6) или (XI.6a) необходимо задать начальные и граничные условия. Начальные условия состоят в том, что в момент времени $t = 0$ вибрирующая лопатка может находиться в деформированном состоянии, а каждый ее элемент — обладать определенной скоростью.

Таким образом, начальные условия имеют вид:

$$V = \theta(\zeta) \text{ и } \partial V / \partial t = \psi(\zeta) \text{ при } t = 0. \quad (\text{XI.7})$$

Что касается граничных условий, то при $\zeta = 0$ они будут зависеть от податливости заделки. Предполагая, что корневое сечение жестко заделано, запишем граничные условия в виде:

$$V = 0 \text{ и } \partial V / \partial \zeta = 0 \text{ при } \zeta = 0. \quad (\text{XI.8})$$

Используя также граничные условия на вершине лопатки при $\zeta = 1$, можем получить решение дифференциального уравнения (XI.6) или (XI.6a).

XI.2. УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТКИ

Под свободными понимают колебания, происходящие без воздействия внешних сил, а лишь вследствие того, что в начальный момент времени перемещения и скорости различных сечений

лопатки были отличны от нуля. Таким образом, в этом случае $\varphi(\zeta, t) = 0$ и дифференциальные уравнения (XI.6) и (XI.6a) примут следующий вид:

$$\frac{Eg}{F\gamma l^4} \frac{\partial^2 \left(J \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} \right)}{\partial \zeta^2} + 2h \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0; \quad (\text{XI.9})$$

$$\frac{EJg}{Fl^4\gamma} \frac{\partial^4 V}{\partial \zeta^4} + 2h \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \text{ при } 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (\text{XI.9a})$$

Уравнения (XI.9) или (XI.9a) являются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Решение этих уравнений следует искать в виде ряда [159]:

$$V(\zeta, t) = \sum T(t) v(\zeta), \quad (\text{XI.10})$$

где T — функция, зависящая только от времени; v — функция, зависящая только от относительной координаты ζ (или от координаты z).

Каждое слагаемое в уравнении (XI.10) должно удовлетворять уравнению (XI.9) или (XI.9a), а также граничным условиям (XI.8). После подстановки (XI.10) в уравнение (XI.9) или (XI.9a) получим:

$$\frac{Eg}{F\gamma l^4} \frac{1}{v} (Jv'')'' = - \frac{T'' + 2hT'}{T}$$

или

$$\frac{EJg}{Fl^4\gamma} \frac{v^{IV}}{v} = - \frac{T'' + 2hT'}{T},$$

где $v' = dv/d\zeta$, $T' = dT/dt$ и т. д.

Так как левая часть уравнения зависит только от ζ , а правая — от t , то равенство может иметь место в том случае, когда обе части уравнения порознь равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим через p^2 . Таким образом, получим:

$$\frac{Eg}{F\gamma l^4} \frac{1}{v(\zeta)} [Jv''(\zeta)]'' = - \frac{T''(t) + 2hT'(t)}{T(t)} = p^2$$

или

$$\frac{EJg}{Fl^4\gamma} \frac{v^{IV}(\zeta)}{v(\zeta)} = - \frac{T''(t) + 2hT'(t)}{T(t)} = p^2.$$

Отсюда имеем два обыкновенных линейных дифференциальных уравнения для определения функций $v(\zeta)$ и $T(t)$:

$$T'' + 2hT' + p^2 T = 0; \quad (\text{XI.11})$$

$$(Jv'')'' = \frac{\gamma Fl^4}{gE} p^2 v \quad (\text{XI.12})$$

или

$$v^{IV} = \frac{\gamma Fl^4}{gE} p^2 v. \quad (\text{XI.12a})$$

Решение уравнения (XI.11) с учетом предположения о малой величине коэффициента h имеет вид [4]:

$$T(t) = e^{-ht} (A \cos p_1 t + B \sin p_1 t); \quad p_1^2 = p^2 - h^2, \quad (XI.13)$$

где A, B — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий (XI.7).

Из выражения (XI.13) следует, что p_1 есть круговая частота колебаний лопатки при наличии сопротивления ($h \neq 0$), а p — круговая частота при отсутствии сопротивления.

Так как коэффициент затухания h для рабочих лопаток мал по сравнению с круговой частотой p , то частоты колебаний при наличии и отсутствии сопротивления практически совпадают друг с другом.

Из формулы (XI.13) следует, что период ¹ колебаний $T = 2\pi/p$, а частота колебаний $f = p/2\pi$.

В дальнейшем в настоящей главе ограничимся рассмотрением колебаний лопатки постоянного сечения, которые описываются уравнением (XI.12a).

Дифференциальное уравнение (XI.12a) является линейным однородным уравнением четвертого порядка с постоянными коэффициентами и его линейно-независимые решения могут быть найдены с помощью подстановки $v(\xi) = \exp(k\xi)$, где k — комплексное число [159].

Введя обозначение

$$\rho^4 = p^2 \gamma F l^4 / (g E J) \quad (XI.14)$$

и подставив выражение $v(\xi) = \exp(k\xi)$ в уравнение (XI.12a), получим следующее характеристическое уравнение: $k^4 = \rho^4$, или $k_{1,2} = \pm i\rho$; $k_{3,4} = \pm \rho$.

Общее решение уравнения (XI.12a) имеет вид [159]:

$$v(\xi) = C'_1 e^{k_1 \xi} + C'_2 e^{k_2 \xi} + C'_3 e^{k_3 \xi} + C'_4 e^{k_4 \xi},$$

или

$$v(\xi) = C'_1 \sin \rho \xi + C'_2 \cos \rho \xi + C'_3 \operatorname{sh} \rho \xi + C'_4 \operatorname{ch} \rho \xi, \quad (XI.15)$$

где $C'_1 - C'_4$ или $C''_1 - C''_4$ — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

При изучении изгибных колебаний лопаток вместо функций $\sin \rho \xi$, $\cos \rho \xi$, $\operatorname{sh} \rho \xi$, $\operatorname{ch} \rho \xi$ значительно удобнее использовать их линейные комбинации — так называемые функции А. Н. Крылова $S(\rho \xi)$, $T(\rho \xi)$, $U(\rho \xi)$, $V(\rho \xi)$ [95]:

$$\left. \begin{aligned} S(\rho \xi) &= 0,5 (\operatorname{ch} \rho \xi + \cos \rho \xi); & T(\rho \xi) &= 0,5 (\operatorname{sh} \rho \xi + \sin \rho \xi); \\ U(\rho \xi) &= 0,5 (\operatorname{ch} \rho \xi - \cos \rho \xi); & V(\rho \xi) &= 0,5 (\operatorname{sh} \rho \xi - \sin \rho \xi). \end{aligned} \right\} \quad (XI.16)$$

¹ Необходимо отметить, что для затухающих колебаний понятие «период» является не вполне строгим.

Обозначив $C_1 = C''_2 + C''_4$, $C_2 = C''_1 + C''_3$, $C_3 = C''_4 - C''_2$, $C_4 = C''_3 - C''_1$, преобразуем уравнение (XI.15) к виду:

$$v(\xi) = C_1 S(\rho \xi) + C_2 T(\rho \xi) + C_3 U(\rho \xi) + C_4 V(\rho \xi). \quad (XI.17)$$

В соответствии с определением, функции А. Н. Крылова удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} S(0) &= 1; & T(0) &= U(0) = V(0) = 0; \\ S'(\rho \xi) &= \rho V(\rho \xi), & S''(\rho \xi) &= \rho^2 U(\rho \xi), & S'''(\rho \xi) &= \rho^3 T(\rho \xi); \\ T'(\rho \xi) &= \rho S(\rho \xi), & T''(\rho \xi) &= \rho^2 V(\rho \xi), & T'''(\rho \xi) &= \rho^3 U(\rho \xi); \\ U'(\rho \xi) &= \rho T(\rho \xi), & U''(\rho \xi) &= \rho^2 S(\rho \xi), & U'''(\rho \xi) &= \rho^3 V(\rho \xi); \\ V'(\rho \xi) &= \rho U(\rho \xi), & V''(\rho \xi) &= \rho^2 T(\rho \xi), & V'''(\rho \xi) &= \rho^3 S(\rho \xi). \end{aligned} \right\} \quad (XI.18)$$

Используя формулы (XI.17) и (XI.18), легко получить следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} v'(\xi) &= \rho [C_1 V(\rho \xi) + C_2 S(\rho \xi) + C_3 T(\rho \xi) + C_4 U(\rho \xi)]; \\ v''(\xi) &= \rho^2 [C_1 U(\rho \xi) + C_2 V(\rho \xi) + C_3 S(\rho \xi) + C_4 T(\rho \xi)]; \\ v'''(\xi) &= \rho^3 [C_1 T(\rho \xi) + C_2 U(\rho \xi) + C_3 V(\rho \xi) + C_4 S(\rho \xi)]. \end{aligned} \right\} \quad (XI.19)$$

Произвольные постоянные $C_1 - C_4$ определяются из граничных условий при $\xi = 0$ и $\xi = 1$.

Так как каждое слагаемое (XI.10) удовлетворяет граничным условиям (XI.8), то при $\xi = 0$

$$v(0) = 0; \quad v'(0) = 0. \quad (XI.20)$$

Учитывая выражения (XI.17) — (XI.19), найдем, что $C_1 = C_2 = 0$ и решение уравнения (XI.12a) для лопатки, жестко заделанной в корневом сечении, примет следующий вид:

$$v(\xi) = C_3 U(\rho \xi) + C_4 V(\rho \xi). \quad (XI.21)$$

Произвольные постоянные C_3 и C_4 должны быть определены из граничных условий на вершине лопатки при $\xi = 1$.

XI.3. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Рассмотрим несколько вариантов граничных условий на вершине лопатки, жестко заделанной в корневом сечении.

1. Вершина лопатки свободна. На свободном конце лопатки изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю, т. е. выполняются следующие соотношения:

$$M = EJ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{EJ}{l^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{и} \quad Q = EJ \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} = \frac{EJ}{l^3} \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} = 0$$

при $\xi = 1$.

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^3 V}{\partial \xi^3} = 0 \text{ при } \xi = 1, \text{ или } v''(1) = v'''(1) = 0. \quad (\text{XI.22})$$

Из уравнений (XI.19), (XI.21), (XI.22) получим

$$\begin{cases} C_3 S(\rho) + C_4 T(\rho) = 0; \\ C_3 V(\rho) + C_4 S(\rho) = 0. \end{cases} \quad (\text{XI.23})$$

Для определения произвольных постоянных C_3 и C_4 имеется два линейных однородных уравнения. Не равные нулю решения, как известно, могут быть получены только при условии обращения в нуль определителя системы (XI.23), т. е. при условии

$$S^2(\rho) - T(\rho)V(\rho) = 0. \quad (\text{XI.24})$$

Таким образом, получим уравнение для определения ρ . Поскольку круговая частота лопатки связана с ρ уравнением (XI.14), то, определив ρ , найдем также круговую частоту лопатки ρ и ее собственную частоту f .

Уравнение (XI.24) или эквивалентное ему уравнение

$$\operatorname{ch} \rho \cos \rho = -1 \quad (\text{XI.24a})$$

определяют бесчисленное множество собственных частот.

Последовательные значения корней ρ_i частотного уравнения (XI.24) следующие: $\rho_1 = 1,875$, $\rho_2 = 4,694$; $\rho_3 = 7,855$; $\rho_4 = 10,995$; $\rho_5 = 14,137$, $\rho_6 = 17,279$

Для больших значений i достаточную точность дает приближенная формула $\rho_i \approx \pi(2i - 1)/2$

Учитывая связь между ρ , ρ и f , получим

$$\rho_i = \frac{\rho_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{F\gamma}}, \quad f_i = \frac{\rho_i^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJg}{F\gamma}}.$$

В частности, для первого тона

$$f_1 = \frac{0,56}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{F\gamma}},$$

для второго тона

$$f_2 = \frac{3,51}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{F\gamma}} \text{ и т. д.}$$

Хотя уравнения (XI.24) или (XI.24a) определяют бесчисленное множество собственных частот, однако необходимо учесть, что точность вычисления частот по указанным формулам снижается в тем большей степени, чем выше номер собственной формы. Например, в п. II.4 отмечалось, что относительное влияние касательных напряжений возрастает по мере увеличения номера собственной формы и, следовательно, все менее оправданной оказывается использованная при выводе уравнения (XI.24) гипотеза

плоских сечений. Более подробно влияние сдвига и инерции вращения на собственные частоты лопаток будет рассмотрено в п. XI.4

Подставив значение ρ_i , определяемое формулой (XI.24), в уравнение (XI.23), можно найти собственную форму, соответствующую частоте f_i . Поскольку указанные значения ρ_i обращают в нуль определитель системы (XI.23), то собственная форма может быть вычислена только с точностью до произвольной постоянной. Например, связь между произвольными постоянными C_3 и C_4 может быть найдена из первого уравнения системы (XI.23)

$$C_4/C_3 = -S(\rho_i)/T(\rho_i)$$

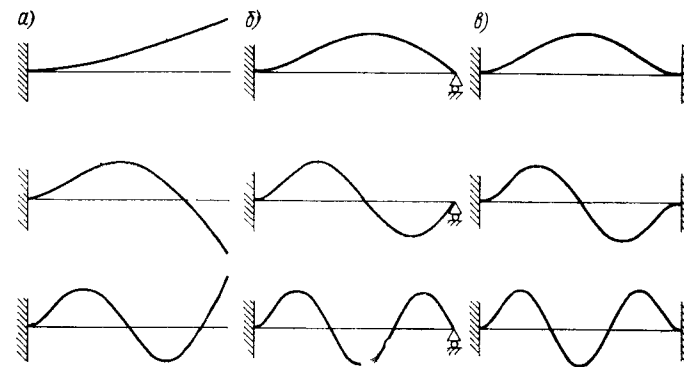


Рис. XI.2. Собственные формы, соответствующие трем нижшим собственным частотам, при различных граничных условиях на вершине лопатки. а — вершина лопатки свободна, б — вершина лопатки оперта; в — вершина лопатки заделана

Используя это соотношение и формулу (XI.21), получим

$$v_i(\xi) = C_3 \{U(\rho_i \xi) - [S(\rho_i)/T(\rho_i)] V(\rho_i \xi)\}. \quad (\text{XI.25})$$

То, что собственная форма определяется с точностью до произвольной постоянной, объясняется тем, что при сделанных выше упрощающих предположениях собственная частота не зависит от амплитуды колебаний.

Собственные формы, соответствующие трем первым собственным частотам, изображены на рис. XI.2, а. Низшей частоте, определяемой значением $\rho_1 = 1,875$, соответствует безузловая форма, при которой прогибы всех поперечных сечений лопатки имеют один и тот же знак. Следующей по величине частоте — второму тону — соответствует форма с одним узлом по высоте лопатки; третьему тону — с двумя узлами и т. д.

С помощью аналогичных выкладок могут быть найдены собственные частоты и формы при других граничных условиях на вершине лопатки.

2 Вершина лопатки оперта. На опертом конце прогиб и изгибающий момент равны нулю, что приводит к уравнениям.

$$V = 0 \text{ и } \partial^2 V / \partial \xi^2 = 0 \text{ при } \xi = 1, \text{ или } v(1) = v''(1) = 0. \quad (\text{XI.26})$$

Используя выражения (XI.17); (XI.19) и (XI.21), получим систему из двух уравнений для определения произвольных постоянных C_3 и C_4 :

$$\begin{aligned} C_3 U(\rho) + C_4 V(\rho) &= 0, \\ C_3 S(\rho) + C_4 T(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{XI.27})$$

Приравняв нулю определитель системы, получим следующее частотное уравнение:

$$U(\rho) T(\rho) - S(\rho) V(\rho) = 0 \quad (\text{XI.28})$$

или

$$\operatorname{tg} \rho = \operatorname{th} \rho. \quad (\text{XI.28a})$$

Последовательные корни уравнения (XI.28) следующие: $\rho_1 = 3,927$; $\rho_2 = 7,069$; $\rho_3 = 10,21$; $\rho_4 = 13,352$; $\rho_5 = 16,493$. Корни, соответствующие высшим собственным частотам, могут быть определены по следующей приближенной формуле: $\rho_i \approx \pi(4i + 1)/4$.

Низшая частота колебаний лопатки с опертой вершиной, как следует из приведенных данных, в 4,39 раза превышает частоту колебаний первого тона консольной лопатки.

Для определения собственной формы следует воспользоваться уравнениями (XI.27). Из первого уравнения (XI.27) может быть найдена связь между произвольными постоянными C_3 и C_4

$$C_4 C_3 = -U(\rho_i) V(\rho_i).$$

Таким образом, собственная форма в данном случае определяется формулой

$$v_i(\xi) = C_3 \{U(\rho_i \xi) - [U(\rho_i) V(\rho_i)] V(\rho_i \xi)\}, \quad (\text{XI.29})$$

причем первые три собственных формы изображены на рис. XI.2, б.

3. Вершина лопатки жестко заделана. В этом случае при $\xi = 1$ выполняются следующие граничные условия:

$$V = 0 \text{ и } \partial V / \partial \xi = 0, \text{ или } v(1) = v'(1) = 0. \quad (\text{XI.30})$$

Использование граничных условий (XI.30) приводит к следующему частотному уравнению:

$$U^2(\rho) - T(\rho) V(\rho) = 0, \quad (\text{XI.31})$$

или

$$\operatorname{ch} \rho \cos \rho = 1. \quad (\text{XI.31a})$$

Последовательные корни уравнения (XI.31) следующие: $\rho_1 = 4,73$; $\rho_2 = 7,853$; $\rho_3 = 10,996$; $\rho_4 = 14,137$; $\rho_5 = 17,279$; $\rho_i \approx \pi(2i + 1)/2$.

Таким образом, низшая частота лопатки с жестко заделанной вершиной в 6,36 раза превышает первый тон колебаний консольной лопатки.

Собственная форма определяется выражением

$$v_i(\xi) = C_3 \{U(\rho_i \xi) - [U(\rho_i) V(\rho_i)] V(\rho_i \xi)\}. \quad (\text{XI.32})$$

Первые три формы изображены на рис. XI.2, в.

Определив функции $T(t)$ и $v(\xi)$, можно составить общее решение уравнения (XI.10)

$$V(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(t) v_i(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-h t} (A_i' \cos p_{1i} t + B_i' \sin p_{1i} t) v_i(\xi), \quad (\text{XI.33})$$

где $p_{1i}^2 = p_i^2 - h^2$.

Каждое слагаемое суммы (XI.33) содержит три произвольные постоянные, которые могут быть заменены двумя, если положить: $C_3 A_i' = A_i$; $C_3 B_i' = B_i$.

В результате получим

$$V(\xi, t) = e^{-h t} \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos p_{1i} t + B_i \sin p_{1i} t) Z_i(\xi). \quad (\text{XI.34})$$

Для лопатки с жестко заделанным корневым сечением

$$Z_i(\xi) = U(\rho_i \xi) - \alpha_i V(\rho_i \xi), \quad (\text{XI.35})$$

причем $\alpha_i = S(\rho_i)/T(\rho_i)$, если вершина лопатки свободна; $\alpha_i = U(\rho_i)/V(\rho_i)$, если вершина лопатки оперта или жестко заделана.

Для определения коэффициентов A_i и B_i необходимо использовать начальные условия (XI.7). Положив в (XI.34) $t = 0$, получим согласно первому уравнению (XI.7)

$$\theta(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i Z_i(\xi). \quad (\text{XI.36})$$

Взяв производную по времени от выражения (XI.34), получим при $t = 0$ согласно второму уравнению (XI.7)

$$\psi(\xi) = -h \sum_{i=1}^{\infty} A_i Z_i(\xi) + \sum_{i=1}^{\infty} B_i p_{1i} Z_i(\xi),$$

или

$$\psi_1(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i p_{1i} Z_i(\xi), \quad (\text{XI.37})$$

где $\psi_1(\xi) = \psi(\xi) + h \sum_{i=1}^{\infty} A_i Z_i(\xi) = \psi(\xi) + h\theta(\xi)$.

Определение коэффициентов A_i и B_i облегчается тем, что функции $Z_i(\xi)$ являются ортогональными, т. е. выполняется равенство

$$\int_0^1 Z_i(\xi) Z_j(\xi) d\xi = 0 \text{ при } i \neq j, \quad (\text{XI.38})$$

где $Z_i(\xi)$ и $Z_j(\xi)$ — собственные формы, соответствующие корням ρ_i и ρ_j частотного уравнения.

Ортогональность собственных форм доказывается следующим образом. Так как функции $Z_i(\xi)$, отличающиеся от функций $\varphi_i(\xi)$ постоянным множителем C_3 , являются решениями уравнения (XI.12a), то можно записать

$$\rho_i^4 Z_i(\xi) = Z_i^{IV}(\xi), \quad \rho_j^4 Z_j(\xi) = Z_j^{IV}(\xi) \quad (XI.39)$$

Умножим обе части первого уравнения (XI.39) на $Z_j(\xi)$ и проинтегрируем в пределах от нуля до единицы

$$\rho_i^4 \int_0^1 Z_i(\xi) Z_j(\xi) d\xi = \int_0^1 Z_i(\xi) Z_j^{IV}(\xi) d\xi.$$

После интегрирования по частям правой части уравнения получим

$$\rho_i^4 \int_0^1 Z_i(\xi) Z_j(\xi) d\xi = \left(Z_i''' Z_j - Z_i'' Z_j' + Z_i' Z_j'' - Z_i Z_j''' \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 Z_i(\xi) Z_j^{IV}(\xi) d\xi.$$

Заменяя под знаком интеграла в правой части $Z_j^{IV}(\xi)$ равной ему на основании второго уравнения (XI.39) величиной $\rho_j^4 Z_j(\xi)$, получим

$$(\rho_i^4 - \rho_j^4) \int_0^1 Z_i(\xi) Z_j(\xi) d\xi = \left(Z_i''' Z_j - Z_i'' Z_j' + Z_i' Z_j'' - Z_i Z_j''' \right) \Big|_0^1. \quad (XI.40)$$

Согласно граничным условиям (XI.20), (XI.22), (XI.26), (XI.30), для любого случая крепления концов лопатки, рассмотренного выше, правая часть выражения (XI.40) обращается в нуль. Следовательно,

$(\rho_i^4 - \rho_j^4) \int_0^1 Z_i(\xi) Z_j(\xi) d\xi = 0$, а так как $\rho_i \neq \rho_j$, то справедливость формулы (XI.38) доказана¹.

Пользуясь свойством ортогональности решений уравнения (XI.12a), можно определить коэффициенты A_i и B_i из уравнений (XI.36) и (XI.37). Например, из уравнения (XI.36) можно получить

$$\int_0^1 \theta(\xi) Z_j(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \int_0^1 Z_i(\xi) Z_j(\xi) d\xi.$$

¹ Если ограничиться двукратным интегрированием по частям и положить $i = j$, то получим: $\rho_i^4 \int_0^1 [Z_i(\xi)]^2 d\xi = \int_0^1 [Z_i''(\xi)]^2 d\xi$.

В соответствии с уравнением (XI.38) все слагаемые в правой части, за исключением слагаемого с индексом $i = j$, обращаются в нуль и, таким образом,

$$\int_0^1 \theta(\xi) Z_j(\xi) d\xi = A_j \int_0^1 Z_j^2(\xi) d\xi,$$

откуда

$$A_j = \frac{\int_0^1 \theta(\xi) Z_j(\xi) d\xi}{\int_0^1 Z_j^2(\xi) d\xi}. \quad (XI.41)$$

Аналогично из уравнения (XI.37) получим

$$B_j = \frac{\int_0^1 \psi_i(\xi) Z_j(\xi) d\xi}{\rho_{1j} \int_0^1 Z_j^2(\xi) d\xi}. \quad (XI.42)$$

Для вычисления знаменателя в формулах (XI.41) и (XI.42) заменим в выражении (XI.40) величину ρ_i некоторой переменной ρ , приближающейся к ρ_j как к пределу. Соответственно Z_j заменится функцией Z , стремящейся при этом к пределу Z_j [95]. Из выражения (XI.40) имеем

$$\int_0^1 Z Z_j d\xi = \frac{\Phi(\rho)}{\rho^4 - \rho_j^4}, \quad (XI.43)$$

где $\Phi(\rho) = \left(Z''' Z_j - Z'' Z_j' + Z' Z_j'' - Z Z_j''' \right) \Big|_0^1$.

Перейдем в обеих частях уравнения (XI.43) к пределу. Учитывая, что в правой части при $\rho = \rho_j$ получается неопределенность вида $0/0$, которую можно раскрыть по правилу Лопиталя [159], найдем

$$\int_0^1 Z_j^2 d\xi = \left[\frac{d\Phi(\rho)/d\rho}{4\rho^3} \right]_{\rho=\rho_j}. \quad (XI.44)$$

Из предыдущего ясно, что аргументом функции Z является $\rho\xi$, а аргументом функции Z_j — $\rho_j\xi$. Обозначим $\rho\xi = u$, а $\rho_j\xi = w$. Тогда имеем:

$$Z' = \frac{dZ}{du} \frac{du}{d\xi} = \frac{dZ}{du} \rho; \quad Z'' = \frac{d^2 Z}{du^2} \rho^2; \quad Z''' = \frac{d^3 Z}{du^3} \rho^3;$$

$$Z_j' = \frac{dZ_j}{dw} \rho_j; \quad Z_j'' = \frac{d^2 Z_j}{dw^2} \rho_j^2; \quad Z_j''' = \frac{d^3 Z_j}{dw^3} \rho_j^3.$$

Подставив полученные значения в выражение $\Phi(\rho)$, найдем:

$$\Phi(\rho) = \left(\rho^3 \frac{d^3 Z}{du^3} Z_I - \rho^2 \rho_I \frac{d^2 Z}{du^2} \frac{dZ_I}{dw} + \rho \rho_I^2 \frac{dZ}{du} \frac{d^2 Z_I}{dw^2} - \rho_I^3 Z \frac{d^3 Z_I}{dw^3} \right) \Big|_0^1.$$

При введенных обозначениях уравнение (XI.12a) для Z примет вид: $d^4 Z/du^4 = Z$. Кроме того, имеем $dZ/d\rho = (dZ/du) \xi$.

Взяв производную от $\Phi(\rho)$ по ρ и перейдя к пределу, получим

$$\left[\frac{d\Phi(\rho)}{d\rho} \right]_{\rho=\rho_I} = \left[3\rho_I^2 \frac{d^3 Z_I}{dw^3} Z_I + \rho_I^3 \xi Z_I^2 - \rho_I^2 \frac{d^2 Z_I}{dw^2} \frac{dZ_I}{dw} - 2\rho_I^3 \xi \frac{d^3 Z_I}{dw^3} \frac{dZ_I}{dw} + \rho_I^3 \xi \left(\frac{d^2 Z_I}{dw^2} \right)^2 \right] \Big|_0^1.$$

Как легко заметить, слагаемые, содержащие произведения $(d^3 Z/dw^3) Z_I$ и $(d^2 Z_I/dw^2)(dZ_I/dw)$, равны нулю при любом из рассмотренных выше способов крепления концов лопаток. Таким образом,

$$\left[\frac{d\Phi(\rho)}{d\rho} \right]_{\rho=\rho_I} = \xi \rho_I^3 \left[Z_I^2 - 2 \frac{d^3 Z_I}{dw^3} \frac{dZ_I}{dw} + \left(\frac{d^2 Z_I}{dw^2} \right)^2 \right] \Big|_0^1 = \rho_I^3 \left[Z_I^2 - 2 \frac{d^3 Z_I}{dw^3} \frac{dZ_I}{dw} + \left(\frac{d^2 Z_I}{dw^2} \right)^2 \right]_{\xi=1}.$$

Подставив полученное соотношение в уравнение (XI.44), окончательно найдем

$$\int_0^1 Z_I^2 d\xi = \frac{1}{4} \left[Z_I^2 - 2 \frac{d^3 Z_I}{dw^3} \frac{dZ_I}{dw} + \left(\frac{d^2 Z_I}{dw^2} \right)^2 \right]_{\xi=1}.$$

В зависимости от способа крепления вершины лопатки при $\xi = 1$ получим разные значения искомого интеграла в соответствии с граничными условиями (XI.22), (XI.26) или (XI.30).

Вершина лопатки свободна

$$\int_0^1 Z_I^2 d\xi = \frac{1}{4} (Z_I^2)_{\xi=1}; \quad (XI.45)$$

вершина лопатки оперта

$$\int_0^1 Z_I^2 d\xi = -\frac{1}{2} \left(\frac{d^3 Z_I}{dw^3} \frac{dZ_I}{dw} \right)_{\xi=1}; \quad (XI.45a)$$

вершина лопатки заделана

$$\int_0^1 Z_I^2 d\xi = \frac{1}{4} \left(\frac{d^2 Z_I}{dw^2} \right)_{\xi=1}^2, \quad w = \rho_I \xi. \quad (XI.45b)$$

Подставляя найденные значения для коэффициентов A_I и B_I в выражение прогиба (XI.34), окончательно получим решение дифференциального уравнения (XI.9a), описывающего свободные колебания единичной лопатки постоянного сечения. Найденное решение удовлетворяет граничному условию (XI.8), одному из граничных условий (XI.22), (XI.26) или (XI.30) в зависимости от способа крепления вершины лопатки, а также начальным условиям (XI.7). Как следует из выражения (XI.34), колебания со временем будут затухать благодаря наличию множителя $\exp(-ht)$. Если лопатку вывести из состояния покоя возмущающей силой с частотой, равной частоте первого тона колебаний, а затем предоставить самой себе, то в выражении прогиба (XI.34) первое слагаемое ($i = 1$) будет много больше остальных, так что практически можно в этом случае считать:

$$V(\xi, t) = e^{-ht} (A_1 \cos p_{11}t + B_1 \sin p_{11}t) Z_I(\xi), \quad p_{11}^2 = p_1^2 - h^2. \quad (XI.46)$$

Если в момент времени t прогиб колеблющейся лопатки равен выражению (XI.46), то через промежуток времени T , соответствующий периоду колебаний $T = 2\pi/p_{11}$, прогиб равен:

$$V(\xi, t + T) = e^{-h(t+T)} (A_1 \cos p_{11}t + B_1 \sin p_{11}t) Z_I(\xi). \quad (XI.46a)$$

Из сравнения выражений (XI.46) и (XI.46a) следует, что за время, равное периоду колебаний, амплитуда уменьшается в $\exp(hT)$ раз. Произведение hT , равное натуральному логарифму отношения амплитуд в моменты t и $t + T$, называют логарифмическим декрементом колебаний δ (см. п. II.6)

$$\delta = hT = \ln \frac{V(\xi, t)}{V(\xi, t + T)}. \quad (XI.47)$$

В п. II.6 приведены данные о величине логарифмического декремента колебаний для лопаточных материалов и отдельных лопаток. Поскольку в большинстве практически встречающихся случаев выполняется соотношение $\delta \leq 0,02$, то при изучении колебаний отдельных лопаток в дальнейшем можно пренебречь различием в величинах p_{1i}^2 и p_i^2 . Действительно, по определению $h = \delta p_{1i}/(2\pi)$ и поэтому

$$p_{1i}^2 = p_i^2 - h^2 = p_i^2 - \delta^2 p_{1i}^2 / (4\pi^2).$$

Таким образом, $p_i^2 = p_{1i}^2 [1 + \delta^2/(4\pi^2)] \approx p_{1i}^2$, так как при $\delta \leq 0,02$ $(p_i^2 - p_{1i}^2)/p_{1i}^2 = \delta^2/(4\pi^2) \leq 10^{-5}$.

Полученные в этом параграфе соотношения будут использованы в дальнейшем при рассмотрении вынужденных колебаний рабочих лопаток и сравнительной возбудимости различных собственных форм

XI.4. ВЛИЯНИЕ СДВИГА И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТОК

Выше предполагалось, что длина лопатки много больше размеров ее поперечного сечения, в связи с чем при колебаниях можно пренебречь деформациями, вызванными касательными напряжениями, и использовать гипотезу плоских сечений. В п. II.4 отмечалось, что рост мощности паровых турбин может сопровождаться даже более быстрым увеличением хорд лопаток, чем

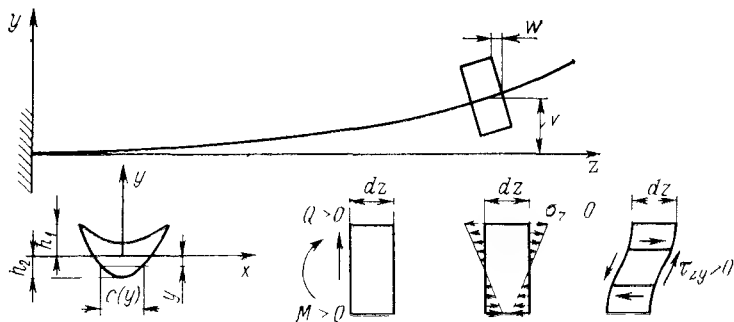


Рис. XI 3 Перемещения различных точек поперечного сечения лопатки при учете сдвига и инерции вращения

увеличением их длин, что делает более актуальной задачу оценки влияния сдвига и инерции вращения на собственные частоты лопаток. Кроме того, в п. II.4 было показано, что относительное влияние сдвига и инерции вращения увеличивается по мере усложнения собственных форм колебаний. Таким образом, обе указанные выше причины делают необходимым определение влияния сдвига и инерции вращения на собственные частоты лопаток. При учете влияния сдвига и инерции вращения необходимо отказаться от гипотезы плоских сечений, в соответствии с которой перемещения V и W в направлении осей y и z равны $V(z, t)$ и $W(z, t) = -(\partial V / \partial z) y$ (рис. XI 3). Введем дополнительное слагаемое в выражение для $W(z, t)$ следующим образом [142].

$$W(z, t) = -\frac{\partial V}{\partial z} y + \varphi(z, t) f(y), \quad (XI.48)$$

где $\varphi(z, t)$ и $f(y)$ — функции соответственно только z, t и y .

Используя формулу (XI.48) для перемещения W , найдем выражения для нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении лопатки:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E \frac{\partial W}{\partial z} = E \left[-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} f(y) \right]; \\ \tau_{zy} &= G \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) = G \varphi(z, t) f'(y), \end{aligned} \quad (XI 49)$$

где G — модуль упругости II рода.

Зададимся видом функции $f(y)$ таким образом, чтобы распределение касательных напряжений в поперечном сечении совпало с распределением, получаемым в соответствии с элементарной теорией поперечного изгиба [7]

$$\tau_{zy} = QS/(Jc). \quad (XI 50)$$

где S — статический момент части сечения, лежащего по одну сторону от рассматриваемой точки, относительно нейтральной оси, $S(y) = \int_y^{h_1} c(y) y dy$, $c(y)$ — ширина сечения в рассматриваемой точке (рис. XI 3), y — расстояние от рассматриваемой точки до нейтральной оси, h_1 (и встречающаяся в дальнейшем величина h_2) — расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных от нее точек поперечного сечения

Для того чтобы распределение касательных напряжений по формулам (XI 49) и (XI 50) совпало, необходимо положить

$$f'(y) = FS/(Jc) \quad (XI 51)$$

В соответствии с формулами (XI 49) и (XI 51) и принятым на рис. XI 3 положительным направлением осей получим

$$\begin{aligned} Q &= - \int_F \tau_{zy} dF = - G \varphi(z, t) \int_F f'(y) dF, \\ M &= - \int_F \sigma_z y dF = - E \left[-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \int_F y^2 dF + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \int_F f(y) y dF \right]. \end{aligned} \quad (XI 52)$$

Обозначим $\int_F f(y) y dF = kJ$, где k — числовой коэффициент, зависящий только от формы поперечного сечения, но не от его размеров: например, для прямоугольника $k = 1,2$, для некоторых других типов поперечных сечений значения коэффициентов k приведены в [186]. Так как $f'(y)$ определяется по формуле (XI 51), то справедливы следующие соотношения.

$$\int_F f'(y) dF = \frac{F}{J} \int_F \frac{S}{c} dF = \frac{F}{J} \int_{h_2}^{h_1} S dy$$

Интегрируя по частям с учетом приведенного ранее выражения для $S(y)$, получим

$$\int_F f'(y) dF = \frac{F}{J} \int_{h_2}^{h_1} \int_y^{h_1} c(y) y dy dy = \frac{F}{J} \left[Sy \Big|_{h_2}^{h_1} + \int_{h_2}^{h_1} c(y) y^2 dF \right] = F, \quad (XI.53)$$

поскольку $\left[\int_y^{h_1} c(y) y dy \right]' = - \left[\int_{h_1}^y c(y) y dy \right]' = -cy$, а $S(h_1) = S(h_2) = 0$.

С учетом формулы (XI.53) уравнения (XI.52) примут следующий вид:

$$M = EJ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right); \quad Q = -GF \varphi(z, t). \quad (XI.52a)$$

Введем переменную

$$K(z, t) = \partial V / \partial z - k \varphi. \quad (XI.54)$$

Запишем равенство сил и моментов для элемента лопатки аналогично тому, как это было выполнено в п. XI.1. В соответствии с соотношениями, полученными в п. XI.3, пренебрежем влиянием сил сопротивления на собственные частоты, а также будем считать, что внешняя нагрузка отсутствует.

Равенство нулю суммы перерезывающих сил приведет к уравнению

$$Q + q dz - Q - \frac{\partial Q}{\partial z} dy = 0;$$

так как $q = -(\gamma F/g) \partial^2 V / \partial t^2$, то

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \quad (XI.55)$$

Равенство нулю изгибающих моментов, действующих на рассматриваемый элемент (с учетом момента M' , создаваемого силами инерции при перемещении вдоль оси лопатки), дает следующее соотношение:

$$M + Q dz - M - \frac{\partial M}{\partial z} dz + dM' = 0, \quad (XI.56)$$

где $dM' = -dz \frac{\gamma}{g} \int_F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} y dF$.

Используя формулы (XI.52a) и (XI.54) и выражения

$$W = -\frac{\partial V}{\partial z} y + \varphi(z, t) f(y), \quad \int_F f(y) y dF = kJ,$$

из уравнений (XI.55) и (XI.56) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{k\gamma}{Gg} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{\partial K}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} - \frac{\gamma}{gE} \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} &= -\frac{GF}{kJ} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - K \right). \end{aligned} \right\} \quad (XI.57)$$

Поскольку при отсутствии сил сопротивления колебания всех точек синфазны, то, полагая $K(z, t) = \kappa(z) \sin pt$, $V(z, t) = v(z) \sin pt$, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{k\gamma}{Gg} p^2 v &= \frac{d\kappa}{dz}; \\ \frac{d^2 \kappa}{dz^2} + \frac{\gamma}{gE} p^2 \kappa &= -\frac{GF}{kJ} \left(\frac{dv}{dz} - \kappa \right); \end{aligned} \right\} \quad (XI.58)$$

$$\left. \begin{aligned} Q(z) &= -\frac{GF}{k} \left(\frac{dv}{dz} - \kappa \right); \\ M(z) &= EJ \left(\frac{d^2 v}{dz^2} - k \frac{d\kappa}{dz} \right) \quad EJ \frac{d\kappa}{dz} = EJ \left(\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{k\gamma}{Gg} p^2 v \right). \end{aligned} \right\} \quad (XI.59)$$

Преобразуем систему (XI.58) к линейному дифференциальному уравнению относительно v . Дифференцируя первое из уравнений системы (XI.58), получим

$$\frac{d^2 \kappa}{dz^2} = \frac{d^3 v}{dz^3} + \frac{k\gamma}{Gg} p^2 \frac{dv}{dz}.$$

Используя это выражение, из второго уравнения (XI.58) найдем

$$\kappa = \frac{kEJg}{GFg - kJ\gamma p^2} \frac{d^3 v}{dz^3} + \frac{k^2 \gamma p^2 EJ + G^2 Fg}{GFg - kJ\gamma p^2} \frac{dv}{dz}. \quad (XI.60)$$

Подставив (XI.60) во второе уравнение (XI.58) и первое уравнение (XI.59), получим следующие соотношения:

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + \left(\frac{k\gamma}{Gg} p^2 + \frac{\gamma}{gE} p^2 \right) \frac{d^2 v}{dz^2} + \left(\frac{k\gamma^2}{Gg^2 E} p^4 - \frac{F\gamma}{EJg} p^2 \right) v = 0; \quad (XI.61)$$

$$Q = \frac{EJGFg}{GFg - kJ\gamma p^2} \frac{d^3 v}{dz^3} + \frac{GFJ\gamma p^2 + k\gamma p^2 EJF}{GFg - kJ\gamma p^2} \frac{dv}{dz}. \quad (XI.62)$$

Таким образом, для определения влияния сдвига и инерции вращения на частоты колебаний консольных лопаток необходимо решить дифференциальное уравнение (XI.61) при следующих граничных условиях на вершине лопатки:

$$Q(l) = M(l) = 0 \quad \text{при } z = l. \quad (XI.63)$$

Учитывая формулы (XI.59) и (XI.62), преобразуем граничные условия (XI.63) к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v(l)}{dz^2} + \frac{k\gamma}{Gg} p^2 v(l) &= 0; \\ \frac{EJGFg}{GFg - kJ\gamma p^2} \frac{d^3 v(l)}{dz^3} + \frac{GFJ\gamma p^2 + k\gamma p^2 EJF}{GFg - kJ\gamma p^2} \frac{dv(l)}{dz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI } 63a)$$

Определенные трудности, как отмечалось в п. II 4, возникают в случае учета влияния сдвига и инерции вращения при определении граничных условий в корневом сечении лопатки. Так как при учете сдвига и инерции вращения поперечные сечения при колебаниях не остаются плоскими, то перемещения всех точек корневого сечения не могут быть положены равными нулю. Рассмотрим два типа граничных условий при $z = 0$, указанные в [172] и изображенные на рис. II 19:

$$v(0) = 0, \quad dv(0)/dz = 0; \quad (\text{XI } 64)$$

$v(0) = 0, \quad \kappa(0) = 0$ или, учитывая выражение (XI 60),

$$\frac{d^3 v(0)}{dz^3} = - \frac{dv(0)}{dz} \frac{k^2 \gamma p^2 EJ + G^2 Fg}{GkEJg}. \quad (\text{XI } 64a)$$

Более точно, с учетом податливости заделки граничные условия в корневом сечении будут определены в п. XI.5.

Найдем решение дифференциального уравнения (XI.61) при использовании граничных условий (XI.63) и (XI.64). При проведении дальнейших вычислений примем, что $E = 2,6G$, $k = 1,2$. Обозначив $i = \sqrt{J/F}$ — радиус инерции поперечного сечения лопатки преобразуем уравнения (XI 61), (XI.63a) и (XI.64a) к следующему виду

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + A \frac{d^2 v}{dz^2} - Bv = 0; \quad (\text{XI } 61a)$$

$$\frac{d^2 v(l)}{dz^2} + Cv(l) = 0; \quad \frac{d^3 v(l)}{dz^3} + A \frac{dv(l)}{dz} = 0; \quad (\text{XI } 63b)$$

$$v(0) = 0; \quad \frac{d^3 v(0)}{dz^3} = -D \frac{dv(0)}{dz}, \quad (\text{XI } 64b)$$

где $A = \frac{4,12\gamma p^2}{gE}$; $B = \frac{\gamma p^2}{gE} \left(\frac{1}{i^2} - \frac{3,12\gamma p^2}{Eg} \right)$; $C = \frac{3,12\gamma p^2}{Eg}$; $D = C + \frac{1}{3,12i^2}$.

Уравнение (XI 61a) представляет собой линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и, как и ранее, решается с помощью подстановки $v(z) = \exp(qz)$.

В результате получим

или

$$\begin{aligned} q^4 + Aq^2 - B &= 0 \\ q_{1,2} &= \pm i \sqrt{\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + B}} = \pm ik_1; \quad q_{3,4} = \\ &= \pm \sqrt{-\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + B}} = \pm k_2 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$v(z) = C_1 \sin k_1 z + C_2 \cos k_1 z + C_3 \operatorname{sh} k_2 z + C_4 \operatorname{ch} k_2 z, \quad (\text{XI } 65)$$

где $C_1 - C_4$ — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий (XI.63) и (XI 64).

При использовании граничных условий (XI 63) и (XI 64) частотное уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} &\{k_1^2 \sin k_1 l + k_1 k_2 \operatorname{sh} k_2 l - C [-\sin k_1 l + (k_1/k_2) \operatorname{sh} k_2 l]\} \times \\ &\times [-k_1^3 \sin k_1 l + k_2^3 \operatorname{sh} k_2 l - A(k_1 \sin k_1 l + k_2 \operatorname{sh} k_2 l)] - \\ &- [k_1^2 \cos k_1 l + k_2^2 \operatorname{ch} k_2 l - C(-\cos k_1 l + \operatorname{ch} k_2 l)] \times \\ &\times [k_1^3 \cos k_1 l - k_1 k_2^2 \operatorname{ch} k_2 l + Ak_1 (-\cos k_1 l + \operatorname{ch} k_2 l)] = 0, \quad (\text{XI } 66) \end{aligned}$$

при использовании граничных условий (XI 63) и (XI 64a) частотное уравнение окажется следующим.

$$\begin{aligned} &[-k_1^2 \sin k_1 l + Lk_2^2 \operatorname{sh} k_2 l + C(\sin k_1 l + L \operatorname{sh} k_2 l)] \times \\ &\times [k_1^3 \sin k_1 l - k_2^3 \operatorname{sh} k_2 l - A(k_1 \sin k_1 l + k_2 \operatorname{sh} k_2 l)] - \\ &- [k_1^2 \cos k_1 l + k_2^2 \operatorname{ch} k_2 l + C(\operatorname{ch} k_2 l - \cos k_1 l)] \times \\ &\times [k_1^3 \cos k_1 l - Lk_2^3 \operatorname{ch} k_2 l - A(k_1 \cos k_1 l - Lk_2 \operatorname{ch} k_2 l)] = 0, \quad (\text{XI } 66a) \end{aligned}$$

где $L = (k_1^3 - k_1 D)/(k_2^3 + k_2 D)$.

Можно показать, что при условии $(i/l) \rightarrow 0$ $k_1 \approx k_2 \rightarrow p/l$, а частотные уравнения (XI.66) и (XI 66a) переходят в уравнение (XI.24a), т. е. влияние сдвига и инерции вращения оказывается пренебрежимо малым. На рис. II.20 показана зависимость коэффициента $\psi = p/p_0$ от параметра l/i для первых трех собственных форм консольной лопатки, где p — собственная частота, определяемая по формулам (XI 66) или (XI 66a), а p_0 — собственная частота, подсчитанная без учета сдвига и инерции вращения по формуле (XI.24).

Как видно, влияние сдвига и инерции вращения резко увеличивается при возрастании номера собственной формы и уменьшении гибкости лопатки, определяемой отношением l/i .

При расчетном определении высших собственных частот учет влияния сдвига и инерции вращения оказывается все более необходимым по мере повышения номера собственной формы и уменьшения гибкости лопатки.

ХІ.5. ВЛИЯНИЕ ПОДАТЛИВОСТИ ЗАДЕЛКИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТОК

В предыдущем параграфе было показано, что влияние сдвига и инерции вращения не может объяснить наблюдающегося расхождения между расчетными и экспериментальными значениями для первой собственной частоты. В связи с этим рассмотрим влияние на собственные частоты податливости заделки, считая, что усилие зажима хвоста лопатки настолько велико, что какими-либо проскальзываниями по контактными поверхностям хвоста можно пренебречь. Первоначально будем предполагать, что осевые размеры хвоста лопатки и обода диска значительно больше осевых

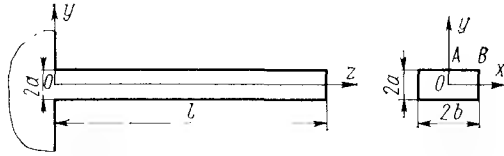


Рис. ХІ.4. Геометрические размеры стержня прямоугольного сечения и принятая система координатных осей

размеров пера, в связи с чем перо лопатки можно считать заделанным в упругое полупространство. Считая, что на определенной части границы полупространства, совпадающей с корневым сечением лопатки, действуют нормальные и касательные напряжения от колеблющейся лопатки, определим перемещение граничных точек и, следовательно, перемещения различных точек корневого сечения лопатки.

Как известно [113], перемещения граничных точек полупространства с координатами x_0, y_0 в направлении, перпендикулярном к поверхности ω , и в плоскости границы ν под действием нормальных σ и касательных напряжений τ , распределенных по поверхности F , определяются формулами:

$$\omega(x_0, y_0) = \omega_1(\sigma) + \omega_2(\tau) = \kappa_1 \int_F \frac{\sigma(x, y)}{r} dF - \kappa_2 \int_F \frac{\tau(x, y)(x - x_0)}{r^2} dF; \quad (ХІ.67)$$

$$\begin{aligned} \nu(x_0, y_0) = \nu_1(\sigma) + \nu_2(\tau) = \kappa_2 \int_F \frac{\sigma(x, y)(x - x_0)}{r^2} dF + \\ + \kappa_3 \int_F \frac{\tau(x, y)}{r} dF - \kappa_3 \nu \int_F \frac{\tau(x, y)(y - y_0)^2}{r^3} dF, \end{aligned} \quad (ХІ.68)$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$; E, ν — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона; $\kappa_1 = (1 - \nu^2)/(\pi E)$; $\kappa_2 = (1 - \nu - 2\nu^2)/(2\pi E)$; $\kappa_3 = (1 + \nu)/(\pi E)$.

Для упрощения вычислений примем, что нормальные напряжения в корневом сечении лопатки распределяются по линейному

закону $[\sigma = \sigma_{\max}(y/a)]$, а касательные — равномерно по площади поперечного сечения ($\tau = \text{const}$). Ниже будет показано, что принятые упрощения незначительно влияют на собственные частоты лопаток.

Для получения аналитических результатов первоначально рассмотрим стержень прямоугольного поперечного сечения, колеблющийся в плоскости zOy (рис. ХІ.4). На рис. ХІ.4 указаны также положительные направления координатных осей; перемещения точек корневого сечения стержня в направлении осей y и z , как и ранее, обозначим соответственно v и w .

Используя формулы (ХІ.67) и (ХІ.68), нетрудно показать, что, например, перемещения точек A, B, O (рис. ХІ.4) определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} w(A) = \kappa_1 \sigma_{\max} a \left[\frac{b}{a} \ln \frac{\sqrt{1 + b^2/(4a^2)} + 1}{\sqrt{1 + b^2/(4a^2)} - 1} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \sqrt{1 + \frac{4a^2}{b^2}} \right] - \\ - \kappa_2 \tau a \left[4 \operatorname{arctg} \frac{b}{2a} + \frac{2b}{a} \ln \sqrt{1 + \frac{4a^2}{b^2}} \right]; \\ w(B) = \kappa_1 \sigma_{\max} a \left[\frac{b}{a} \ln \frac{2 + (b^2/a^2) + 2\sqrt{1 + b^2/a^2}}{b^2/a^2} + \right. \\ \left. + \frac{2b^2}{a^2} - \frac{2b^2}{a^2} \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} \right] - \kappa_2 \tau a \left[\frac{2b}{a} \ln \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} + 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right]; \\ w(O) = 0; \end{aligned} \quad (ХІ.69)$$

$$\begin{aligned} v(A) = \kappa_2 \sigma_{\max} a \left[-2 \frac{b}{a} \ln \sqrt{1 + \frac{4a^2}{b^2}} + \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{2a}{b} - \operatorname{arctg} \frac{2a}{b} \right) \right] + \\ + \kappa_3 \tau a \left[\frac{b}{a} \ln \frac{\sqrt{1 + b^2/(4a^2)} + 1}{\sqrt{1 + b^2/(4a^2)} - 1} + 2(1 - \nu) \ln \frac{\sqrt{1 + 4a^2/b^2} + 1}{\sqrt{1 + 4a^2/b^2} - 1} \right]; \\ v(B) = \kappa_2 \sigma_{\max} a \left[-2 \frac{b}{a} \ln \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} + \frac{2b^2}{a^2} \left(\frac{a}{b} - \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) \right] + \\ + \kappa_3 \tau a \left[\frac{b}{a} \ln \frac{\sqrt{1 + b^2/a^2} + 1}{\sqrt{1 + b^2/a^2} - 1} + (1 - \nu) \ln \frac{\sqrt{1 + a^2/b^2} + 1}{\sqrt{1 + a^2/b^2} - 1} \right]; \\ v(O) = \kappa_2 \sigma_{\max} a \left[2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + 2 \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{a}{b} - \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) \right] + \\ + \kappa_3 \tau a \left[\frac{2b}{a} \ln \frac{\sqrt{1 + b^2/a^2} + 1}{\sqrt{1 + b^2/a^2} - 1} + 2(1 - \nu) \ln \frac{\sqrt{1 + a^2/b^2} + 1}{\sqrt{1 + a^2/b^2} - 1} \right]. \end{aligned} \quad (ХІ.70)$$

Формулы типа (ХІ.69) и (ХІ.70) могут быть получены и для других точек поперечного сечения.

На рис. ХІ.5 показано изменение относительной величины перемещения $w_{1\text{отн}} = w_1(\sigma)/(\kappa_1 \sigma_{\max} a)$ и $w_{2\text{отн}} = w_2(\tau)/(\kappa_2 \tau a)$ при $x = 0$ для различных отношений b/a , т. е. различных отно-

шений ширины стержня к его высоте. Как видно, при линейном законе изменения нормальных напряжений σ закон перемещений w_{10TH} существенно отличается от линейного, в связи с чем можно говорить только о среднем, «эквивалентном» значении угла поворота корневого сечения.

Следуя [228], определим эквивалентный угол поворота $\varphi_{1ЭВ}$ из условия равенства работы нормальных напряжений $\sigma(x, y)$

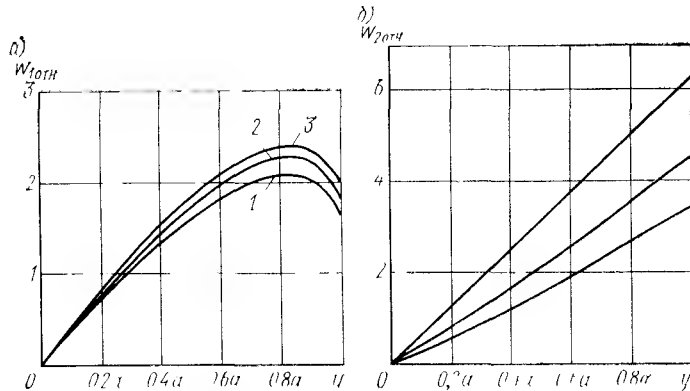


Рис XI 5 Распределение перемещений w_{10TH} (а) и w_{20TH} (б) по толщине корневого сечения стержня прямоугольного поперечного сечения

1 - $b/a = 1$, 2 - $b/a = 2$, 3 - $(b/a) \rightarrow \infty$

на фактических перемещениях $w_1(x, y)$ и перемещениях, изменяющихся по линейному закону $\varphi_{1ЭВ}y$

$$\int_F w_1(x, y) \sigma_{\max} \frac{y}{a} dF = \varphi_{1ЭВ} 2b \int_{-a}^a \sigma_{\max} \frac{y}{a} y dy.$$

Таким образом,

$$\varphi_{1ЭВ} = \frac{3 \int_F w_1(x, y) y dF}{4a^3b} = \frac{3 \int_F w_{10TH}(x, y) y dF}{4a^2b} \kappa_1 \sigma_{\max} = \varphi_{1ср} \kappa_1 \sigma_{\max} \quad (XI 71)$$

и аналогично

$$\varphi_{2ЭВ} = \frac{3 \int_F w_2(x, y) y dF}{4a^3b} = \frac{3 \int_F w_{20TH}(x, y) y dF}{4a^2b} \kappa_2 \tau = \varphi_{2ср} \kappa_2 \tau$$

Обозначив относительные величины перемещений в направлении оси y под действием касательных и нормальных напряжений

соответственно $v_{10TH} = v_1/(\kappa_2 \sigma_{\max} a)$ и $v_{20TH} = v_2/(\kappa_3 \tau a)$, найдем значение эквивалентного перемещения корневого сечения:

$$\left. \begin{aligned} v_{1ЭВ} &= \frac{\int_F v_1(x, y) dF}{4ab} = \frac{\int_F v_{10TH}(x, y) dF}{4b} \kappa_2 \sigma_{\max} = v_{1ср} \kappa_2 \sigma_{\max}; \\ v_{2ЭВ} &= \frac{\int_F v_2(x, y) dF}{4ab} = \frac{\int_F v_{20TH}(x, y) dF}{4b} \kappa_3 \tau = v_{2ср} \kappa_3 \tau \end{aligned} \right\} \quad (XI 72)'$$

При рассмотрении колебаний консольной лопатки будем считать, что прогиб и угол поворота упругой оси в корневом сечении равны следующим величинам

$$v(0) = v_{1ЭВ} + v_{2ЭВ}, \quad dv(0)/dz = \varphi_{1ЭВ} + \varphi_{2ЭВ} \quad (XI 73)$$

При проведении дальнейших преобразований учтем, что для стержня прямоугольного поперечного сечения при принятых выше упрощающих предположениях $M(0) = \sigma_{\max} 4a^2b/3$, $Q(0) = \tau 4ab$

Используя соотношения (XI 71)–(XI 73) и правила знаков для положительного направления координатных осей, прогибов, углов поворота, моментов и перерезывающих сил (рис XI 1), получим [33]

$$v(0) = -c_{11}Q(0) + c_{12}M(0), \quad dv(0)/dz = c_{22}M(0) - c_{21}Q(0), \quad (XI 74)$$

где $c_{11} = v_{2ср} \kappa_3 / (4ab)$, $c_{12} = 3v_{1ср} \kappa_2 / (4a^2b)$, $c_{21} = \varphi_{2ср} \kappa_2 / (4ab)$, $c_{22} = 3\varphi_{1ср} \kappa_1 / (4a^2b)$

Введем также безразмерные коэффициенты c_{ij}^{0TH} , зависящие только от формы поперечного сечения $c_{11}^{0TH} = c_{11} EJ/l^3$; $c_{12}^{0TH} = c_{12} EJ/l^2$, $c_{21}^{0TH} = c_{21} EJ/l^2$, $c_{22}^{0TH} = c_{22} EJ/l$

В табл XI 1 приведены значения коэффициентов c_{ij}^{0TH} , полученные в соответствии с приведенными выше формулами для стержня прямоугольного поперечного сечения с различным отношением ширины к высоте b/a . В соответствии с теоремой о взаимности работ и перемещений [138], величины c_{12} и c_{21} должны быть равны друг другу, что и подтверждается непосредственными вычислениями. В табл. XI 1 указаны также значения коэффициентов c_{ij}^{0TH} для случая, когда ширина стержня много больше его высоты. Рассматривая предельный случай $(b/a) \rightarrow \infty$, можно по приведенным выше формулам вычислить коэффициенты c_{ij}^{0TH} , характеризующие податливость заделки для плоского деформированного состояния, когда перемещения v и w различных точек основания зависят только от координаты y и не зависят от координаты x (случай I, табл XI 1). Для перехода от плоского деформированного состояния к плоскому напряженному, реализующемуся при условии равенства ширины стержня ширине основания, необходимо, как известно из [172], заменить в формулах величину E

Таблица XI.1

$c_{ij}^{отн}$	b/a					
	0,5	1	2	5	$(b/a) \rightarrow \infty$	
					I	II
$c_{11}^{отн}$	2,42	3,38	4,52	6,06	—	—
$c_{12}^{отн}$	0,164	0,242	0,328	0,381	0,52	0,7
$c_{22}^{отн}$	0,962	1,15	1,267	1,33	1,505	1,655

на $E/(1 - \nu^2)$ и ν на $\nu/(1 - \nu)$. Коэффициенты $c_{ij}^{отн}$ при плоском напряженном состоянии основания также указаны в табл. XI.1 [1] $(b/a) \rightarrow \infty$, случай II].

В табл. XI.1 не указаны значения коэффициента $c_{11}^{отн}$ при $(b/a) \rightarrow \infty$. Если вычислить значения σ_2 (τ) в различных точках корневого сечения по формулам типа (XI.70), то окажется, что при $(b/a) \rightarrow \infty$ σ_2 , а следовательно, и $c_{11}^{отн} \rightarrow \infty$. Для получения конечного значения $c_{11}^{отн}$ необходимо знать расстояние d от точки приложения равнодействующей касательных напряжений τ до точки, в которой перемещение σ_2 равно нулю [172]. При рассмотрении колебаний лопаток, осевые размеры пера которых равны осевым размерам обода диска, величина d характеризуется, например, расстоянием от корневого сечения лопатки до ступицы диска или бочки цельнокованого ротора. Заменяя касательные напряжения τ статически эквивалентной им сосредоточенной силой, приложенной в начале координат, и вычисляя величину $\sigma_{2эв}$, можно показать, что для стержня прямоугольного поперечного сечения при $(d/a) = 10, 35$ и 100 коэффициент $c_{11}^{отн}$ соответственно равен 7,27; 10 и 12,33 [33]. В дальнейшем при проведении вычислений для плоского напряженного состояния будем принимать $c_{11}^{отн} = 10$.

Используя граничные условия (XI.74) и пренебрегая влиянием сдвига и инерции вращения, нетрудно получить уравнение, определяющее собственные частоты консольной лопатки при учете податливости заделки.

В п. XI.2 было показано, что общее решение дифференциального уравнения (XI.12а), описывающего колебания лопатки постоянного сечения без учета сдвига и инерции вращения, имеет следующий вид:

$$v(\xi) = C_1 S(\rho\xi) + C_2 T(\rho\xi) + C_3 U(\rho\xi) + C_4 V(\rho\xi),$$

где $\xi = z/l$.

Так как на вершине лопатки $Q(l) = M(l) = 0$ или $\sigma''(1) = \sigma'''(1) = 0$, то, учитывая, что $S(0) = 1$, $T(0) = U(0) = V(0) =$

$= 0$, а также формулы (XI.18), получим следующие четыре уравнения для определения произвольных постоянных $C_1 - C_4$:

$$\left. \begin{aligned} C_1 T(\rho) + C_2 U(\rho) + C_3 V(\rho) + C_4 S(\rho) &= 0; \\ C_1 U(\rho) + C_2 V(\rho) + C_3 S(\rho) + C_4 T(\rho) &= 0; \\ C_1 &= -c_{11}(\rho/l)^3 EJC_4 + c_{12}(\rho/l)^2 EJC_3 = \\ &= -c_{11}^{отн}(\rho/l)^3 C_1 + c_{12}^{отн}(\rho/l)^2 C_3; \\ C_2 &= c_{22}(\rho/l) EJC_3 - c_{21}(\rho/l)^2 EJC_4 = \\ &= c_{22}^{отн}(\rho/l) C_3 - c_{21}^{отн}(\rho/l)^2 C_4. \end{aligned} \right\} \quad (XI.75)$$

Учитывая, что $c_{12}^{отн} = c_{21}^{отн}$, преобразуем систему (XI.75) к виду:

$$\left. \begin{aligned} C_3 [c_{12}^{отн}(\rho/l)^2 U(\rho) + c_{22}^{отн}(\rho/l) V(\rho) + S(\rho)] + \\ + C_1 [-c_{11}^{отн}(\rho/l)^3 U(\rho) - c_{12}^{отн}(\rho/l)^2 V(\rho) + T(\rho)] &= 0; \\ C_3 [c_{12}^{отн}(\rho/l)^2 T(\rho) + c_{22}^{отн}(\rho/l) U(\rho) + V(\rho)] + \\ + C_1 [-c_{11}^{отн}(\rho/l)^3 T(\rho) - c_{12}^{отн}(\rho/l)^2 U(\rho) + S(\rho)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (XI.75a)$$

Неравные нулю решения могут быть получены только при условии обращения в нуль определителя системы (XI.75а), что приводит к следующему частотному уравнению:

$$\begin{aligned} [S(\rho) + c_{22}^{отн}(\rho/l) V(\rho) + c_{12}^{отн}(\rho/l)^2 U(\rho)] \times \\ \times [S(\rho) - c_{12}^{отн}(\rho/l)^2 U(\rho) - c_{11}^{отн}(\rho/l)^3 T(\rho)] - \\ - [T(\rho) - c_{12}^{отн}(\rho/l)^2 V(\rho) - c_{11}^{отн}(\rho/l)^3 U(\rho)] \times \\ \times [V(\rho) + c_{22}^{отн}(\rho/l) U(\rho) + c_{12}^{отн}(\rho/l)^2 T(\rho)] = 0. \end{aligned} \quad (XI.76)$$

Из уравнения (XI.76) следует, что относительная величина снижения собственных частот зависит не только от собственно податливости заделки, определяемой коэффициентами $c_{ij}^{отн}$, но и от гибкости лопатки, определяемой отношением l/i . При фиксированных значениях коэффициентов $c_{ij}^{отн}$ и размерах поперечного сечения лопатки увеличение ее длины приводит к уменьшению влияния податливости заделки. Действительно, при $(l/i) \rightarrow \infty$, т. е. при $(i/l) \rightarrow 0$, уравнение (XI.76) переходит в уравнение XI.24, определяющее собственные частоты консольной жестко заделанной лопатки

$$S^2(\rho) - T(\rho)V(\rho) = 0.$$

Из уравнения (XI.76) следует также, что наибольшее влияние на собственные частоты оказывает коэффициент $c_{22}^{отн}$, который умножается на малую величину i/l , в то время как коэффициенты $c_{11}^{отн}$ и $c_{12}^{отн}$ умножаются соответственно на $(i/l)^2$ и $(i/l)^3$. Справедливость этих соображений подтверждается результатами вычис-

лений, приведенными на рис. II.26, а: уже при $(l/i) = 15$ совместное влияние коэффициентов $c_{11}^{\text{отн}}$ и $c_{12}^{\text{отн}}$ изменяет первую собственную частоту прямоугольного стержня менее, чем на 1%; при дальнейшем увеличении отношения l/i влияние коэффициентов $c_{11}^{\text{отн}}$ и $c_{12}^{\text{отн}}$ оказывается еще меньше.

Следует иметь в виду, что относительное влияние коэффициентов $c_{11}^{\text{отн}}$ и $c_{12}^{\text{отн}}$ возрастает при определении высших собственных частот. Это становится ясным, если учесть, что коэффициенты $c_{22}^{\text{отн}}$, $c_{12}^{\text{отн}}$ и $c_{11}^{\text{отн}}$ умножаются соответственно на ρ , ρ^2 и ρ^3 , а по определению $\rho^4 \sim \rho^2$. Особенно большое влияние оказывает податливость заделки на собственные частоты лопаток, вершина которых заделана в упругом полупространстве (направляющие лопатки турбин). Указанное обстоятельство иллюстрируется графиками, изображенными на рис. II.26, б и II.27.

При определении собственных частот лопаток может быть одновременно учтено влияние податливости заделки, сдвиг и инерция вращения.

Принимая во внимание малое влияние на собственные частоты коэффициента $c_{12}^{\text{отн}}$, запишем граничные условия в корневом сечении в виде:

$$v(0) = -c_{11}Q(0); \quad dv(0)/dz = c_{22}M(0). \quad (\text{XI.77})$$

Используя формулы (XI.59) и (XI.62), перепишем граничные условия (XI.77) при учете сдвига и инерции вращения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c_{22}} \frac{dv(0)}{dz} &= EJ \left[\frac{d^2v(0)}{dz^2} + \frac{k\gamma}{Gg} p^2 v(0) \right]; \\ -\frac{1}{c_{11}} v(0) &= \frac{EJGfg}{Gfg - kJ\gamma p^2} \frac{d^3v(0)}{dz^3} + \frac{GFJ\gamma p^2 + k\gamma p^2 EJf}{Gfg - kJ\gamma p^2} \frac{dv(0)}{dz}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.77a})$$

Используя выражение для общего решения (XI.65) дифференциального уравнения (XI.61a) и его производных:

$$v(z) = C_1 \sin k_1 z + C_2 \cos k_1 z + C_3 \operatorname{sh} k_2 z + C_4 \operatorname{ch} k_2 z;$$

$$dv(z)/dz = C_1 k_1 \cos k_1 z - C_2 k_1 \sin k_1 z + C_3 k_2 \operatorname{ch} k_2 z + C_4 k_2 \operatorname{sh} k_2 z \text{ и т. д.,}$$

получим при $z = 0$ два уравнения для определения произвольных постоянных $C_1 - C_4$. Два других уравнения могут быть получены при использовании граничных условий на вершине лопатки:

$$M(l) = 0, \text{ или } \frac{d^2v(l)}{dz^2} + \frac{k\gamma}{Gg} p^2 v(l) = 0;$$

$$Q(l) = 0, \text{ или } \frac{d^3v(l)}{dz^3} + \left(\frac{\gamma p^2}{gE} + \frac{k\gamma p^2}{gG} \right) \frac{dv(l)}{dz} = 0.$$

Не останавливаясь на довольно громоздких преобразованиях, приведем только результаты вычислений собственных частот

стержня прямоугольного поперечного сечения с $(b/a) = 2$ при использовании граничных условий (XI.77).

Результаты вычислений с учетом только податливости заделки, а также при одновременном учете сдвига, инерции вращения и податливости заделки приведены на рис. XI.6, где построена зависимость $\psi = p/p_0$ от отношения l/i (p — первая собственная частота с учетом податливости заделки или всех трех указанных выше факторов; p_0 — первая собственная частота жестко заделанной консольной лопатки). Как видно, снижение первой собственной частоты определяется в основном податли-

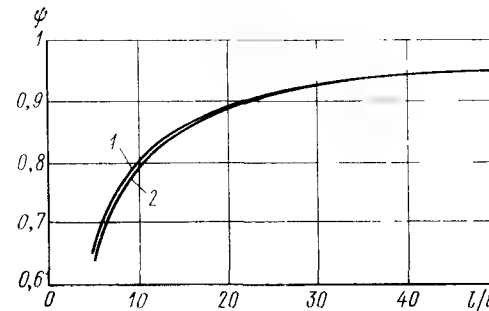


Рис. XI.6 Влияние на первую собственную частоту стержня прямоугольного поперечного сечения податливости заделки (кривая 1) и совместное влияние податливости заделки, сдвига и инерции вращения (кривая 2)

вающего при расчете упрощающего предположения о линейном законе изменения нормальных напряжений в корневом сечении прямоугольного стержня. Аналогичные результаты приведены в [228], где показано, что при кубическом законе изменения нормальных напряжений по высоте сечения значение коэффициента c_{22} всего на 7,5% отличается от значения, полученного при линейном законе изменения нормальных напряжений.

Таким образом, при определении частот достаточно коротких «жестких» лопаток необходимо учитывать влияние податливости заделки уже на первую собственную частоту. При вычислении коэффициента c_{22} достаточную точность дает предположение линейном законе изменения нормальных напряжений в корневом сечении лопатки.

Влияние податливости заделки на собственные частоты лопаток конкретных ступеней может быть определено с помощью метода конечных элементов [219, 229], однако в настоящем параграфе пытаемся получить некоторые, хотя и приближенные, но более общие соотношения,

прогибы w и v в различных точках поперечного сечения, затем и значения коэффициентов c_{ij} могут быть вычислены при использовании формул (XI.67) и (XI.68), где интегрирование

следует выполнить по площади корневого сечения рассматриваемой лопатки¹. Покажем, однако, что можно получить приближенные зависимости, не учитывающие конкретных различий в форме корневого сечения лопаток. Проведем расчеты, аналогичные выполненным выше, для стержней с различными формами поперечных сечений, изображенными на рис. XI.7. Учитывая наибольшее влияние на первую собственную частоту коэффициента c_{22} , ограничимся вычислением только этого коэффициента. Кроме того, при проведении сравнительных оценочных расчетов не будем вычислять $\varphi_{1\text{ экв}}$ по формуле (XI.71), а используем приближенное выражение

$$\varphi_1 = w(A) \cdot a, \quad (\text{XI.78})$$

где $w(A)$ — перемещение под действием нормальных напряжений точки A , наиболее удаленной от нейтральной оси; a — расстояние точки A до нейтральной оси (рис. XI.7).

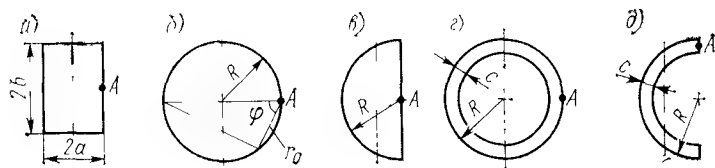


Рис. XI.7. Типы рассмотренных поперечных сечений

Например, для стержня с круглым поперечным сечением величина $w(A)$ может быть определена следующим образом. Учитывая, что по условиям симметрии нормальные напряжения, действующие в верхней и нижней половинах сечения, вызывают одинаковые перемещения точки A , можно записать следующее соотношение [см. формулу (XI.67) и рис. XI.7, б]:

$$w_1(A) = 2\kappa_1 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{r_0} \sigma(r) dr, \quad (\text{XI.79})$$

где $\kappa_1 = (1 - \nu^2)/(\pi E)$, а остальные обозначения понятны из рис. XI.7, б.

Так как с ростом радиуса r нормальные напряжения изменяются по линейному закону, то $\int_0^{r_0} \sigma(r) dr = \sigma_{cp} r_0$, где $\sigma_{cp} = \sigma(r_0/2)$.

¹ Численные значения коэффициентов $c_{22}^{\text{отн}}$, подсчитанных подобным образом для лопаток ряда ступеней, оказались заключенными в диапазоне $1,23 \leq c_{22}^{\text{отн}} \leq 1,59$ при линейном законе изменения нормальных напряжений и в диапазоне $1,34 \leq c_{22}^{\text{отн}} \leq 1,67$ при кубическом законе.

Из рис. XI.7, б следуют очевидные соотношения:

$$r_0 = 2R \cos \varphi; \quad \sigma(r_0) = \sigma_{\max} \left(1 - \frac{r_0 \cos \varphi}{R} \right);$$

$$\sigma_{cp} = \sigma_{\max} \left(1 - \frac{r_0 \cos \varphi}{2R} \right) = \sigma_{\max} (1 - \cos^2 \varphi);$$

$$\sigma_{cp} r_0 = \sigma_{\max} 2R (\cos \varphi - \cos^3 \varphi).$$

Подставляя приведенные выше соотношения в формулу (XI.79), получим

$$w_1(A) = 4\kappa_1 R \sigma_{\max} \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi - \cos^3 \varphi) d\varphi = \frac{4}{3} \kappa_1 R \sigma_{\max}.$$

Так как приближенно принимается, что $\varphi_1 = w_1(A)/R$, $c_{22} = \varphi_1/M(0)$, определим величину $c_{22}^{\text{отн}} = c_{22} E J / i$, используя следующие формулы для геометрических характеристик круглого поперечного сечения: $J = \pi R^4 / 4$; $W = \pi R^3 / 4$; $F = \pi R^2$; $i = \sqrt{J/F} = R/2$.

Учитывая приведенные выше выражения, найдем

$$c_{22}^{\text{отн}} = 8(1 - \nu^2)/(3\pi) = 0,772.$$

При определении перемещений w_1 в точке A для поперечных сечений типа г и д (рис. XI.7) использовались приближенные соотношения. Вся область интегрирования разбивалась на две подобласти: непосредственная окрестность точки A и остальная часть поперечного сечения. Влияние нормальных напряжений, действующих в первой подобласти, на перемещение в точке A определялось по формуле (XI.67). Влияние нормальных напряжений, действующих во второй подобласти, на перемещение в точке A оценивалось приближенно: пренебрегалось изменением напряжений по радиусу и считалось, что осредненная по радиусу величина напряжений совпадает с их значением на среднем радиусе $R - (c/2)$ (рис. XI.7, г и д).

Результаты вычисления коэффициентов $c_{22}^{\text{отн}}$ для различных типов поперечных сечений, указанных на рис. XI.7, сведены в табл. XI.2. Как следует из таблицы, для стержней с сильно изогнутыми тонкостенными поперечными сечениями (типа г и д при $c/R = 0,01$) податливость заделки, характеризующаяся величиной $c_{22}^{\text{отн}}$, оказывается значительно меньшей, чем для стержня прямоугольного поперечного сечения. С увеличением относительной толщины и уменьшением изогнутости, определяемой для сечения типа д по формуле $[R - (c/2)]/c$, податливость заделки резко возрастает, приближаясь к податливости для прямоугольного сечения. Следует отметить, что даже при $c/R = 0,3$ изогнутость профиля типа д больше, чем изогнутость типичных лопаточ-

ных профилей [13] Это дает основание использовать в первом приближении для лопаточных профилей те же значения $c_{22}^{отн}$, что и для прямоугольного стержня.

В большинстве случаев в корневых сечениях лопаток активных турбин выполняется соотношение $10 \geq J_{\max}/J_{\min} \geq 3$, где $J_{\max}$ и $J_{\min}$ - максимальный и минимальный моменты инерции корневого сечения. Для прямоугольника это эквивалентно соотношению $3,2 \geq (b/a) \geq 1,7$, причем подобное изменение b/a , как следует из табл. XI 1, весьма слабо сказывается на величине коэф-

Таблица XI 2

Тип поперечного сечения по рис. XI 7	Отношение характерных размеров b/a	$c_{22}^{отн}$	Тип поперечного сечения по рис. XI 7	Отношение характерных размеров c/R	$c_{22}^{отн}$
а	0,333	0,550	в	—	0,867
	0,5	0,659		—	—
	1	0,830		0,01	0,047
	2	0,918		0,1	0,277
	3	0,973		0,3	0,567
	$(b/a) \rightarrow \infty$	1,003			
б	—	0,772	д	0,01 0,1 0,3	0,050 0,290 0,577

фициента $c_{22}^{отн}$ и оправдывает использование одной и той же поправочной кривой для различных лопаточных профилей

Относительно слабая зависимость коэффициента $c_{22}^{отн}$ от формы поперечного сечения лопатки объясняет экспериментально обнаруженный факт [200], что снижение собственных частот лопаток различных ступеней из-за податливости заделки достаточно хорошо описывается одной и той же поправочной кривой $\psi - l/i$ (см. рис. II 24). Это обстоятельство

имеет место несмотря на то, что, как следует из уравнения (XI.76), величина ψ должна зависеть не от отношения l/i или обратного ему отношения i/l , а от произведения $c_{22}^{отн} (i/l)$.

Таким образом, для ориентировочного учета влияния податливости заделки на первую собственную частоту консольных лопаток могут быть использованы универсальные кривые, полученные на рис. II.25. На рисунке нанесены также результаты испытаний лопаток турбины мощностью 800 МВт, свидетельствующие о достаточной точности оценки влияния податливости заделки с помощью универсальных кривых [33]. Естественно, что несколько более точные результаты могут быть получены для конкретных лопаток при проведении расчетов с использованием метода конечных элементов [219; 229].

Определим влияние податливости заделки на собственные частоты при различных граничных условиях на вершине лопатки. Учитывая обнаруженное ранее малое влияние на собственные частоты коэффициента $c_{12}^{отн}$, примем, что $c_{12}^{отн} = 0$. Кроме того, пренебрежем влиянием сдвига и инерции вращения.

1. Вершина лопатки оперта (в п. II.2 отмечалось, что данные граничные условия могут приближенно выполняться при внутри-пакетных колебаниях лопаток).

С учетом того, что $c_{12} = 0$, граничные условия в рассматриваемом случае примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv(0)}{dz} &= \frac{c_{22}^{отн} i}{EJ} M(0) = c_{22}^{отн} i \frac{d^2 v(0)}{dz^2} \\ v(0) &= -\frac{c_{11}^{отн} i^3}{EJ} Q(0) = -c_{11}^{отн} i^3 \frac{d^3 v(0)}{dz^3} \text{ при } z=0; \\ v(l) &= \frac{d^2 v(l)}{dz^2} = 0 \text{ при } z=l \end{aligned} \right\} \quad (XI\ 80)$$

Используя выражение (XI.17) для собственной формы колебаний лопатки и граничные условия при $z=0$, получим следующие зависимости между произвольными постоянными $C_1 - C_4$:

$$C_2 = (\rho i/l) c_{22}^{отн} C_3;$$

$$C_1 = -(\rho i/l)^3 c_{11}^{отн} C_4$$

Учитывая найденные соотношения и граничные условия при $z=l$, получим следующее частотное уравнение:

$$\begin{aligned} [U(\rho) + (\rho i/l) c_{22}^{отн} T(\rho)] [T(\rho) - \\ - (\rho i/l)^3 c_{11}^{отн} U(\rho)] - [V(\rho) - \\ - (\rho i/l)^3 c_{11}^{отн} S(\rho)] [S(\rho) + \\ + (\rho i/l) c_{22}^{отн} V(\rho)] = 0 \quad (XI.81) \end{aligned}$$

При $(i/l) \rightarrow 0$ уравнение (XI.81) переходит в уравнение

$(\rho) T(\rho) - V(\rho) S(\rho) = 0$, определяющее собственные частоты лопатки, жестко заделанной в корневом сечении и опертой на вершине.

Влияние податливости заделки на первую собственную частоту лопатки с опертой вершиной показано на рис. XI.8, где изображена зависимость коэффициента ψ от l/i при одновременном учете коэффициентов $c_{11}^{отн}$ и $c_{22}^{отн}$, а также при условии $c_{11}^{отн} = 0$ для стержня прямоугольного поперечного сечения с $b/a = 2$.

Как видно, относительное влияние коэффициента $c_{11}^{отн}$ на первую собственную частоту лопатки с опертой вершиной оказалось больше, чем на первую собственную частоту консольной лопатки.

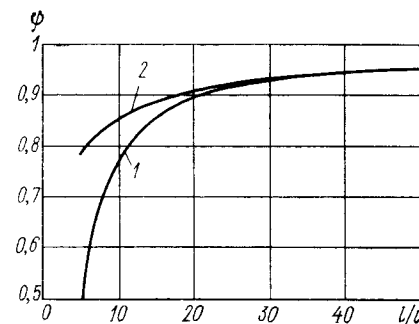


Рис. XI.8. Влияние податливости заделки на первую собственную частоту колебаний стержня прямоугольного поперечного сечения с опертой вершиной:

$$1 - c_{22}^{отн} \neq 0, c_{11}^{отн} \neq 0; \quad 2 - c_{22}^{отн} \neq 0; c_{11}^{отн} = 0$$

Это объясняется тем, что первая собственная частота лопатки с опертой вершиной выше, чем первая собственная частота консольной лопатки, а, как известно, $\rho^4 \sim \rho^2$ и, следовательно, коэффициент $c_{11}^{\text{отн}}$ умножается на относительно больший множитель ρ^3 , чем при колебаниях консольной лопатки (XI.81). Увеличение относительного влияния коэффициента $c_{11}^{\text{отн}}$ по этой же причине, как отмечалось ранее, имеет место и для высших собственных форм колебаний консольной лопатки (см. рис II 26).

2. Вершина лопатки заделана, учтена податливость заделки (случай, приближенно выполняющийся при колебаниях направляющих лопаток).

С учетом принятых предположений и выбранного правила знаков для положительного направления координатных осей, моментов и сил, граничные условия окажутся следующими:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv(0)}{dz} &= c_{22}^{\text{отн}} i \frac{d^2v(0)}{dz^2} \text{ и } v(0) = -c_{11}^{\text{отн}} i^3 \frac{d^3v(0)}{dz^3} \text{ при } z=0; \\ \frac{dv(l)}{dz} &= -\frac{c_{22}^{\text{отн}} i}{EJ} M(l) = -c_{22}^{\text{отн}} i \frac{d^2v(l)}{dz^2} \text{ и } v(l) = \\ &= \frac{c_{11}^{\text{отн}} i^3}{EJ} Q(l) = c_{11}^{\text{отн}} i^3 \frac{d^3v(l)}{dz^3} \text{ при } z=l. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.82})$$

Используя граничные условия (XI.82), получим следующее частотное уравнение:

$$\begin{aligned} & [T(\rho) + 2(\rho i/l) c_{22}^{\text{отн}} S(\rho) + (c_{22}^{\text{отн}})^2 (\rho i/l)^2 V(\rho)] \times \\ & \times [V(\rho) - 2(\rho i/l)^3 c_{11}^{\text{отн}} S(\rho) + (\rho i/l)^6 (c_{11}^{\text{отн}})^2 T(\rho)] - \\ & - [U(\rho) + (\rho i/l) c_{22}^{\text{отн}} T(\rho) - (\rho i/l)^3 c_{11}^{\text{отн}} V(\rho) + \\ & + (\rho i/l)^4 c_{11}^{\text{отн}} c_{22}^{\text{отн}} U(\rho)]^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{XI.83})$$

Результаты вычислений по формуле (XI.83) первой собственной частоты стержня прямоугольного поперечного сечения с $b/a = 2$ приведены на рис. II 27; там же приведены результаты расчетов при условии, что $c_{11}^{\text{отн}} = 0$. Как видно, влияние податливости заделки при использовании граничных условий (XI.82) оказывается наиболее сильным; относительное влияние коэффициента $c_{11}^{\text{отн}}$ в данном случае также оказывается значительно большим, чем при колебаниях консольной лопатки.

Рассмотрим, наконец, влияние податливости заделки на частоты аксиальных колебаний, при которых, как указывалось в п. II.1, лопатка изгибается относительно максимальной оси инерции поперечного сечения. Из табл. XI.1 следует, что податливость заделки при аксиальных колебаниях стержня прямоугольного поперечного сечения оказывается несколько меньше, чем при тангенциальных колебаниях, поскольку значения коэф-

фициентов $c_{ij}^{\text{отн}}$ при увеличении отношения b/a возрастают, а при аксиальных колебаниях $(b/a) < 1$. Например, при уменьшении отношения b/a с 2 до 0,5 коэффициент $c_{22}^{\text{отн}}$, оказывающий наибольшее влияние на первую собственную частоту, уменьшается примерно на 25%. Аналогичным будет изменение податливости заделки и для других рассмотренных выше типов поперечных сечений; например, при аксиальном изгибе стержня, поперечное сечение которого изображено на рис. XI.7, δ , коэффициент $c_{22}^{\text{отн}}$ оказался меньше, чем при тангенциальном изгибе этого же стержня.

С другой стороны, ограниченность осевых размеров обода диска может в большей степени снизить частоты аксиальных колебаний, чем тангенциальных, так как податливость диска при действии сил в его плоскости значительно меньше, чем под действием сил в перпендикулярном направлении. Поэтому в качестве первого приближения можно оценить снижение частот аксиальных колебаний из-за податливости заделки с помощью тех же универсальных кривых, которые использовались и для оценки снижения частот тангенциальных колебаний (см. рис. II.25). Оправданность такого допущения в определенной мере подтверждается экспериментальными результатами, приведенными в [1], где указывается, что значение коэффициента ψ для аксиальных колебаний пакета может быть найдено с помощью экспериментальной кривой I (см. рис. II.24) при условии, что гибкость лопатки определяется по отношению l/i_{max} , где $i_{\text{max}} = \sqrt{J_{\text{max}}/F}$, т. е. при условии, что коэффициент $c_{22}^{\text{отн}}$ при тангенциальных и аксиальных колебаниях сохраняет одно и то же значение.

Поскольку $i_{\text{max}} > i$, т. е. $(l/i_{\text{max}}) < (l/i)$, а ψ является монотонно возрастающей функцией l/i , то для одной и той же лопатки относительное снижение частот аксиальных колебаний из-за податливости заделки может оказаться значительно большим, чем снижение частот тангенциальных колебаний. Учет влияния податливости заделки при определении даже первой собственной частоты аксиальных колебаний оказывается необходимым для значительного большинства ступеней мощных паровых турбин.

XI.6. ОСОБЕННОСТИ КОЛЕБАНИЙ БАНДАЖИРОВАННЫХ ЛОПАТОК

Выше отмечалось, что в связи с ростом мощности турбин в стационарном турбостроении все более широко применяются лопатки, изготовленные заодно с бандажными полками. При рассмотрении колебаний бандажированных лопаток учтем, что на вершине лопатки из-за наличия массы и массового момента инерции бандажной полки как перерезывающая сила, так и изгибающий момент будут отличны от нуля. Не будем учитывать сдвиг, инерцию вращения и первоначально пренебрежем влиянием податливости заделки. При принятых упрощающих предположениях колебания будут описываться дифференциальным уравнением (XI.12a),

а граничные условия с учетом положительного направления сил, моментов и координатных осей примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} v(0) = \frac{dv(0)}{dz} = 0 \text{ при } z = 0; \\ EJ \frac{d^3v(l)}{dz^3} = -m_6 p^2 v(l), \\ EJ \frac{d^2v(l)}{dz^2} - J_6 p^2 \frac{dv(l)}{dz} \text{ при } z = l. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.84})$$

где m_6 — масса бандажной полки; J_6 — массовый момент инерции бандажной полки.

Введя обозначения $A_1 = m_6/m_n$, $A_2 = J_6/(m_n l^2)$ (где $m_n = \gamma l F/g$ — масса пера лопатки), получим следующее частотное уравнение:

$$\begin{aligned} [V(\rho) + A_1 \rho U(\rho)] [T(\rho) - \\ - A_2 \rho^3 U(\rho)] - [S(\rho) + \\ + A_1 \rho V(\rho)] [S(\rho) - \\ - A_2 \rho^3 T(\rho)] = 0. \end{aligned} \quad (\text{XI.85})$$

Используя приближенные формулы для определения геометрических характеристик лопаток, приведенные в [13], можно показать, что для коэффициентов A_1 и A_2 обычно выполняются следующие соотношения: $A_1 \leq 0,5$; $A_2 \leq 0,03$. Зависимость снижения первой собственной частоты лопатки от коэффициентов A_1 и A_2 показана на рис. XI.9, где $\psi_6 = p/p_0$; p — первая собственная частота бандажированной лопатки; p_0 — первая собственная частота лопатки без бандажной полки.

Рис. XI.9. Влияние геометрических характеристик бандажной полки на первую собственную частоту колебаний лопатки: а — $A_2 = 0$; б — $A_1 = 0$

Как следует из приведенных на рис. XI.9 данных, наибольшее влияние на первую частоту изгибных колебаний оказывает масса, а не массовый момент инерции бандажной полки (в гл. XII будет показано, что при крутильных колебаниях определяющим оказывается влияние именно момента инерции полки). Относительное снижение собственных частот бандажированных лопаток по сравнению с лопатками без полок может оказаться весьма значительным.

При определении влияния податливости заделки на первую собственную частоту бандажированных лопаток ограничимся случаем, когда $c_{11}^{\text{отн}} = 0$, $A_2 = 0$.

Граничные условия и частотное уравнение с учетом сделанных предположений примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} v(0) = 0; \quad \frac{dv(0)}{dz} = c_{22}^{\text{отн}} i \frac{d^2v(0)}{dz^2} \text{ при } z = 0; \\ \frac{d^2v(l)}{dz^2} = 0; \quad \frac{d^3v(l)}{dz^3} = -A_1 \frac{\rho^4}{l^3} v(l) \text{ при } z = l, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.86})$$

$$\begin{aligned} [c_{22}^{\text{отн}} (i\rho/l) V(\rho) + S(\rho)] [S(\rho) + A_1 \rho V(\rho)] - T(\rho) \{c_{22}^{\text{отн}} (i\rho/l) U(\rho) + \\ + V(\rho) + A_1 \rho [U(\rho) + c_{22}^{\text{отн}} (i\rho/l) T(\rho)]\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{XI.87})$$

Снижение собственных частот, определяемых уравнением (XI.87), по сравнению с частотами жестко заделанной небанда-

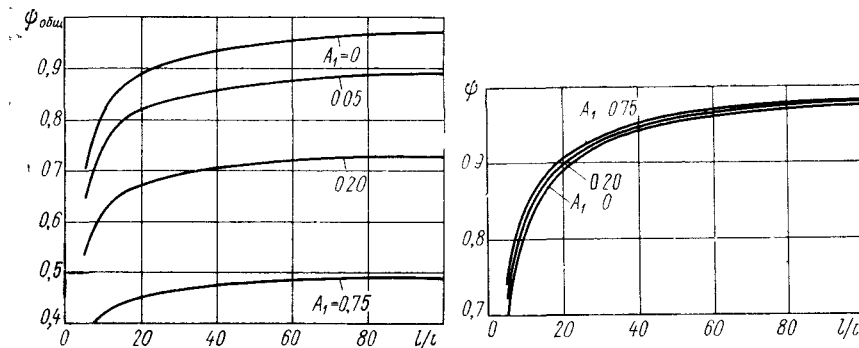
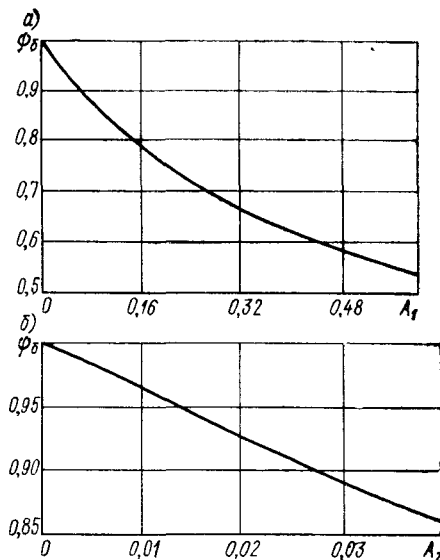


Рис. XI.10. Совместное влияние податливости заделки и массы бандажной полки на первую собственную частоту колебаний лопатки

Рис. XI.11. Влияние податливости заделки на первую собственную частоту колебаний бандажированных лопаток

жированной лопатки вызвано как собственно податливостью заделки, так и влиянием массы бандажной полки. Результаты вычислений для прямоугольного стержня с $b/a = 2$ приведены на рис. XI.10, где введено обозначение $\psi_{\text{общ}} = p'/p_0$; p' — собственная частота бандажированной лопатки с учетом податливости заделки; p_0 — собственная частота жестко заделанной лопатки без бандажной полки.

Чтобы выделить влияние только податливости заделки на частоты бандажированных лопаток, воспользуемся данными, приведенными на рис. XI.9, и представим коэффициент $\psi_{\text{общ}}$ в следующем виде:

$$\psi_{\text{общ}} = \psi \psi_6. \quad (\text{XI.88})$$

Результаты вычисления коэффициента ψ по формуле (XI.88) представлены на рис. XI.11. Как видно, влияние податливости заделки практически не зависит от относительной величины массы бандажной полки, в связи с чем оценка снижения собственных частот бандажированных лопаток из-за податливости заделки может быть выполнена по универсальным кривым для небандажированных лопаток, приведенным на рис. II.25.

XI.7. СИНФАЗНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПАКЕТА ЛОПАТОК

В п. II.2 отмечалось, что для повышения экономичности и вибрационной надежности лопатки стационарных паровых турбин в большинстве случаев соединяются в пакеты или в единый замкнутый на круг пакет различными по конструкции связями: бандажными полками, демферными или паяными проволоками, клепаными бандажами и т. п. При соединении лопаток в пакеты имеют место синфазные колебания, при которых амплитуды различных лопаток примерно равны, и внутрипакетные, при которых амплитуды отличаются как по величине, так и по фазе. При колебаниях на лопатки в месте установки связей действуют перерезывающие силы и изгибающие моменты, относительные величины которых зависят от собственной формы колебаний, места расположения связей по высоте лопатки и лопатки по длине пакета, числа лопаток в пакете, конструкции связей и т. д.

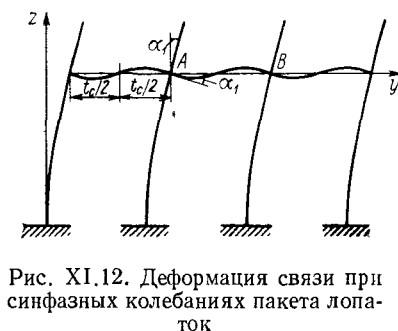


Рис. XI.12. Деформация связи при синфазных колебаниях пакета лопаток

Сначала рассмотрим синфазные колебания, причем будем считать, что амплитуды всех лопаток в точности равны друг другу, корневые сечения лопаток жестко заделаны, а минимальная ось инерции поперечного сечения, относительно которой происходит изгиб лопатки при колебаниях, составляет угол β с плоскостью диска. Деформация связи при синфазных колебаниях пакета лопаток изображена на рис. XI.12.

При тангенциальных колебаниях связь будет вибрировать в радиальном направлении и дифференциальное уравнение для функции Y , определяющей форму колебания связи, может быть записано аналогично уравнению (XI.12a) в виде

$$Y^{IV}(\bar{y}) = \frac{\gamma F_c t_c^4}{g E J_c} p^2 Y(\bar{y}) = \lambda^4 Y(\bar{y}), \quad (XI.89)$$

где J_c , F_c — момент инерции и площадь поперечного сечения связи; t_c — длина шага связи; p — частота колебаний пакета

лопаток; $\lambda^4 = p^2/b^2$; $b^2 = E J_c g / (F_c t_c^4 \gamma)$; $\bar{y}$ — относительная координата, $\bar{y} = y/t_c$, $0 \leq \bar{y} \leq 1$.

Начало координат поместим в точке A (рис. XI.12). Граничные условия при колебаниях шага связи будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} Y=0 \text{ и } \frac{1}{t_c} \frac{dY}{d\bar{y}} &= \alpha_1 \text{ при } \bar{y}=0; \\ Y=0 \text{ и } \frac{1}{t_c} \frac{dY}{d\bar{y}} &= \alpha_1 \text{ при } \bar{y}=1, \end{aligned} \right\} \quad (XI.90)$$

где аналогично изложенному в п. IV.1, $\alpha_1 = [dv(t_c)/dz] \cos \beta$; $dv(t_c)/dz$ — угол наклона оси лопатки в месте установки связи.

Решение дифференциального уравнения (XI.89) имеет вид (XI.17), т. е.

$$Y(\bar{y}) = C_1 S(\lambda \bar{y}) + C_2 T(\lambda \bar{y}) + C_3 U(\lambda \bar{y}) + C_4 V(\lambda \bar{y}). \quad (XI.91)$$

Используя граничные условия (XI.90), получим:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0; \quad C_2 = \alpha_1 t_c / \lambda; \\ C_3 &= \frac{\alpha_1 t_c}{\lambda} \frac{[V(\lambda) - S(\lambda) V(\lambda) + T(\lambda) U(\lambda)]}{[T(\lambda) V(\lambda) - U^2(\lambda)]}; \\ C_4 &= -C_3 \frac{U(\lambda)}{V(\lambda)} - \frac{\alpha_1 t_c}{\lambda} \frac{T(\lambda)}{V(\lambda)}. \end{aligned} \right\} \quad (XI.92)$$

Так как рассматриваются синфазные колебания, то из условий симметрии запишем следующие равенства:

$$Y(0, 5) = Y''(0, 5) = 0; \quad Y'(1) = -Y'(0).$$

Моменты, действующие в сечениях связи A и B (т. е. в местах заделки связи в лопатках), равны:

$$M(0) = -E J_c Y''(0)/t_c^2;$$

$$M(1) = E J_c Y''(1)/t_c^2 = -E J_c Y''(0)/t_c^2,$$

Следовательно, на лопатку от связи действует в плоскости диска момент, равный:

$$M' = 2M(0) = -2E J_c Y''(0)/t_c^2.$$

Как показано в п. IV.1, момент, действующий от связи на лопатку в плоскости ее изгиба в сечении, в котором закреплена связь, равен:

$$M'' = M' \cos \beta = -2E J_c Y''(0) \cos \beta / t_c^2.$$

Учитывая, что $Y''(0) = C_3 \lambda^2$, а $\alpha_1 = [dv(t_c)/dz] \cos \beta$, получим следующее выражение;

$$M'' = -\frac{2E J_c \cos^2 \beta}{t_c} \frac{dv(t_c)}{dz} \frac{\lambda [V(\lambda) - S(\lambda) V(\lambda) + T(\lambda) U(\lambda)]}{[T(\lambda) V(\lambda) - U^2(\lambda)]}. \quad (XI.93)$$

При выводе выражения для момента M'' предполагалось, что при колебаниях углы наклона связи в месте ее крепления к

лопатке равны углу наклона оси лопатки α_1 в этом же месте, т.е. считалось, что связь жестко соединена с лопаткой. Кроме того, предполагалось, что ширина связи в осевом направлении много меньше ширины лопатки или угол установки лопатки β мал, что позволяло пренебречь уменьшением длины деформируемого участка связи (см. п. IV.1, [173]). Фактически необходимо учесть как податливость зоны соединения лопатки со связью, так и конечную ширину связи в осевом направлении, что может быть осуществлено введением экспериментального поправочного коэффициента H_c . Так как неучтенные при выводе выражения для M'' факторы могут как повышать, так и понижать жесткость связей, то величина коэффициента H_c может быть как меньше, так и больше единицы.

После введения в расчет поправочного коэффициента H_c действительный момент, действующий от связи на лопатку, будет равен $H_c M''$. Конечное число лопаток в пакете m , как указывалось в п. IV.1, может быть приближенно учтено, если взять среднее значение момента

$$M_c = [(m-1)/m] H_c M''.$$

Заменив M'' его значением, окончательно найдем

$$M_c = -\frac{2(m-1)EJ_c H_c \cos^2 \beta}{mt_c} \times \times \frac{dv(l_c)}{dz} \frac{\lambda [V(\lambda) - S(\lambda)V(\lambda) + T(\lambda)U(\lambda)]}{[T(\lambda)V(\lambda) - U^2(\lambda)]}. \quad (XI.94)$$

Полученное выражение может быть существенно упрощено, если учесть, что частота собственных колебаний шага связи велика по сравнению с частотой колебаний пакета лопаток.

Действительно, если шаг связи рассматривать как стержень, защемленный с обеих сторон, то частота его собственных колебаний может быть вычислена по уравнению (XI.31), причем для первого тона колебаний справедлива формула

$$f_{1c} = \frac{4,73^2}{2\pi t_c^2} \sqrt{\frac{EJ_{cg}}{F_{cy}}}.$$

Проведя вычисления по формуле, получим, что для стальной проволоки диаметром $d_c = 8$ мм при длине шага связи $t_c = 50$ мм $f_{1c} = 14\,600$ Гц; при $d_c = 3$ мм и $t_c = 20$ мм $f_{1c} = 34\,200$ Гц; для бандажа толщиной 3 мм и $t_c = 20$ мм $f_{1c} = 39\,600$ Гц. В то же время соответствующие частоты первого тона пакетов лопаток лежат в интервале 200—800 Гц.

Таким образом, частоты собственных колебаний шага связи превосходят частоты колебаний пакетов лопаток в 50 раз и более.

Заметим, что выражение для λ может быть представлено в виде

$$\lambda^4 = (p/b)^2 = (p/p_{1c})^2 (p_{1c}/b)^2 = (p/p_{1c})^2 \rho_1^4,$$

где p_{1c} — круговая частота колебаний шага связи.

Отсюда $\lambda = \rho_1 \sqrt{p/p_{1c}} = 4,73 \sqrt{f/f_{1c}}$. Так как f_{1c} значительно больше f , то $\lambda < 1$ и в этом случае можно использовать приближенные выражения для функций А. Н. Крылова, разложив их в ряд Тейлора и ограничиваясь несколькими первыми членами. Например, сохраняя члены до λ^4 включительно, получим:

$$\operatorname{sh} \lambda = \lambda + (\lambda^3/6); \quad \operatorname{ch} \lambda = 1 + (\lambda^2/2) + (\lambda^4/24);$$

$$\sin \lambda = \lambda - (\lambda^3/6); \quad \cos \lambda = 1 - (\lambda^2/2) + (\lambda^4/24),$$

что приводит к следующим выражениям:

$$S(\lambda) = 1 + (\lambda^4/24); \quad T(\lambda) = \lambda; \quad U(\lambda) = \lambda^2/2; \quad V(\lambda) = \lambda^3/6. \quad (XI.95)$$

Подставляя найденные приближенные выражения в формулы для C_3 , C_4 , M_c и $Y(\bar{y})$, найдем:

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= -6\alpha_1 t_c / \lambda^2; \quad C_4 = 12\alpha_1 t_c \lambda^3; \\ M_c &= \frac{12(m-1)EJ_c H_c \cos^2 \beta}{mt_c} \frac{dv(l_c)}{dz}; \\ Y(\bar{y}) &= (\alpha_1 t_c / \lambda) T(\lambda \bar{y}) - 6(\alpha_1 t_c / \lambda^2) U(\lambda \bar{y}) + \\ &+ 12(\alpha_1 t_c / \lambda^3) V(\lambda \bar{y}) = \alpha_1 t_c (\bar{y} - 3\bar{y}^2 + 2\bar{y}^3). \end{aligned} \right\} \quad (XI.96)$$

Если перейти к относительной координате ζ , то

$$M_c = \frac{12(m-1)EJ_c H_c \cos^2 \beta}{mt_c l} \frac{dv(\zeta_c)}{d\zeta}. \quad (XI.96a)$$

Как следует из вышеизложенного, момент, действующий в заданном сечении связи,

$$M'_c = \frac{M_c}{2 \cos \beta} = \frac{6(m-1)EJ_c H_c \cos \beta}{mt_c l} \frac{dv(\zeta_c)}{d\zeta}. \quad (XI.97)$$

Формулы (XI.96a) и (XI.97) совпадают с соответствующими выражениями для моментов, полученными в п. IV.1 при рассмотрении статической задачи.

Таким образом, если частота собственных колебаний шага связи настолько велика по сравнению с частотой колебаний пакета, что справедливы формулы (XI.95), то воздействие со стороны лопаток на связь можно рассматривать как статическое.

Если при разложении в ряд функций А. Н. Крылова сохранить члены до λ^8 включительно, то придем к следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} S(\lambda) &= 1 + (\lambda^4/24) + (\lambda^8/40320); \quad T(\lambda) = \lambda + (\lambda^5/120); \\ U(\lambda) &= (\lambda^2/2) + (\lambda^6/720); \quad V(\lambda) = (\lambda^3/6) + (\lambda^7/5040). \end{aligned} \right\} \quad (XI.95a)$$

По формулам (XI.92) в этом случае найдем:

$$C_3 = -\frac{\alpha_1 t_c}{\lambda^2} \left(6 - \frac{\lambda^4}{420} \right); \quad C_4 = \frac{\alpha_1 t_c}{\lambda^3} \left(12 - \frac{3\lambda^4}{140} \right),$$

а выражение для M_c окажется следующим:

$$M_c = \frac{(m-1)EH_c J_c \cos^2 \beta}{m t_c l} \frac{dv(\xi_c)}{d\xi} \left(12 - \frac{\lambda^4}{210} \right). \quad (XI.98)$$

Используя выражение для λ^4 , получим

$$M_c = \frac{12(m-1)EH_c J_c \cos^2 \beta}{m t_c l} \frac{dv(\xi_c)}{d\xi} - \frac{(m-1)H_c \cos^2 \beta}{ml} \frac{dv(\xi_c)}{d\xi} \frac{m_c t_c^2 p^2}{210}, \quad (XI.98a)$$

где $m_c = \gamma F_c t_c / g$ — масса шага связи.

Второй член в формуле (XI.98a) учитывает уменьшение изгибной жесткости связи из-за динамического характера приложения действующих на нее сил.

В месте крепления связи при синфазных колебаниях на лопатку действует также перерезывающая сила — сила инерции шага связи, равная

$$Q_c = -m_c \frac{\partial^2 V(\xi_c)}{\partial t^2}.$$

Учитывая, что колебания носят синусоидальный характер, легко получим амплитудное значение перерезывающей силы

$$Q_c = m_c p^2 v(\xi_c).$$

В дальнейшем будем считать, что воздействие на связь можно рассматривать как статическое и при этом условии вычислим частоты синфазных колебаний пакета лопаток, соединенных различными по конструкции связями

XI.8. СИНФАЗНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПАКЕТА ЛОПАТОК С РАЗЛИЧНЫМИ ПО КОНСТРУКЦИИ СВЯЗЯМИ

Пакет лопаток, соединенных бандажом. В п. XI.2 было показано, что собственная форма при колебаниях жестко заделанной лопатки описывается уравнением (XI.21). При соединении лопаток бандажом в периферийных сечениях лопаток при колебаниях действует изгибающий момент и перерезывающая сила, определяемые по формулам:

$$M_6 = \frac{12(m-1)EH_6 J_6 \cos^2 \beta}{m l t_6} \frac{dv(1)}{d\xi}; \quad Q_6 = m_6 p^2 v(1).$$

Граничные условия на вершине лопатки имеют вид:

$$EJ \frac{d^2 v(l)}{dz^2} = -M_6 \text{ и } EJ \frac{d^3 v(l)}{dz^3} = -Q_6 \text{ при } z = l. \quad (XI.99)$$

Если перейти к относительной координате и ввести обозначения:

$$k_6 = \frac{12(m-1)H_6 J_6 l \cos^2 \beta}{m J t_6}; \quad k = \frac{m_6 l^3 p^2}{EJ}, \quad (XI.100)$$

то граничные условия на вершине будут следующими:

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} = -k_6 \frac{dv}{d\xi} \text{ и } \frac{d^3 v}{d\xi^3} = -kv \text{ при } \xi = 1. \quad (XI.99a)$$

В отличие от рассмотренного ранее случая колебаний отдельных бандажированных лопаток изгибающий момент, действующий в периферийном сечении, связан с изгибом бандаж и препятствует повороту периферийного сечения лопатки, повышая частоты синфазных колебаний.

Учитывая выражение для собственной формы лопатки, жестко заделанной по корневому сечению (XI.21), перепишем граничные условия (XI.99a) в виде:

$$\left. \begin{aligned} C_3 [\rho S(\rho) + k_6 T(\rho)] + C_4 [\rho T(\rho) + k_6 U(\rho)] &= 0; \\ C_3 [\rho^3 V(\rho) + kU(\rho)] + C_4 [\rho^3 S(\rho) + kV(\rho)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (XI.99b)$$

Условие обращения в нуль определителя системы (XI.99b) приводит к следующему частотному уравнению:

$$\begin{aligned} &[\rho S(\rho) + k_6 T(\rho)][\rho^3 S(\rho) + kV(\rho)] - \\ &- [\rho T(\rho) + k_6 U(\rho)][\rho^3 V(\rho) + kU(\rho)] = 0. \end{aligned} \quad (XI.101)$$

Так как $\rho^4 = p^2 \gamma F l^4 / (g E J)$; $m_l = \gamma F l / g$, то $k = (m_6 / m_l) \rho^4 = v_6 \rho^4$.

Введя выражение для коэффициента k в уравнение (XI.101), получим:

$$\begin{aligned} &[\rho S(\rho) + k_6 T(\rho)][S(\rho) + v_6 \rho V(\rho)] - \\ &- [\rho T(\rho) + k_6 U(\rho)][V(\rho) + v_6 \rho U(\rho)] = 0. \end{aligned} \quad (XI.101a)$$

Уравнение (XI.101) определяет частоты синфазных колебаний пакета лопаток, соединенных бандажом. На рис. II.4 и II.8 построена зависимость частот первого и второго тонов синфазных колебаний от величины v_6 и k_6 .

Раздельное влияние массы и жесткости бандаж может быть исследовано, если в уравнении (XI.101a) положить $k_6 = 0$ или $v_6 = 0$. Например, если пренебречь изгибной жесткостью бандаж, т. е. считать $k_6 = 0$, то частотное уравнение примет следующий вид:

$$\rho S(\rho)[S(\rho) + v_6 \rho V(\rho)] - \rho T(\rho)[V(\rho) + v_6 \rho U(\rho)] = 0. \quad (XI.102)$$

Если, наоборот, пренебречь массой бандаж, то частотное уравнение окажется следующим:

$$[\rho S(\rho) + k_6 T(\rho)]S(\rho) - [\rho T(\rho) + k_6 U(\rho)]V(\rho) = 0. \quad (XI.103)$$

Определим максимально возможное повышение собственных частот синфазных колебаний, имеющее место при условии $v_6 = 0$, $k_6 \rightarrow \infty$. В этом случае граничные условия на вершине лопатки примут вид:

$$dv/d\xi = 0 \text{ и } d^3 v/d\xi^3 = 0 \text{ при } \xi = 1.$$

Воспользовавшись этими граничными условиями и уравнением (XI.21) для собственной формы жестко заделанной в корневом сечении лопатки, получим следующее частотное уравнение:

$$S(\rho)T(\rho) - U(\rho)V(\rho) = 0. \quad (\text{XI.104})$$

Значения ρ , соответствующие трем низшим собственным частотам, определяемым по уравнению (XI.104), равны 2,365; 5,5 и 8,64, откуда с учетом данных п. XI.3 следует, что $\rho_{1\text{отн}} = (2,365/1,875)^2 = 1,59$; $\rho_{2\text{отн}} = (5,5/4,694)^2 = 1,375$; $\rho_{3\text{отн}} = (8,64/7,855)^2 = 1,21$. Как видно, в наибольшей степени изменяется частота синфазных колебаний первого тона.

Собственную форму и распределение динамических напряжений, соответствующие собственным частотам синфазных колебаний, можно определить из системы (XI.99б). Так как собственные частоты обращают в нуль определитель системы (XI.99б), то связь между C_3 и C_4 может быть найдена, например, из первого уравнения системы

$$C_1 C_3 = -[\rho S(\rho) + k_0 T(\rho)][\rho T(\rho) + k_0 U(\rho)] = -\alpha.$$

Используя уравнение (XI.25), получим следующее выражение для собственной формы.

$$v(\xi) = C_3 [U(\rho\xi) - \alpha V(\rho\xi)]. \quad (\text{XI.105})$$

Пакет лопаток, соединенных одной связью в промежуточном по высоте сечении. Если лопатки соединены одной связью, например паяной проволокой, расположенной на расстоянии $\xi_n = l_n l$ от корня лопатки, то в месте установки проволоки на лопатку действуют изгибающий момент M_n и перерезывающая сила Q_n

$$M_n = \frac{12(m-1)EJ_n H_n \cos^2 \beta}{m l t_n} \frac{dv(\xi_n)}{d\xi};$$

$$Q_n = m_n p^2 v(\xi_n) \text{ при } \xi = \xi_n. \quad (\text{XI.106})$$

Так как на вершине лопатки связь отсутствует, то в периферийном сечении выполняются следующие граничные условия:

$$d^2 v(1)/d\xi^2 = d^3 v(1)/d\xi^3 = 0. \quad (\text{XI.107})$$

Обозначим решение дифференциального уравнения, соответствующее участку $0 \leq \xi < \xi_n$, через v_1 , а участку $\xi_n \leq \xi \leq 1$ — через v_2 . Так как при $\xi = \xi_n$ на лопатку действуют сосредоточенный изгибающий момент и сосредоточенная сила, определяемые по формулам (XI.106), то при $\xi = \xi_n$ должны выполняться следующие условия:

$$v_1 = v_2; \quad dv_1/d\xi = dv_2/d\xi; \quad M_2 = M_1 + M_n, \quad Q_2 = Q_1 + Q_n \quad (\text{XI.108})$$

Учитывая выражения (XI.106), преобразуем два последних уравнения (XI.108) к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v_2}{d\xi^2} &= \frac{d^2 v_1}{d\xi^2} - \frac{12(m-1)H_n J_n l \cos^2 \beta}{m J t_n} \frac{dv_1}{d\xi}; \\ \frac{d^3 v_2}{d\xi^3} &= \frac{d^3 v_1}{d\xi^3} + \frac{m_n l^3}{EJ} p^2 v_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.108a})$$

Так как для лопатки, жестко заделанной в корневом сечении,

$$v_1(0) = dv_1(0)/d\xi = 0, \text{ то } v_1(\xi) = C_3 U(\rho\xi) + C_4 V(\rho\xi).$$

Выражение для $v_2(\xi)$ может быть представлено в виде

$$v_2(\xi) = C'_1 S(\rho\xi) + C'_2 T(\rho\xi) + C'_3 U(\rho\xi) + C'_4 V(\rho\xi),$$

причем произвольные постоянные $C'_1 - C'_4$ могут быть выражены через C_3 и C_4 с помощью четырех уравнений (XI.108).

Следуя [95], покажем, что можно не вводить в рассмотрение произвольные постоянные $C'_1 - C'_4$, а представить $v_2(\xi)$ в виде:

$$\begin{aligned} v_2(\xi) &= v_1(\xi) + \frac{l^3}{EJ\rho^3} Q_n V[\rho(\xi - \xi_n)] + \\ &+ \frac{l^2}{EJ\rho^2} M_n U[\rho(\xi - \xi_n)]. \end{aligned} \quad (\text{XI.109})$$

Нетрудно проверить, что выражение (XI.109) удовлетворяет как дифференциальному уравнению (XI.12а), так и условиям (XI.108), поскольку при $\xi = \xi_n$: $S_n[\rho(\xi - \xi_n)] = 1$, $T[\rho(\xi - \xi_n)] = U[\rho(\xi - \xi_n)] = V[\rho(\xi - \xi_n)] = 0$

Введя обозначения:

$$v_n = \frac{m_n}{m_l}; \quad k_n = \frac{12(m-1)H_n J_n l \cos^2 \beta}{m J t_n}$$

и принимая во внимание, что

$$\rho^4 = p^2 \gamma F l^4 (gEJ); \quad m_n = \gamma F l^3 g,$$

преобразуем выражение (XI.109) к виду

$$\begin{aligned} v_2(\xi) &= C_3 \{U(\rho\xi) + v_n \rho U(\rho\xi_n) V[\rho(\xi - \xi_n)] + \\ &+ (k_n/\rho) T(\rho\xi_n) U[\rho(\xi - \xi_n)]\} + C_4 \{V(\rho\xi) + v_n \rho V(\rho\xi_n) V[\rho(\xi - \xi_n)] + \\ &+ (k_n/\rho) U(\rho\xi_n) U[\rho(\xi - \xi_n)]\} \end{aligned} \quad (\text{XI.109a})$$

Граничные условия (XI.107) дадут два уравнения для определения произвольных постоянных C_3 и C_4 :

$$\left. \begin{aligned} d^2 v_2(1)/d\xi^2 &= a_1 C_3 + b_1 C_4 = 0; \\ d^3 v_2(1)/d\xi^3 &= a_2 C_3 + b_2 C_4 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.110})$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= S(\rho) + v_{11}\rho U(\rho\xi_{11})T[\rho(1-\xi_{11})] + (k_{11}/\rho)T(\rho\xi_{11})S[\rho(1-\xi_{11})]; \\ b_1 &= T(\rho) + v_{11}\rho V(\rho\xi_{11})T[\rho(1-\xi_{11})] + (k_{11}/\rho)U(\rho\xi_{11})S[\rho(1-\xi_{11})]; \\ a_2 &= V(\rho) + v_{11}\rho U(\rho\xi_{11})S[\rho(1-\xi_{11})] + (k_{11}/\rho)T(\rho\xi_{11})V[\rho(1-\xi_{11})]; \\ b_2 &= S(\rho) + v_{11}\rho V(\rho\xi_{11})S[\rho(1-\xi_{11})] + (k_{11}/\rho)U(\rho\xi_{11})V[\rho(1-\xi_{11})] \end{aligned}$$

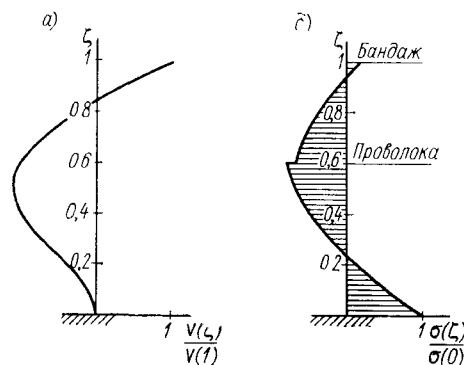


Рис XI.13 Собственная форма (а) и распределение динамических напряжений по высоте лопатки (б) при втором тоне синфазных колебаний пакета

дующими геометрическими характеристиками [107]: $m = 10$; $\beta = 2^\circ$; $l = 102$ мм; $F = 490$ мм²; $J = 11\,150$ мм⁴; $\xi_{11} = 0,6$; $k_{11} = 0,0911$; $v_{11} = 0,02$; $H_{11} = 0,3$; $k_6 = 0,0904$; $v_6 = 0,126$; $H_6 = 0,2$. Результаты вычислений приведены на рис XI.13, где указаны безразмерные величины $v(\xi)/v(1)$ и $\sigma(\xi)/\sigma(0) = [d^2v(\xi)/d\xi^2]/[d^2v(0)/d\xi^2]$.

XI.9. ВНУТРИПАКЕТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК

В п. II.2 отмечалось, что при соединении лопаток в пакеты, помимо синфазных колебаний имеют место колебания типа В (внутрипакетные), при которых амплитуды различных лопаток в пакете отличаются как по величине, так и по фазе.

Для выяснения качественных особенностей внутрипакетных колебаний первоначально рассмотрим пакет лопаток, соединенных растяжимыми безмассовыми связями, не обладающими изгибной жесткостью. При принятой схематизации связей оказывается возможным получение аналитических выражений для собственных частот и форм, что позволяет проанализировать влияние геометрических характеристик лопаток и связей на спектр собственных частот. Оправданность принятой схематизации объясняется следующим: при внутрипакетных колебаниях относительный прогиб сечения лопатки, где установлена связь, в большинстве

Как и обычно, значения ρ , соответствующие собственным частотам, обращают в нуль определитель системы (XI.110), т. е. частотное уравнение примет следующий вид:

$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0.$$

Аналогично могут быть вычислены и частоты колебаний лопаток, соединенных одновременно как паяной проволокой, так и бандажом. В качестве примера рассмотрим результаты вычисления второго тона синфазных колебаний пакета лопаток со сле-

дующим влиянием массы шага связи на частоты внутрипакетных колебаний [107]; изменение изгибной жесткости связей также относительно слабо влияет на собственные частоты внутрипакетных колебаний. Кроме того, существуют конструкции связей (например, получившие широкое распространение демпферные проволоки), которые в незначительной степени ограничивают угол поворота лопатки при колебаниях, т. е. для которых поправочный коэффициент H_c оказывается значительно меньше единицы (см. п. XVI.3). Все это позволяет в первом приближении пренебречь изгибной жесткостью связей и свести их воздействие на лопатку к перерезывающей силе, приложенной в поперечном сечении, где установлена связь

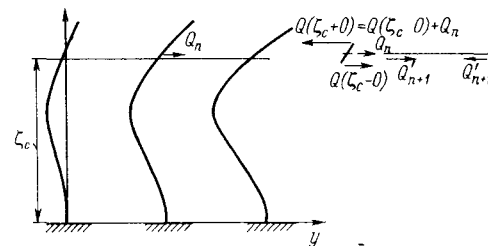


Рис XI.14 Принятая система координат и силы, действующие на лопатки при внутрипакетных колебаниях

Будем считать также, что лопатка жестко заделана в корневом сечении, а угол установки лопатки равен нулю, т. е. колебания происходят в плоскости диска.

Принятая система координат и силы, действующие на лопатки и связи при колебаниях, изображены на рис. XI.14. С учетом принятых предположений и результатов предыдущего параграфа система уравнений для определения частот колебаний примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} v_{1n}(\xi) &= C_{3n}U(\rho\xi) + C_{4n}V(\rho\xi) \text{ при } 0 \leq \xi < \xi_c; \\ v_{2n}(\xi) &= C_{3n}U(\rho\xi) + C_{4n}V(\rho\xi) + \\ &+ \frac{l^3}{EJ\rho^3} Q_n V(\rho\xi - \rho\xi_c) \text{ при } \xi_c \leq \xi < 1; \\ Q_n &= Q'_n - Q'_{n+1}; \\ v_n(\xi_c) &= v_{n+1}(\xi_c) + (Q'_{n+1}t_c)/(EF_c), \end{aligned} \right\} \quad (XI.111)$$

где $v_{1n}(\xi)$ и $v_{2n}(\xi)$ — собственная форма n -й лопатки на участке до и после установки связи; C_{3n} , C_{4n} — произвольные постоянные; $Q_n(\xi_c - 0)$ и $Q_n(\xi_c + 0)$ — перерезывающие силы, действующие в поперечных сечениях n -й лопатки, расположенных непосредственно ниже и выше сечения, где установлена связь; Q_n — перерезывающая сила, действующая от связи на n -ю лопатку; Q'_n — перерезывающая сила, действующая в поперечном сечении связи на участке между $n-1$ и n -й лопатками (так как пренебрегается массой связи, то величина Q'_n сохраняется неизменной на протяжении всего шага); t_c , F_c — длина шага связи и площадь ее поперечного сечения.

Для определения произвольных постоянных C_m и C_{An} необходимо использовать граничные условия на вершине лопатки, которые в данном случае имеют вид (XI.107).

Из уравнений (XI.107) и (XI.111) нетрудно получить следующие соотношения:

$$Q_n = (EF_c/t_c) [v_{n+1}(\xi_c) + v_{n-1}(\xi_c) - 2v_n(\xi_c)], \quad Q_n = v_n(\xi_c) (EJ\rho^3/l^3) A, \quad \text{где}$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{S^2(\rho) - T(\rho)V(\rho)}{V(\rho)V(\rho\xi_c)T(\rho - \rho\xi_c) - S(\rho)U(\rho\xi_c)T(\rho - \rho\xi_c) - S(\rho)V(\rho\xi_c)S(\rho - \rho\xi_c) + T(\rho)U(\rho\xi_c)S(\rho - \rho\xi_c)}; \\ v_{1n}(\xi) &= \frac{Q_n l^3}{EJ\rho^3 [S^2(\rho) - T(\rho)V(\rho)]} \times \\ &\times \{U(\rho\xi)[T(\rho)S(\rho - \rho\xi_c) - S(\rho)T(\rho - \rho\xi_c)] + \\ &+ V(\rho\xi)[T(\rho - \rho\xi_c)V(\rho) - S(\rho)S(\rho - \rho\xi_c)]\} \\ &\text{при } 0 \leq \xi < \xi_c; \\ v_{2n}(\xi) &= v_{1n}(\xi) + \frac{Q_n l^3}{EJ\rho^3} V(\rho\xi - \rho\xi_c) \text{ при } \xi_c \leq \xi \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI } 112)$$

Из уравнений (XI.111) и (XI.112) можно получить уравнение в конечных разностях второго порядка с постоянными коэффициентами относительно $v_n(\xi_c)$ или Q_n :

$$\left. \begin{aligned} v_{n+1}(\xi_c) + v_{n-1}(\xi_c) + v_n(\xi_c)(-2 - B) &= 0; \\ Q_{n+1} + Q_{n-1} + Q_n(-2 - B) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI } 113)$$

где $B = AJ\rho^3 t_c / (F_c l^3)$.

Решение уравнения в конечных разностях (XI.113) будем искать следующим образом.¹ Примем, что $Q_n = Cx^n$, тогда

$$x^2 + x(-2 - B) + 1 = 0;$$

$$x_{1,2} = 1 + \frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} + B}; \quad Q'_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n. \quad (\text{XI.114})$$

Кроме того, из (XI.114) следует, что выполняются следующие соотношения:

$$x_1 x_2 = 1; \quad x_1 + x_2 = 2 + B. \quad (\text{XI.115})$$

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 используем граничные условия на концах пакета из m лопаток: как следует из рис. XI.14, $Q'_1 = Q'_{m+1} = 0$, что приводит к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_1 x_1 + C_2 x_2 &= 0; \\ C_1 x_1^{m+1} + C_2 x_2^{m+1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.116})$$

Чтобы C_1 и C_2 не были одновременно равны нулю, должно выполняться соотношение

$$x_1 x_2^{m+1} - x_2 x_1^{m+1} = 0. \quad (\text{XI.117})$$

Учитывая соотношения (XI.115), получим:

$$(1/x_1^m) - x_1^m = 0 \text{ или } 1 - x_1^{2m} = 0. \quad (\text{XI.117a})$$

Из уравнения (XI.117a) получим, что $x_1 = \exp(i\varphi_k)$, где $0 < \varphi_k < 2\pi$, причем $\varphi_k 2m = 2k\pi$, $\varphi_k = k\pi/m$, $k = 1, 2, \dots, 2m - 1$.

При изучении внутрипакетных колебаний случай $x_1 = \pm 1$ не рассматриваем, так как при наличии кратных корней выражение для Q'_n следует искать в виде $Q'_n = (C_1 + nC_2)(\pm 1)^n$. Нетрудно показать, что кратные корни определяют частоты синфазных, а не внутрипакетных колебаний. Учитывая, что $\exp(i\varphi_k) + \exp(-i\varphi_k) = 2 \cos \varphi_k$, из уравнений (XI.115) и (XI.117) получим $x_1 + x_2 = 2 + B = 2 \cos \varphi_k$. Таким образом, уравнение для определения собственных частот внутрипакетных колебаний примет следующий вид.

$$-B = 2 - 2 \cos \varphi_k = 4 \sin^2(\varphi_k/2) = 4 \sin^2[k\pi/(2m)], \quad (\text{XI } 118)$$

или

$$-\frac{J\rho^3 t_c}{F_c l^3} \frac{S^2(\rho) - T(\rho)V(\rho)}{V(\rho)V(\rho\xi_c)T(\rho - \rho\xi_c) - S(\rho)U(\rho\xi_c)T(\rho - \rho\xi_c) - S(\rho)V(\rho\xi_c)S(\rho - \rho\xi_c) + T(\rho)U(\rho\xi_c)S(\rho - \rho\xi_c)} = 4 \sin^2[k\pi/(2m)],$$

где $k = 1, 2, \dots, m - 1$; случай $k = m$ не рассматриваем, так как при этом $x_1 = x_2 = -1$, а при условии $m < k' \leq 2m - 1$ выполняется соотношением

$$\sin[k'\pi/(2m)] = \sin[(2m - k)\pi/(2m)] = \sin[k\pi/(2m)],$$

где $1 \leq k \leq m - 1$, поэтому значения k' не определяют дополнительных собственных частот.

Таким образом, уравнение (XI.118) позволяет найти различные группы внутрипакетных колебаний (B_0, B_1, B_2 и т. д.), каждая из которых состоит из $m - 1$ различных собственных частот, определяемых значениями $k = 1, 2, \dots, m - 1$.

Используя известные формулы

$$[\exp(in\varphi) + \exp(-in\varphi)]/2 = \cos n\varphi,$$

$$[\exp(in\varphi) - \exp(-in\varphi)]/2i = \sin n\varphi,$$

перепишем первое из уравнений (XI.116) в виде

$$\begin{aligned} Q'_1 &= C_1 \exp(i\varphi_k) + C_2 \exp(-i\varphi_k) = \\ &= C'_1 \cos(k\pi/m) + C'_2 \sin(k\pi/m) = 0. \end{aligned}$$

¹ Блейх Е., Мелан Ф. Уравнения в конечных разностях статики сооружений. Харьков: ОНТИ, 1936, 378 с.

Из этого уравнения может быть найдена связь между произвольными постоянными C'_1 и C'_2

$$C'_2 = -C'_1 \operatorname{ctg} (k\pi/m).$$

Учитывая последнее соотношение и выражение (XI.114) для Q'_n , получим

$$Q'_n = C'_1 \left(\cos \frac{k\pi n}{m} - \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{m} \sin \frac{k\pi n}{m} \right). \quad (\text{XI.119})$$

Кроме того, из уравнений (XI.111)–(XI.113) найдем

$$v_n(\xi_c) = \frac{Q_n l^3}{E J \rho^3 A} = (Q'_n - Q'_{n+1}) \frac{t_c}{E F_c B}. \quad (\text{XI.120})$$

Используя формулу (XI.119), получим следующее выражение для распределения амплитуд по длине пакета:

$$v_n(\xi_c) = \frac{C'_1 t_c}{E F_c B} \left[\cos \frac{k\pi n}{m} - \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{m} \sin \frac{k\pi n}{m} - \cos \frac{k\pi (n+1)}{m} + \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{m} \sin \frac{k\pi (n+1)}{m} \right] = \frac{C'_1 t_c}{E F_c B \cos [k\pi/(2m)]} \cos \frac{k\pi}{m} \left(n - \frac{1}{2} \right) - \frac{C'_1 l^3}{E J \rho^3 A \cos [k\pi/(2m)]} \cos \frac{k\pi}{m} \left(n - \frac{1}{2} \right). \quad (\text{XI.121})$$

Из формулы (XI.121) следует, что величина k определяет число узлов, т. е. число перемен знака по длине пакета.

Из уравнений (XI.120) и (XI.121) найдем, что величина усилий, действующих на лопатки от связей, изменяется по длине пакета следующим образом:

$$Q_n = \frac{C'_1}{\cos [k\pi/(2m)]} \cos \frac{k\pi}{m} \left(n - \frac{1}{2} \right). \quad (\text{XI.122})$$

Преобразуя формулу (XI.119), получим, что усилие, действующее в поперечном сечении связи, изменяется по длине пакета по закону

$$Q'_n = -\frac{C'_1}{\sin (k\pi/m)} \sin \frac{k\pi}{m} (n-1). \quad (\text{XI.119a})$$

Из сопоставления формул (XI.119a) и (XI.122) следует, что лопатка, на которую действует максимальное усилие от связи, и лопатка, вблизи которой возникают максимальные динамические напряжения растяжения — сжатия в связях, сдвинуты относительно друг друга по длине пакета. Действительно, в первом случае должно выполняться соотношение $|\cos [k\pi (n_1 - 0,5)/m]| \approx 1$, во втором $|\sin [k\pi (n_2 - 1)/m]| \approx 1$, где n_1 и n_2 — номера лопаток, вблизи которых выполняются указанные выше приближенные равенства. Ясно, что при $k/m \ll 1$ должно выпол-

няться приближенное равенство: $|n_1 - n_2| \approx m/(2k)$. Из сравнения формул (XI.119a) и (XI.122) следует также, что при колебаниях с малым числом узлов по длине пакета, когда выполняется условие $k/m \ll 1$, максимальное усилие, действующее в поперечном сечении связи, равное $Q'_{\max} \approx C'_1 m/(k\pi)$, может значительно превзойти максимальное усилие, действующее на лопатки от связи, равное $Q_{\max} \approx C'_1$. Физически это объясняется тем, что в данном случае амплитуды нескольких соседних лопаток сравнительно мало отличаются друг от друга и усилия, действующие от этих лопаток на связь, суммируются.

Диапазон частот внутрипакетных колебаний, как следует из формулы (XI.118), зависит не только от геометрических характеристик лопаток и связей и места расположения связи по высоте, но и от числа лопаток в пакете. Уравнение (XI.118) может быть преобразовано к виду

$$\rho^3 A = \frac{4 F_c l^3}{J t_c} \sin^2 \frac{k\pi}{2m} \quad \text{при } k = 1; 2; \dots m-1.$$

Из уравнения (XI.118) следует, что собственная частота остается неизменной, если, например, площадь поперечного сечения связи и число лопаток в пакете будут изменены таким образом, чтобы выполнялось условие: $F_c \sin^2 [k\pi/(2m)] = \text{const}$. Поэтому при увеличении числа лопаток в пакете для сохранения неизменной определенной собственной частоты внутрипакетных колебаний одновременно должна увеличиваться и площадь поперечного сечения связи.

В качестве примера рассмотрим зависимость диапазона частот колебаний типа B_0 от числа лопаток в пакете, а также зависимость собственных частот от числа узлов по длине пакета. Используем геометрические характеристики лопатки, приведенные в п. XI.8:

$l = 102$ мм; $J = 11\,150$ мм⁴; $F = 490$ мм². Будем считать, что лопатки соединены на вершине бандажом, имеющим следующие геометрические характеристики: $t_6 = 33,81$ мм; $F_6 = 186$ мм².

Таким образом, введенный в п. II.2 безразмерный комплекс μ'_6 , характеризующий растяжимость связи, в данном случае будет следующим: $\mu'_6 = J t_6 / (F_6 l^3) = 0,191 \cdot 10^{-2}$.

Рассмотрим внутрипакетные колебания трех различных по величине пакетов: $m = 5; 10; 100$ (последний случай соответствует объединению в единый пакет всех лопаток ступени при наличии одного разъема по окружности). Частотное уравнение (XI.118) при условии $\xi_c \rightarrow 1$ примет следующий вид:

$$-\mu'_6 \rho^3 \frac{S^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)}{T(\rho) U(\rho) - S(\rho) V(\rho)} = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2m} \quad \text{при } k = 1; 2; \dots m-1. \quad (\text{XI.123})$$

Результаты вычислений по формуле (XI.123) приведены на рис. XI.6 и XI.15. Результаты построены в относительных координатах $\varphi = f/f_0$, где f_0 — частота первого тона отдельной жестко заделанной лопатки.

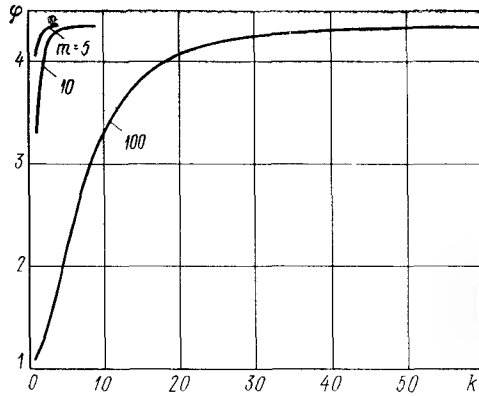


Рис XI.15. Зависимость частот внутрипакетных колебаний от числа лопаток m в пакете и числа узлов k по длине пакета

$\Delta f_{\text{дин}} = (f_{\text{макс}} - f_{\text{мин}}) / f_{\text{мин}}$ для пятилопаточного пакета составляет 6,4%, при $m = 10$ она равна 31,5%, а при $m = 100$ составляет около 300%. К расширению частотного диапазона может привести также относительное увеличение растяжимости связей (возрастание величины μ_c) или перенос связей в сечение, расположенное ближе к корню лопатки (см. п. II.2). Результаты расчетов показали, что при использовавшихся предположениях о характере соединения лопаток и связей увеличение числа узлов по длине пакета сопровождается монотонным повышением частот внутрипакетных колебаний.

Перейдем к рассмотрению особенностей внутрипакетных колебаний при учете изгибной жесткости связей. Для выяснения качественных особенностей ограничимся рассмотрением случая установки связи на вершине лопатки. Как и ранее в этом параграфе, будем считать, что колебания происходят в плоскости диска и допустимо пренебречь массой шага связи. Естественно, что последнее предположение позволяет рассматривать силовое воздействие от лопатки на связь как статическое. Момент M_n и сила Q_n ,

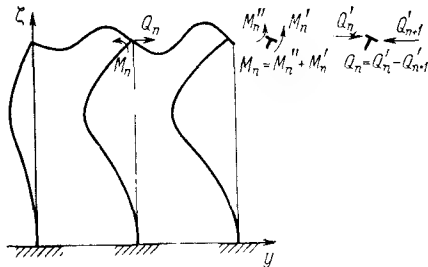


Рис. XI.16. Моменты и силы, действующие на лопатку при внутрипакетных колебаниях

действующие на лопатку от связи при колебаниях, изображены на рис. XI.16. Система уравнений для определения собственных частот в данном случае примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} v_n(\xi) &= C_{3n}U(\rho\xi) + C_{4n}V(\rho\xi); \\ \frac{EJ}{l^3} \frac{d^3v_n(1)}{d\xi^3} &= -Q_n = Q'_{n+1} - Q'_n; \\ \frac{EJ}{l^2} \frac{d^2v_n(1)}{d\xi^2} &= M_n = M'_n + M''_n, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.124})$$

где M'_n и M''_n — изгибающие моменты, действующие на n -ю лопатку от шага связи, расположенного соответственно между $n - 1$ и n -й и n и $(n + 1)$ -й лопатками.

Учитывая отсутствие радиальных перемещений на упругой оси лопатки, из решения статической задачи изгиба шага связи получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} M'_n &= -\frac{2EJ_c H_c}{t_c} \left[\frac{dv_{n+1}(1)}{d\xi} + 2 \frac{dv_n(1)}{d\xi} \right]; \\ M''_n &= -\frac{2EJ_c H_c}{t_c} \left[2 \frac{dv_n(1)}{d\xi} + \frac{dv_{n-1}(1)}{d\xi} \right] \end{aligned}$$

или

$$\frac{EJ}{l^2} \frac{d^2v_n(1)}{d\xi^2} = -\frac{2EJ_c H_c}{t_c l} \left[\frac{dv_{n+1}(1)}{d\xi} + 4 \frac{dv_n(1)}{d\xi} + \frac{dv_{n-1}(1)}{d\xi} \right]. \quad (\text{XI.125})$$

Граничные условия на концах пакета имеют следующий вид:

$$M'_1 = M'_m = 0; \quad Q'_1 = Q'_{m+1} = 0. \quad (\text{XI.126})$$

Учитывая формулы (XI.124) и (XI.125), преобразуем уравнения (XI.126) к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{EJ}{l^2} \frac{d^2v_1(1)}{d\xi^2} &= M'_1 = -\frac{2EJ_c H_c}{t_c l} \left[\frac{dv_2(1)}{d\xi} + 2 \frac{dv_1(1)}{d\xi} \right]; \\ \frac{EJ}{l^3} \frac{d^3v_1(1)}{d\xi^3} &= Q'_1 = \frac{EF_c}{t_c} [v_1(1) - v_2(1)]; \\ \frac{FJ}{l^2} \frac{d^2v_m(1)}{d\xi^2} &= M''_m = -\frac{2EJ_c H_c}{t_c l} \left[\frac{dv_{m-1}(1)}{d\xi} + 2 \frac{dv_m(1)}{d\xi} \right]; \\ \frac{EJ}{l^3} \frac{d^3v_m(1)}{d\xi^3} &= -Q'_m = \frac{EF_c}{t_c} [v_m(1) - v_{m-1}(1)]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.126a})$$

Уравнения (XI.124) — (XI.126) можно разрешить, например, относительно $v_n(1)$, получив систему m уравнений, связывающих прогибы соседних лопаток в пакете. Первое и последнее уравнения системы примут вид:

$$\left. \begin{aligned} v_1(1)(A_1 - 1) + v_2(1)A_2 + v_3(1) &= 0; \\ v_{m-2}(1) + v_{m-1}(1)A_2 + v_m(1)(A_1 - 1) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.127})$$

где

$$A_1 = \frac{J t_c \rho}{2 J_c H c l} \frac{V(\rho) S(\rho) - U(\rho) T(\rho)}{U^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)} + \frac{J^2 t_c^2 \rho^4}{2 J_c H c F_c l^4} \frac{V(\rho) T(\rho) - S^2(\rho)}{U^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)} +$$

$$+ \frac{2 J t_c \rho^3}{F_c l^3} \frac{U(\rho) V(\rho) - S(\rho) T(\rho)}{U^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)};$$

$$A_2 = \frac{J t_c \rho^3}{F_c l^3} \frac{U(\rho) V(\rho) - T(\rho) S(\rho)}{U^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)} + \frac{J t_c \rho}{2 J_c H c l} \frac{U(\rho) T(\rho) - V(\rho) S(\rho)}{U^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)}.$$

Второе и предпоследнее уравнения системы окажутся следующими

$$\left. \begin{aligned} v_1(1)(3 + A_2) + v_2(1)(-6 + A_3) + \\ + v_3(1)(2 + A_2) + v_4(1) = 0, \\ v_{m-3}(1) + v_{m-2}(1)(2 + A_2) + \\ + v_{m-1}(1)(-6 + A_3) + v_m(1)(3 + A_2) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI } 127a)$$

где

$$A_3 = \frac{4 J t_c \rho^3}{F_c l^3} \frac{U(\rho) V(\rho) - S(\rho) T(\rho)}{U^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)} + \frac{J t_c \rho}{J_c H c l} \frac{S(\rho) V(\rho) - U(\rho) T(\rho)}{U^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)} +$$

$$+ \frac{J^2 t_c^2 \rho^4}{2 J_c H c F_c l^4} \frac{T(\rho) V(\rho) - S^2(\rho)}{U^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)}.$$

Остальные уравнения системы, связывающие прогибы средних лопаток пакета, примут следующий вид

$$v_{n-2}(1) + v_{n-1}(1)(2 + A_2) + v_n(1)(-6 + A_3) +$$

$$+ v_{n+1}(1)(2 + A_2) + v_{n+2}(1) = 0 \quad (\text{XI } 127b)$$

На рис II 7 и XI 17 приведены результаты вычислений, иллюстрирующие некоторые особенности внутривибрационных колебаний, вызванные учетом изгибной жесткости связей¹

На рис XI 17 приведено распределение амплитуд колебаний различных лопаток по длине пакета при учете изгибной жесткости связей ($k_6 = 0,313$), а также в предположении, что $k_6 = 0$. В последнем случае, как следует из формулы (XI 121), распределение амплитуд по длине пакета вообще не зависит от растяжимости связей, т. е. сохраняется неизменным при различных значениях k_6 . На рисунке показаны собственные формы, соответствующие колебаниям с одним и двумя узлами ($k = 1$ и $k = 2$) по длине пакета, состоящего из 10 соединенных банджом лопаток. Как следует из приведенных данных, учет изгибной жесткости

связей может привести к довольно значительному изменению в распределении амплитуд различных лопаток при одном и том же числе узлов по длине пакета.

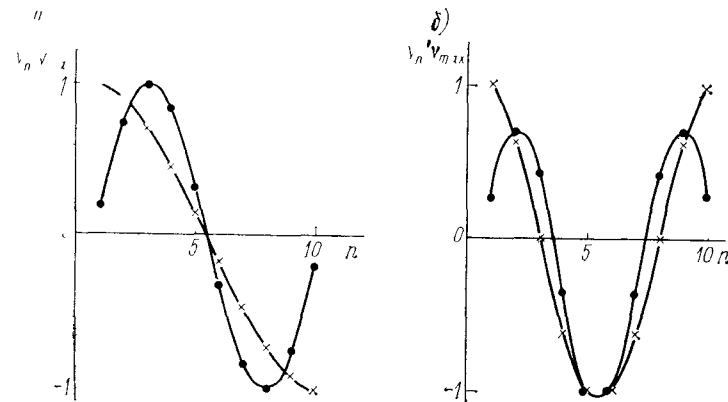


Рис XI 17 Зависимость отношения амплитуд различных лопаток в пакете от изгибной жесткости связей а — $k = 1$, б — $k = 2$,
○ — $k_6 = 0$ ● — $k_6 = 0,313$

В целом результаты, приведенные в настоящем параграфе, свидетельствуют о значительной зависимости частот внутривибрационных колебаний от геометрических характеристик соединяющих лопатки связей и числа лопаток в пакете

XI.10. КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК, СОЕДИНЕННЫХ ЗАМКНУТЫМИ НА КРУГ СВЯЗЯМИ

В п. II 3 отмечалось, что в стационарном турбостроении широкое распространение получили различные по конструкции связи, объединяющие все лопатки ступени в единый замкнутый на круг пакет. Как и в предыдущем параграфе, для выяснения качественных особенностей внутривибрационных колебаний лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, первоначально рассмотрим пакет из m лопаток, соединенных растяжимыми безмассовыми связями, не обладающими изгибной жесткостью. Будем считать, что угол установки лопаток β равен нулю, лопатки жестко заделаны по корневому сечению, а связь установлена в сечении с координатой ζ_c . Система уравнений для определения собственных частот лопаток в данном случае совпадает с системой (XI 111) и может быть сведена к уравнению в конечных разностях m -го порядка с постоянными коэффициентами относительно $Q'_n(\zeta_c)$ или Q'_n (XI 113)

Отличие от случая, рассмотренного в предыдущем параграфе, заключается в граничных условиях на концах пакета. Если для m -го пакета из m лопаток $Q'_1 = Q'_{m+1} = 0$, то для пакета, объединяющего все рабочие лопатки ступени, необходимо исполь-

¹ Боришанский К. Н., Наумов А. В. Определение сравнительной возбудимости различных собственных форм внутривибрационных колебаний лопаток турбин — Проблемы прочности, 1980, № 11, с 75—80

зовать следующие соотношения, вытекающие из замкнутости лопаток на круг:

$$v_1(\zeta_c) = v_{m+1}(\zeta_c); \quad v_2(\zeta_c) = v_{m+2}(\zeta_c). \quad (\text{XI.128})$$

Учитывая, что граничные условия (XI.128) записаны относительно перемещений $v_n(\zeta_c)$, будем искать решение первого из уравнений (XI.113). Как и ранее, примем, что $v_n(\zeta_c) = Cx^n$. Подставив это выражение в уравнение (XI.113), получим следующие соотношения:

$$v_n(\zeta_c) = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n; \quad x_1 x_2 = 1; \quad x_1 + x_2 = 2 + B, \quad (\text{XI.129})$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий на концах пакета.

Условия (XI.128) позволяют получить два уравнения для определения C_1 и C_2 :

$$\left. \begin{aligned} C_1 x_1 + C_2 x_2 &= C_1 x_1^{m+1} + C_2 x_2^{m+1}; \\ C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 &= C_1 x_1^{m+2} + C_2 x_2^{m+2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.128a})$$

Чтобы C_1 и C_2 не были одновременно равны нулю, должен обращаться в нуль определитель системы (XI.128a), т. е. должно выполняться соотношение:

$$x_1 x_2^2 (1 - x_1^m) (1 - x_2^m) - x_2 x_1^2 (1 - x_2^m) (1 - x_1^m) = 0 \quad (\text{XI.130})$$

Так как $x_1 x_2 = 1$, то уравнение (XI.130) можно преобразовать к виду

$$(1 - x_1^m) (1 - x_2^m) (x_2 - x_1) = 0.$$

В предыдущем параграфе отмечалось, что представление $v_n(\zeta_c)$ в виде $v_n(\zeta_c) = Cx^n$ предполагает отсутствие кратных корней, поэтому $x_1 \neq x_2$ и уравнение (XI.130) можно преобразовать к виду

$$(1 - x_1^m) (1 - x_1^{-m}) = 0. \quad (\text{XI.130a})$$

Из уравнения (XI.130a) следует:

$$x_1^m = 1; \quad x_1 = \exp(i\varphi_k); \quad \varphi_k m = 2k\pi; \quad \varphi_k = 2k\pi/m,$$

где $k = 1, 2, \dots, m-1$.

Подставляя найденные значения x_1 в уравнение (XI.129), получим

$$x_1 + x_2 = \exp(i\varphi_k) + \exp(-i\varphi_k) = 2 \cos \varphi_k.$$

Так как $x_1 + x_2 = 2 + B$, то

$$-B = 2 - 2 \cos \varphi_k = 4 \sin^2(\varphi_k/2) = 4 \sin^2(k\pi/m), \quad (\text{XI.131})$$

или

$$-\frac{J\rho^3 t_c}{F_0 l^3} \frac{S^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)}{V(\rho) V(\rho\zeta_c) T(\rho - \rho\zeta_c) - S(\rho) U(\rho\zeta_c) T(\rho - \rho\zeta_c) - S(\rho) V(\rho\zeta_c) S(\rho - \rho\zeta_c) + T(\rho) U(\rho\zeta_c) S(\rho - \rho\zeta_c)} =$$

$$= 4 \sin^2(k\pi/m),$$

где $1 \leq k < m/2$.

Случай $k = m/2$ не рассматриваем, так как он соответствует появлению кратных корней, а при $m/2 < k_1 < m \sin(k_1\pi/m) = \sin[\pi(m-k)/m] = \sin(k\pi/m)$, где $1 \leq k < m/2$.

Таким образом, значения k_1 , для которых выполняется соотношение $m/2 < k_1 < m$, не определяют дополнительных собственных частот внутрипакетных колебаний.

Из сопоставления формулы (XI.131) с формулой (XI.118) следует, что для замкнутого на круг пакета число различных собственных частот внутрипакетных колебаний оказывается в 2 раза меньше, чем для незамкнутого пакета с тем же числом лопаток.

Уравнения (XI.128a) не дают связи между произвольными постоянными C_1 и C_2 , в связи с чем распределение амплитуд колебаний лопаток по длине пакета имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_n(\zeta_c) &= C_1 \exp(i\varphi_k n) + C_2 \exp(-i\varphi_k n) = \\ &= C'_1 \sin(2k\pi n/m) + C'_2 \cos(2k\pi n/m) = \\ &= C \sin[(2k\pi n/m) + \alpha], \end{aligned} \quad (\text{XI.132})$$

где C и α являются произвольными постоянными.

Как видно, в отличие от формулы (XI.121), при соединении лопаток замкнутыми на круг связями оказывается неопределенной не только амплитуда внутрипакетных колебаний, но и положение узлов по окружности колеса. Амплитуды колебаний лопаток изменяются по окружности по гармоническому закону, причем величина k в данном случае определяет число узловых диаметров ($2k$ — число узлов по окружности колеса). Указанная особенность — зависимость формы прогиба от двух произвольных постоянных — является следствием совпадения двух равных собственных частот внутрипакетных колебаний, приводящего, как отмечалось выше, к уменьшению в два раза числа различных собственных частот внутрипакетных колебаний, определяемых по формуле (XI.131).

Рассматривая кратные корни уравнения (XI.113), нетрудно показать, что случаю $k = 0$ соответствуют синфазные колебания, а случаю $k = m/2$ (при m четном) — колебания, при которых соседние лопатки находятся в противофазе, т. е. прогиб по длине окружности имеет вид: $v_n(\zeta_c) = C_1 (-1)^n$.

Отношение силы, действующей на лопатку от связи, к прогибу лопатки, характеризующее эквивалентную жесткость связи на растяжение, с учетом формулы (XI.132) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} K_1 = \frac{Q'_n}{v_n(\zeta_c)} &= \frac{Q'_n - Q'_{n+1}}{v_n(\zeta_c)} = \frac{EF_c}{t_c} \frac{[v_{n+1}(\zeta_c) + v_{n-1}(\zeta_c) - 2v_n(\zeta_c)]}{v_n(\zeta_c)} = \\ &= -\frac{EF_c}{t_c} 4 \sin^2 \frac{k\pi}{m} \end{aligned} \quad (\text{XI.133})$$

или

$$Q_n = -\frac{EF_c}{t_c} 4 \sin^2 \frac{k\pi}{m} v_n(\zeta_c).$$

При $k \ll m$ $K_1 \approx -(EF_c/t_c) (2k\pi/m)^2$. Из формулы (XI.133) следует, что величина K_1 зависит не только от геометрических характеристик связи, но и от отношения числа узловых диаметров к числу лопаток на колесе. Поэтому растяжимость связи, которой практически можно пренебречь при соединении нескольких лопаток в пакет, может оказать существенное влияние на частоты внутрипакетных колебаний с малым числом узловых диаметров при соединении на круг всех лопаток ступени.

Введем в рассмотрение также коэффициент μ_c , характеризующий относительную растяжимость связи с учетом изгибной жесткости соединенных связью лопаток. Учитывая полученные ранее выражения для коэффициента $\mu'_c = Jt_c/(F_c l^3)$ и величин A и B , определяемых по формулам (XI.112) и (XI.113), преобразуем уравнение (XI.131) к виду

$$-\mu'_c \rho^3 A = 4 \sin^2 (k\pi/m), \text{ или } -\rho^3 A = 1/\mu_c,$$

где

$$\mu_c = \mu'_c / 4 \sin^2 (k\pi/m) \quad (\text{XI.134})$$

Как видно, величина коэффициента μ_c зависит не только от отношения жесткости лопатки на изгиб к жесткости шага связи на растяжение, характеризуемого величиной μ'_c , но и от отношения числа узловых диаметров к числу лопаток в пакете. Относительная растяжимость связи, как следует из формулы (XI.134), возрастает при увеличении числа соединяемых связью лопаток.

Из формулы (XI.133) следует, что величина коэффициента K_1 не зависит от номера лопатки, т. е. все лопатки при колебаниях находятся в одинаковых условиях. По этой причине задача определения собственных частот внутрипакетных колебаний может быть сведена к задаче определения частот одной лопатки со специфическими граничными условиями в месте установки связи. Действительно, форма колебаний отдельной лопатки, жестко заделанной по корню и свободной на вершине, на которую при $\zeta = \zeta_c$ действует сила $Q = -(EF_c/t_c) 4 \sin^2 (k\pi/m) v(\zeta_c)$, определяется следующими уравнениями:

$$v(\zeta) = C_3 U(\rho\zeta) + C_4 V(\rho\zeta) \text{ при } 0 \leq \zeta < \zeta_c;$$

$$v(\zeta) = C_3 U(\rho\zeta) + C_4 V(\rho\zeta) +$$

$$+ \frac{Ql^3}{EJ\rho^3} V(\rho\zeta - \rho\zeta_c) \text{ при } \zeta_c \leq \zeta \leq 1$$

Используя приведенное выше выражение для Q и граничные условия на вершине лопатки $d^2v(1)/d\zeta^2 = d^3v(1)/d\zeta^3 = 0$, получим частотное уравнение

$$-\frac{J\rho^3 t_c}{F_c l^3} \frac{S^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)}{V(\rho) V(\rho\zeta_c) T(\rho - \rho\zeta_c) - S(\rho) U(\rho\zeta_c) T(\rho - \rho\zeta_c) - S(\rho) V(\rho\zeta_c) S(\rho - \rho\zeta_c) + T(\rho) U(\rho\zeta_c) S(\rho - \rho\zeta_c)} = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{m},$$

которое в точности совпадает с уравнением (XI.131)

Полученные результаты относительно формы прогиба по длине замкнутого на круг пакета сохраняются и при учете изгибной жесткости связей, и в самом общем случае циклически симметричных систем [73], т. е. систем, упругие и инерционные свойства которых повторяются через определенный интервал (в данном случае через шаг лопаток). Например, для определения частот внутрипакетных колебаний m лопаток, соединенных в замкнутый на круг пакет расположенными на вершине растяжимыми, обладающими изгибной жесткостью связями, следует использовать уравнения (XI.124), которые могут быть преобразованы к уравнению в конечных разностях четвертого порядка с постоянными коэффициентами относительно $v_n(1)$

$$v_{n-2}(1) + B_1 v_{n-1}(1) + B_2 v_n(1) + B_1 v_{n+1}(1) + v_{n+2}(1) = 0, \quad (\text{XI.1276})$$

где $B_1 = 2 + A_2$; $B_2 = -6 + A_3$.

Как обычно, ищем решение уравнения (XI.1276) в виде $v_n(1) = Cx^n$. Подставив значение $v_n(1)$ в уравнение (XI.1276), получим

$$x^4 + B_1 x^3 + B_2 x^2 + B_1 x + 1 = 0. \quad (\text{XI.135})$$

Уравнение (XI.135) с помощью подстановки $x + (1/x) = y$ может быть сведено к уравнению второго порядка

$$y^2 + B_1 y + B_2 - 2 = 0.$$

Решив последнее уравнение, найдем, что корни уравнения (XI.135) имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{B_1}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_1^2}{4} + 2 - B_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(-\frac{B_1}{2} - \sqrt{\frac{B_1^2}{4} + 2 - B_2} \right)^2 - 1}; \\ x_{3,4} &= -\frac{B_1}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_1^2}{4} + 2 - B_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(-\frac{B_1}{2} + \sqrt{\frac{B_1^2}{4} + 2 - B_2} \right)^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.136})$$

Кроме того, будут выполняться соотношения:

$$x_1 x_2 = 1; \quad x_3 x_4 = 1; \quad x_1 + x_2 = -(B_1/2) - \sqrt{(B_1^2/4) + 2 - B_2};$$

$$x_3 + x_4 = -(B_1/2) + \sqrt{(B_1^2/4) + 2 - B_2};$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -B_1;$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = B_2.$$

Как и ранее, найдем:

$$x_1^m = 1; \quad x_1 = \exp(i\varphi_k); \quad \varphi_k = 2k\pi/m \text{ при } 1 \leq k < m/2.$$

Так как $x_1 + x_2 = 2 \cos \varphi_k = -(B_1/2) - \sqrt{(B_1^2/4) + 2 - B_2}$, то

$$2 - 4 \cos^2 \varphi_k - 2B_1 \cos \varphi_k - B_2 = 0. \quad (\text{XI.137})$$

* Уравнение (XI.137) определяет бесчисленное множество собственных частот внутрипакетных колебаний, причем можно показать, что условие $x_3^m = 1$ приводит к тому же самому частотному уравнению. Форма прогиба по длине замкнутого на круг пакета сохраняется неизменной как при учете, так и без учета изгибной жесткости связей.

Рассмотрим, как изменяется при различных формах внутрипакетных колебаний изгибная жесткость соединяющих лопатки связей. Введем коэффициент K_2 , равный отношению момента, действующего от связи на лопатку, к углу поворота лопатки. Используя выражения (XI.124) и (XI.125), получим

$$K_2 = \frac{M_n}{dv_n(1)/dz} = \frac{M_n l}{dv_n(1)/d\xi} =$$

$$= - \frac{2EJ_c H_c}{t_c dv_n(1)/d\xi} \left[\frac{dv_{n+1}(1)}{d\xi} + 4 \frac{dv_n(1)}{d\xi} + \frac{dv_{n-1}(1)}{d\xi} \right]. \quad (\text{XI.138})$$

Учитывая закон изменения амплитуд колебаний по длине пакета (XI.132), найдем:

$$K_2 = - \frac{2EJ_c H_c}{t_c} \frac{\sin \left[\frac{2k\pi(n+1)}{m} + \alpha \right] + 4 \sin \left(\frac{2k\pi n}{m} + \alpha \right) + \sin \left[\frac{2k\pi(n-1)}{m} + \alpha \right]}{\sin [(2k\pi n/m) + \alpha]} =$$

$$= - \frac{EJ_c H_c}{t_c} \left(8 + 4 \cos \frac{2k\pi}{m} \right) \quad (\text{XI.138a})$$

или

$$M_n = - \frac{EJ_c H_c}{t_c l} \left(8 + 4 \cos \frac{2k\pi}{m} \right) \frac{dv_n(1)}{d\xi}.$$

Так как величина коэффициента K_2 [так же, как и величина коэффициента K_1 , определяемого по формуле (XI.133)] не зависит от номера лопатки, то все лопатки, соединенные замкнутыми на круг связями, при колебаниях находятся в одинаковых условиях. Поэтому задача определения частот внутрипакетных колебаний и в данном случае может быть сведена к задаче определения собственных частот отдельной лопатки, на которую в месте установки связи действует изгибающий момент и перерезывающая сила, определяемые по формулам:

$$\left. \begin{aligned} Q &= - \frac{EF_c}{t_c} 4 \sin^2 \frac{k\pi}{m} v(\xi_c); \\ M &= - \frac{EJ_c H_c}{t_c l} \left(8 + 4 \cos \frac{2k\pi}{m} \right) \frac{dv(\xi_c)}{d\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.139})$$

Собственные частоты синфазных колебаний также могут быть найдены при использовании формул (XI.139), но при условии $\alpha = 0$.

Как и при изучении синфазных колебаний, введем коэффициент $K_{\text{вн}}$, характеризующий относительную изгибную жесткость соединяющих лопатки связей. По аналогии с формулой (XI.100) для коэффициента k_b при синфазных колебаниях, коэффициент $K_{\text{вн}}$ определим следующим образом:

$$d^2 v(1)/d\xi^2 = -K_{\text{вн}} dv(1)/d\xi.$$

Учитывая, что в соответствии с формулой (XI.124)

$$M_n = \frac{EJ}{l^2} \frac{d^2 v_n(1)}{d\xi^2},$$

а также выражение (XI.138a) для M_n , получим

$$K_{\text{вн}} = \frac{J_c H_c l}{J t_c} \left(8 + 4 \cos \frac{2k\pi}{m} \right). \quad (\text{XI.140})$$

Если угол установки лопатки β отличен от нуля, то выражение для коэффициента $K_{\text{вн}}$ примет следующий вид:

$$K_{\text{вн}} = \frac{J_c H_c l \cos^2 \beta}{J t_c} \left(8 + 4 \cos \frac{2k\pi}{m} \right). \quad (\text{XI.140a})$$

Из формулы (XI.140) следует, что относительная изгибная жесткость связей уменьшается с увеличением числа узловых диаметров k , хотя и сравнительно слабо при малых k . Только при колебаниях лопаток в противофазе величина коэффициента $K_{\text{вн}}$ уменьшается в 3 раза по сравнению со случаем $k \ll m$. При колебаниях с малым числом узловых диаметров величина коэффициента $K_{\text{вн}}$ практически совпадает с величинами коэффициентов k_b или $k_{\text{п}}$ при синфазных колебаниях, определяемых формулой (XI.100).

Закон изменения относительной изгибной жесткости связей существенно отличается от закона изменения относительной жесткости связей на растяжение, которая резко возрастает при увеличении числа узловых диаметров. Из формулы (XI.134) следует, что коэффициент μ_c , характеризующий растяжимость связей (т. е. величину, обратную жесткости связей на растяжение) при малых k резко возрастает, что и объясняет необходимость учета растяжимости связей при вычислении частот внутрипакетных колебаний с малым числом узловых диаметров.

XI.11. ВЛИЯНИЕ МЕСТА РАСПОЛОЖЕНИЯ И ЖЕСТКОСТИ СВЯЗЕЙ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ВНУТРИПАКЕТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В п. XI.7 и XI.8 было рассмотрено влияние связей на частоты синфазных колебаний пакета лопаток. Из приведенных данных следует, что частоты синфазных колебаний не очень существенно

изменяются в зависимости от места расположения, массы и жесткости связей. Покажем, что влияние связей на частоты внутрипакетных колебаний оказывается значительно более существенным. Для упрощения выкладок, а также учитывая меньшее влияние изгибной жесткости связей на частоты внутрипакетных колебаний, рассмотрим колебания пакета лопаток, соединенных растяжимыми безмассовыми связями, не обладающими изгибной жесткостью. Как было показано в п. XI.10, уравнение, определяющее собственные частоты внутрипакетных колебаний лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, имеет вид

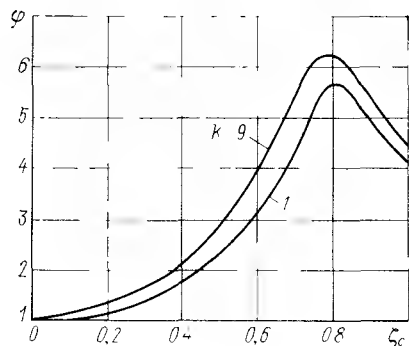


Рис. XI.18 Зависимость частот внутрипакетных колебаний от места расположения связи по высоте лопатки и числа узлов k по длине пакета

и жесткости связей для относительно «жестких» лопаток длиной 102 мм, геометрические характеристики которых приведены в п. XI.8, и для относительно «гибких» лопаток длиной 400 мм, геометрические характеристики которых, а также геометрические характеристики соединяющих их связей заимствованы из [107]: $l = 400$ мм; $F = 742$ мм²; $J = 39\,200$ мм⁴; $t_c = 40,4$ мм; $\zeta_c = 1$; $F_c = 50,3$ мм²; $\mu'_c = 0,492 \cdot 10^{-3}$; $z_1 = 152$ (z_1 — число лопаток ступени).

Результаты вычисления собственных частот для лопаток длиной 102 мм приведены на рис. II.16. Принято, что лопатки соединены замкнутыми на круг связями, расположенными в периферийном сечении. На рис. II.16, б аналогичная зависимость построена при условии, что растяжимость связей уменьшена в 10 раз. Как видно, даже в последнем случае при колебаниях с малым числом узловых диаметров растяжимость связей необходимо учитывать, поскольку она вызывает сильное снижение частот внутрипакетных колебаний.

На рис. II.17 и XI.18 приведены результаты расчетов для лопаток с $l = 400$ мм. На рис. II.17 показана зависимость частот внутрипакетных колебаний типа B_0 от числа узловых диаметров и места расположения связи по высоте лопатки при условии, что

замкнутыми на круг связями соединены все 152 лопатки ступени. На рис. XI.18 аналогичные результаты приведены для пакета из 10 лопаток. Как видно, при соединении в единый пакет всех лопаток ступени растяжимость связей приводит к значительно большему расширению диапазона внутрипакетных колебаний, чем при соединении лопаток в обычные пакеты. Из рис. II.17 и XI.18 следует также, что частоты внутрипакетных колебаний в очень широких пределах могут быть изменены за счет выбора места расположения связей. Естественно, что еще большего изменения частот можно добиться при установке нескольких связей по высоте лопатки. Изменение места расположения связей по высоте лопатки влияет не только на собственные частоты внутрипакетных колебаний, но и на относительную величину напряжений, действующих в поперечном сечении связи при единичных максимальных напряжениях в лопатках.

Уравнение, определяющее собственные частоты обычного пакета, в соответствии с результатами п. XI.9 оказывается следующим [см. формулу (XI.118)]:

$$B = 4 \sin^2 [k\pi / (2m)], \\ 1 \leq k \leq m - 1.$$

Рассмотрим зависимость собственных частот, определяемых уравнениями (XI.131) или (XI.118), от места расположения

Найдем соотношение между максимальными напряжениями растяжения—сжатия в связях и максимальными напряжениями изгиба в лопатках.

Из уравнений (XI.111) и (XI.112) следует:

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= (EF_c/t_c) [v_{n+1}(\zeta_c) + v_{n-1}(\zeta_c) - 2v_n(\zeta_c)]; \\ Q'_n &= (EF_c/t_c) [v_{n-1}(\zeta_c) - v_n(\zeta_c)]. \end{aligned} \right\}$$

Учитывая, что при соединении лопаток замкнутыми на круг связями прогиб по окружности колеса меняется по закону $v_n(\zeta_c) = C \sin [(2k\pi n/m) + \alpha]$, получим для этого имеющего большое практическое значение случая следующие соотношения между амплитудными значениями Q_n , Q'_n и $v_n(\zeta_c)$, обозначаемыми $Q_{\max}$, $Q'_{\max}$ и $v_{\max}(\zeta_c)$:

$$\left. \begin{aligned} Q_{\max} &= \frac{EF_c}{t_c} 4 \sin^2 \frac{k\pi}{m} v_{\max}(\zeta_c); \\ Q'_{\max} &= \frac{EF_c}{t_c} 2 \sin \frac{k\pi}{m} v_{\max}(\zeta_c), \end{aligned} \right\}$$

причем

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= -\frac{EF_c}{t_c} 4 \sin^2 \frac{k\pi}{m} C \sin \left(\frac{2k\pi n}{m} + \alpha \right); \\ Q'_n &= -\frac{EF_c}{t_c} 2 \sin \frac{k\pi}{m} C \cos \left(\frac{2k\pi n}{m} + \alpha - \frac{k\pi}{m} \right). \end{aligned} \right\} \quad (XI.141)$$

Таким образом, $Q'_{\max}/Q_{\max} = 1/[2 \sin(k\pi/m)]$ и при малом числе узловых диаметров, т. е. при $k \ll m$ $Q'_{\max} \gg Q_{\max}$.

Максимальные напряжения растяжения—сжатия в связях $\sigma = Q'_{\max}/F_c$, максимальные напряжения изгиба в лопатках $\sigma_{\text{изг}} = M_{\max}/W = [EJ/(l^2 W)] (d^2 v/d\zeta_c^2)_{\max}$.

В соответствии с формулой (XI.112) выполняются соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} &= \frac{Q_n l^3}{E J \rho [S^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)]} \times \\ &\times \{S(\rho \xi) [T(\rho) S(\rho - \rho \xi_c) - S(\rho) T(\rho - \rho \xi_c)] + \\ &+ T(\rho \xi) [V(\rho) T(\rho - \rho \xi_c) - S(\rho) S(\rho - \rho \xi_c)]\} \\ &\text{при } 0 \leq \xi < \xi_c; \\ \frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} &= \frac{Q_n l^3}{E J \rho [S^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)]} \times \\ &\times \{S(\rho \xi) [T(\rho) S(\rho - \rho \xi_c) - S(\rho) T(\rho - \rho \xi_c)] + \\ &+ T(\rho \xi) [V(\rho) T(\rho - \rho \xi_c) - S(\rho) S(\rho - \rho \xi_c)] + \\ &+ T(\rho \xi - \rho \xi_c) [S^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)]\} \\ &\text{при } \xi_c \leq \xi \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.142})$$

Используя приведенные выше формулы, найдем

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_{изр}} = \frac{W}{F_c l^2 \sin(k\pi/m)} D, \quad (\text{XI.143})$$

где

$$D = \frac{\rho [S^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)]}{\{S(\rho \xi) [T(\rho) S(\rho - \rho \xi_c) - S(\rho) T(\rho - \rho \xi_c)] + T(\rho \xi) [V(\rho) T(\rho - \rho \xi_c) - S(\rho) S(\rho - \rho \xi_c)]\}_{\max}} \quad \text{при } 0 \leq \xi < \xi_c;$$

$$D = \frac{\rho [S^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)]}{\{S(\rho \xi) [T(\rho) S(\rho - \rho \xi_c) - S(\rho) T(\rho - \rho \xi_c)] + T(\rho \xi) [V(\rho) T(\rho - \rho \xi_c) - S(\rho) S(\rho - \rho \xi_c)] + T(\rho \xi - \rho \xi_c) [S^2(\rho) - T(\rho) V(\rho)]\}_{\max}} \quad \text{при } \xi_c \leq \xi \leq 1,$$

причем требуется выбрать минимальное значение коэффициента D , определяемое двумя указанными выше выражениями.

Величина коэффициента D характеризует связь колебаний различных лопаток в пакете. Если $D \rightarrow 0$, то колебания лопаток в пакете происходят практически независимо друг от друга, а их собственные частоты и формы почти не отличаются от собственных частот и форм колебаний отдельных лопаток (напомним, что в соответствии с принятыми предположениями о характере ограничений, налагаемых соединяющими лопатки связями, взаимное влияние различных лопаток определяется только относительной величиной перерезывающей силы Q_n).

На рис. XI.19 приведена зависимость коэффициента D от места расположения связи и числа узловых диаметров при колебаниях типа B_0 лопаток с $l = 400$ мм. Рассматриваются колебания замкнутого на круг пакета из 152 лопаток при условии $k = 1$ и $k = 76$. Как следует из приведенных на рис. XI.19 данных, величина коэффициента D может стремиться к нулю в двух слу-

чаях: при малой относительной жесткости связи, когда частота колебаний типа B_0 стремится к первой собственной частоте отдельной лопатки ($\xi_c = 0,1$; $k = 1$); при большой относительной жесткости связи и ее расположении вблизи узла, соответствующего второй собственной форме отдельной лопатки, когда частота колебаний типа B_0 стремится ко второй собственной частоте отдельной лопатки ($\xi_c = 0,78$; $k = 76$).

Поскольку одна из целей установки связей заключается в том, чтобы обеспечить совместность колебаний всех лопаток в пакете, случай $D \rightarrow 0$ является нежелательным. На практике неизбежны некоторые различия в собственных частотах отдельных лопаток, составляющих пакет (различия в парциальных частотах лопаток), и в том случае, когда $D \rightarrow 0$, распределение амплитуд колебаний

лопаток по длине пакета может существенно отличаться от закона, определяемого по формулам (XI.132) или (XI.121). При этом будут несправедливы и все соображения о величине пакетного множителя, приведенные в п. II.8, и связанные с этим соображения о снижении уровня динамических напряжений при соединении лопаток связями. Естественно поэтому, что конструкцию места расположения связей следует выбирать таким образом, чтобы условие $D \rightarrow 0$ не реализовывалось.

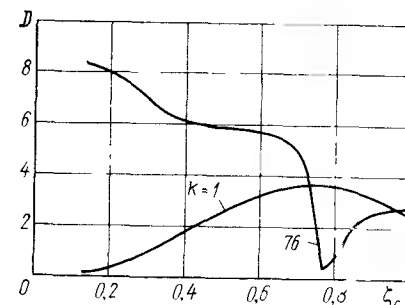


Рис. XI.19. Зависимость величины коэффициента D от места расположения связи по высоте лопатки и числа узловых диаметров

XI.12. ОСОБЕННОСТИ КОЛЕБАНИЙ, ВЫЗВАННЫЕ РАЗЛИЧИЕМ В ПАРЦИАЛЬНЫХ ЧАСТОТАХ ЛОПАТОК В ПАКЕТЕ

В связи с тем, что существует определенная система допусков на изготовление лопаток, имеет место разброс в парциальных частотах лопаток, изготовленных по одному чертежу. По нормам, действующим в стационарном турбостроении, разброс в частотах лопаток в комплекте может достигать 8% при условии соединения лопаток связями и не должен превышать 4% при установке на диск отдельных лопаток без связей.

Разброс в частотах лопаток приводит к тому, что амплитуды колебаний различных лопаток, набранных на диск, будут отличаться друг от друга. В работе [5] рассмотрена задача вычисления амплитуд колебаний лопаток с различными парциальными частотами, взаимодействующих через упругий обод диска и обтекающий лопатки поток. Результаты выполненных расчетов подтвердили, что частоты возмущающих сил, при которых достигаются максимальные напряжения, различны для разных лопаток, причем

максимальные амплитуды лопаток могут отличаться до 2—3 раз. В работе [237] показано, что максимальное различие в амплитудах может достигать $(1 + \sqrt{z_1})/2$, где z_1 — число лопаток ступени, хотя практически достижение подобного разброса маловероятно.

Для пакетов с замкнутыми на круг связями различие в парциальных частотах лопаток приводит к ряду особенностей, общих для всех систем, обладающих циклической симметрией. В частности, еще в [164] было показано, что при колебаниях круглых пластин или мембран введение окружной неоднородности приводит к появлению двух разных собственных частот с одинаковым числом узловых диаметров (точнее, узловых радиусов), имеющих вполне определенное положение по отношению к введенной неоднородности. Естественно, что при отсутствии окружной неоднородности при колебаниях круглых пластин и мембран (как и при колебаниях замкнутого на круг пакета лопаток с одинаковыми частотами — см. п. XI.10) имеются по две равные собственные частоты с одинаковым числом узловых диаметров. Одновременное возбуждение двух равных собственных частот приводит к тому, что при колебаниях оказывается неопределенной не только амплитуда, но и положение узловых диаметров по окружности.

Особенности колебаний замкнутого на круг пакета, состоящего из лопаток с различными парциальными частотами, соединенных расположенными на вершине растяжимыми безмассовыми связями, рассмотрены в [22]. В отличие от формулы (XI.111) форма прогиба при колебаниях n -й лопатки пакета в данном случае примет вид:

$$v_n(\xi) = C_{3n}U(\rho_n \xi) + C_{4n}V(\rho_n \xi), \quad (\text{XI.144})$$

где $\rho_n = \rho_1 \sqrt{p_1/p_n}$; ρ_1 и p_n — соответственно парциальные частоты первой и n -й лопаток пакета.

Соотношения (XI.144) вытекают из следующих формул:

$$\rho_1^2 = \rho^4 \frac{E J_1 g}{F_1 l_1^4 \gamma}; \quad \rho_n^2 = \rho^4 \frac{E J_n g}{F_n l_n^4 \gamma}; \quad \frac{\rho_n^2}{\rho_1^2} = \frac{J_n F_1 l_1^4}{J_1 F_n l_n^4},$$

где J_1 , F_1 , l_1 — момент инерции, площадь поперечного сечения и длина первой лопатки, а J_n , F_n , l_n — то же n -й лопатки.

Таким образом, предполагается, что различие в парциальных частотах вызывается одинаковым по высоте лопаток изменением их геометрических характеристик.

При совместных колебаниях пакета лопаток имеется общая частота $\rho_{\text{общ}}$, причем справедлива формула

$$\rho_{\text{общ}}^2 = \rho_n^4 \frac{E J_n g}{F_n l_n^4 \gamma} = \rho_1^4 \frac{E J_1 g}{F_1 l_1^4 \gamma},$$

из которой и следует приведенное выше соотношение между ρ_1 и ρ_n

k	$\rho_{\text{ср}}$	ρ	$\Delta \rho_{\text{отн}}$	k	$\rho_{\text{ср}}$	ρ	$\Delta \rho_{\text{отн}}$
1	2,0484 2,0585	2,0551	0,984	3	2,7296 2,7433	2,7389	1
2	2,3951 2,4064	2,4029	0,9	4	3,0064 3,0213	3,0176	0,993

Уравнение в конечных разностях (XI.113) в рассматриваемом случае примет следующий вид:

$$v_{n+1}(1) + v_{n-1}(1) + v_n(1) \left[-2 - \frac{J t_c \rho_n^3}{F_c l_n^3} \frac{S_n^2(1) - V_n(1) T_n(1)}{T_n(1) U_n(1) - S_n(1) V_n(1)} \right] = 0, \quad (\text{XI.145})$$

где $S_n(1) = 0,5 (\operatorname{ch} \rho_n + \cos \rho_n)$ и т. д.

Система m уравнений вида XI.145) решалась с помощью ЭВМ. Результаты расчетов для замкнутого на круг пакета из 120 лопаток, разрос в парциальных частотах которых был принят равным реальному разбросу частот лопаток одной из турбин, приведены на рис. XI.20 и в табл. XI.3 и XI.4.

На рис. XI.20, а приведено распределение амплитуды колебаний типа A_0 , на рис. XI.20, б — при двух формах колебаний типа B_0 (четырьмя узловыми диаметрами (точнее говоря, с волютами узлами по длине замкнутого на круг пакета, полярная форма прогиба значительно отличается от синусоидальной).

Из приведенных на рис. XI.20, б результатов следует, что форма прогиба по длине пакета при внутрпакетных колебаниях близка к синусоидальной, причем узлы одной из форм приблизительно соответствуют пучностям другой. В отличие от колебаний

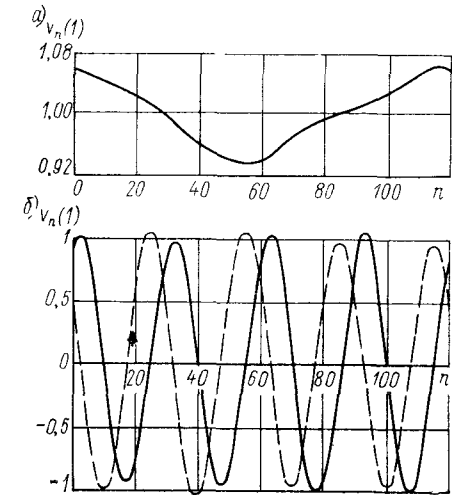


Рис. XI.20. Распределение амплитуд при колебаниях пакета лопаток с различными парциальными частотами: а — колебания типа A_0 ; б — колебания типа B_0 при $k = 4$;

— — — I собственная форма; - - - - II собственная форма

пакета с одинаковыми лопатками, для которых в соответствии с формулой (XI.132) прогиб по длине пакета изменяется по синусоидальному закону, в разложении собственной формы пакета с различными лопатками в ряд Фурье присутствуют все гармоники. Естественно, однако, что абсолютная величина гармоники оказывается наибольшей в том случае, когда номер гармоники совпадает с числом узловых диаметров.

В табл. XI.3 приведены значения ρ_{cp} , соответствующие собственным формам с различными числами узловых диаметров.

Таблица XI.4

$a_i^{отн}$	k		
	0	1	4
$a_0^{отн}$	1	$0,239 \cdot 10^{-1}$	$0,142 \cdot 10^{-1}$
$a_1^{отн}$	$0,286 \cdot 10^{-1}$	$0,387 \cdot 10^{-1}$	$0,945 \cdot 10^{-2}$
$a_2^{отн}$	$0,52 \cdot 10^{-2}$	$0,308 \cdot 10^{-1}$	$0,248 \cdot 10^{-1}$
$a_3^{отн}$	$0,21 \cdot 10^{-3}$	$0,491 \cdot 10^{-1}$	$0,491 \cdot 10^{-1}$
$a_4^{отн}$	$0,142 \cdot 10^{-2}$	1	1
$a_5^{отн}$	$0,133 \cdot 10^{-3}$	$0,311 \cdot 10^{-1}$	$0,594 \cdot 10^{-1}$
$a_6^{отн}$	$0,641 \cdot 10^{-3}$	$0,142 \cdot 10^{-1}$	$0,114 \cdot 10^{-1}$
$a_7^{отн}$	$0,2 \cdot 10^{-3}$	$0,151 \cdot 10^{-4}$	$0,343 \cdot 10^{-2}$
$a_8^{отн}$	$0,383 \cdot 10^{-3}$	$0,527 \cdot 10^{-2}$	$0,561 \cdot 10^{-2}$
$a_9^{отн}$	$0,253 \cdot 10^{-3}$	$0,217 \cdot 10^{-2}$	$0,96 \cdot 10^{-2}$

разброса в частотах, соответствующих колебаниям с одинаковым числом узловых диаметров, отнесенные к значению минимальной из двух частот ($\Delta p_{отн}$). Как следует из приведенных данных, значения $\Delta p_{отн} = (p_{max} - p_{min})/p_{min}$ 1% в рассматриваемом случае не превышали 1%.

В табл. XI.4 приведены величины коэффициентов ряда Фурье $a_i^{отн}$ для колебаний типа A_0 ($k = 0$) и двух форм колебаний типа B_0 с четырьмя узловыми диаметрами ($k = 4$). Коэффициенты ряда Фурье подсчитывались по формулам:

$$a_k = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m v_n(1) \cos \frac{2k\pi n}{m}; \quad b_k = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m v_n(1) \sin \frac{2k\pi n}{m},$$

а собственные формы имели вид

$$v_n(1) = \sum_{k=0}^{m/2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos \left(\frac{2k\pi n}{m} + \alpha_k \right). \quad (XI.146)$$

По найденным значениям коэффициентов ряда Фурье вычислялись их относительные значения

$$a_i^{отн} = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} / \sqrt{a_k^2 + b_k^2}. \quad (XI.147)$$

где k — номер гармоники, совпадающей с числом узловых диаметров при рассматриваемой форме колебаний.

Как следует из таблицы, величина «побочных» коэффициентов ряда ($i \neq k$), которые для пакета лопаток с одинаковыми частотами в точности равны нулю, для пакета лопаток с различными частотами — относительно мала.

Таким образом, если не выполняется условие $D \rightarrow 0$ (см. п. XI.11), различие в парциальных частотах лопаток в комплексе незначительно искажает собственную форму по длине пакета. При неизменном разбросе в парциальных частотах лопаток, но при уменьшении коэффициента D относительные величины побочных коэффициентов ряда возрастают.

В работе [117] введено понятие о связи и связанности колебаний: при принятых нами обозначениях связь колебаний рассматриваемой лопатки с колебаниями остальных лопаток в пакете характеризуется величиной коэффициента D , связанности — величиной коэффициента κ

$$\kappa = \frac{D p_n p_{n+1}}{|p_n^2 - p_{n+1}^2|}. \quad (XI.148)$$

Если $p_n \rightarrow p_{n+1}$, то связанность, т. е. взаимное влияние колебаний лопаток друг на друга, оказывается большой даже при малой величине коэффициента D . При малой, но конечной разнице в парциальных частотах лопаток связанность колебаний стремится к нулю при условии, что $D \rightarrow 0$. В последнем случае различные лопатки в пакете могут колебаться практически независимо друг от друга, что делает неэффективным соединение лопаток в пакет с помощью подобных связей.

Глава XII

КРУТИЛЬНЫЕ И ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

XII.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ. ЧАСТОТЫ ОТДЕЛЬНЫХ ЛОПАТОК БЕЗ СВЯЗЕЙ

При кручении лопаточных профилей различные точки поперечного сечения приобретают перемещения не только в плоскости сечения, но и в радиальном направлении (см. п. V.2). Если геометрические характеристики поперечных сечений изменяются по высоте, то радиальные перемещения в разных сечениях будут

различны, и возникнет так называемая стесненность кручения, связанная с растяжением волокон, составляющих профильную часть лопатки. Стесненность кручения будет иметь место и при закручивании лопатки постоянного сечения, если величина крутящего момента изменяется по высоте лопатки, а также вблизи корневого сечения, где радиальные перемещения ограничены из-за резкого изменения размеров поперечного сечения хвоста по сравнению с размерами профильной части. В настоящей главе будем считать, что длина лопатки много больше размеров поперечного сечения, а величина крутящего момента медленно изменяется по высоте лопатки, в связи с чем стесненностью кручения можно пренебречь.

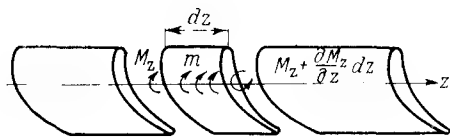


Рис. XII.1 Моменты, действующие на элемент лопатки при крутильных колебаниях

Первоначально примем следующие дополнительные предположения: 1) лопатка не имеет предварительной закрутки, т. е. угол установки постоянен по длине лопатки; 2) центр кручения, т. е. точка, остающаяся неподвижной при приложении крутящего момента, совпадает с центром тяжести поперечного сечения; 3) демпфирующие силы пропорциональны скорости колебаний и значительно меньше сил упругости и инерции; 4) лопатка не соединена какими-либо связями с другими лопатками, и ее колебания происходят независимо от колебаний остальных лопаток.

Рассмотрим уравнение равновесия элемента лопатки, изображенного на рис. XII.1. Обозначим угол поворота поперечного сечения лопатки, зависящий от времени t и координаты поперечного сечения z , через $\Theta(z, t)$. Воспользуемся известной формулой сопротивления материалов, связывающей крутящий момент M_z с производной от угла закручивания $\partial\Theta(z, t)/\partial z$,

$$M_z = GT \partial\Theta/\partial z, \quad (\text{XII.1})$$

где G — модуль упругости II рода; T — жесткость поперечного сечения лопатки при кручении.

Уравнение равновесия элемента, изображенного на рис. XII.1, примет следующий вид:

$$m dz = (\partial M/\partial z) dz,$$

где m — интенсивность распределенного крутящего момента, действующего на единицу длины лопатки.

Учитывая соотношение (XII.1), получим

$$\frac{\partial [GT (\partial\Theta/\partial z)]}{\partial z} = m. \quad (\text{XII.2})$$

При колебаниях лопатки величина m

$$m = J_p \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} - H \frac{\partial \Theta}{\partial t} + m_{\text{вн}}, \quad (\text{XII.3})$$

где J_p — полярный момент инерции поперечного сечения лопатки относительно центра кручения; H — коэффициент, характеризующий интенсивность сил демпфирования; $m_{\text{вн}}$ — интенсивность внешнего распределенного крутящего момента, вызывающего колебания.

С учетом (XII.3) уравнение (XII.2) примет следующий вид:

$$\frac{\partial [GT (\partial\Theta/\partial z)]}{\partial z} - J_p \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + H \frac{\partial \Theta}{\partial t} = m_{\text{вн}}. \quad (\text{XII.2a})$$

Если внешняя нагрузка отсутствует, то дифференциальное уравнение свободных крутильных колебаний окажется следующим

$$\frac{\partial [GT (\partial\Theta/\partial z)]}{\partial z} - J_p \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + H \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0. \quad (\text{XII.4})$$

Для лопатки постоянного сечения, введя дополнительные обозначения $2h = Hg/(J_p \gamma)$, $a^2 = GTg/(J_p \gamma)$, получим

$$a^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0. \quad (\text{XII.4a})$$

Если пренебречь силами трения, то уравнение незатухающих свободных колебаний примет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{XII.5})$$

Для лопатки длиной l , заделанной по корневому сечению и свободной на вершине, граничные условия имеют следующий вид:

$$\Theta = 0 \text{ при } z = 0; \quad \partial\Theta/\partial z = 0 \text{ при } z = l. \quad (\text{XII.6})$$

Кроме того, в начальный момент времени задаются начальные условия — распределение углов поворота и скоростей колебаний различных поперечных сечений лопатки:

$$\Theta = \varphi_1(z) \text{ и } \partial\Theta/\partial t = \varphi_2(z) \text{ при } t = 0. \quad (\text{XII.7})$$

Уравнение (XII.7) легко решается с помощью метода Фурье, т. е. предполагается, что $\Theta(z, t)$ можно представить в следующем виде:

$$\Theta(z, t) = \sum \theta(z) K(t), \quad (\text{XII.8})$$

где $\theta(z)$ зависит только от z , а $K(t)$ — только от t .

Подставив выражение (XII.8) в уравнение (XII.5), получим

$$a^2 K(t) \frac{d^2 \theta}{dz^2} - \theta(z) \frac{d^2 K}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 K/dt^2}{K(t)} = a^2 \frac{d^2 \theta/dz^2}{\theta(z)}. \quad (\text{XII.9})$$

Так как левая часть уравнения (XII.9) является функцией только t , а правая — только z , то равенство (XII.9) возможно

в случае, если и левая, и правая части не зависят ни от t , ни от z , а представляют собой одну и ту же постоянную. Обозначив эту постоянную $-p^2$ ¹, получим два обыкновенных линейных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 K(t)}{dt^2} + p^2 K(t) = 0; \quad (\text{XII.10})$$

$$\frac{d^2 \theta(z)}{dz^2} + \frac{p^2}{a^2} \theta(z) = 0. \quad (\text{XII.11})$$

Дифференциальные уравнения (XII.10) и (XII.11) решаются с помощью подстановки $K(t) = \exp(kt)$, $\theta(z) = \exp(qz)$, откуда

$$k^2 + p^2 = 0; \quad k_{1,2} = \pm ip; \quad K(t) = A \sin pt + B \cos pt, \quad (\text{XII.12})$$

где A и B — постоянные, определяемые из начальных условий. Аналогично

$$\theta(z) = C \sin \frac{p}{a} z + D \cos \frac{p}{a} z, \quad (\text{XII.13})$$

где C и D — постоянные, определяемые из граничных условий. Переходя к относительной координате $\xi = z/l$, получим

$$\theta(\xi) = C \sin \frac{pl}{a} \xi + D \cos \frac{pl}{a} \xi \quad (\text{XII.13a})$$

Из (XII.12) следует, что имеют место гармонические колебания с круговой частотой p .

Используя граничные условия (XII.6), получим

$$D = 0, \quad \cos(pl/a) = 0, \quad (\text{XII.14})$$

так как если $\cos(pl/a) \neq 0$, то $C = 0$ и $\theta(z) \equiv 0$.

Уравнение (XII.14) определяет бесчисленное множество собственных частот крутильных колебаний консольной лопатки постоянного сечения

$$pl/a = \pi(2i-1)/2, \quad (\text{XII.15})$$

где i — целое, $i = 1, 2, 3$ и т. д.,

$$p_i = \frac{\pi}{2l}(2i-1) \sqrt{\frac{GTg}{J_p \gamma}} \quad \text{или} \quad f_i = \frac{2i-1}{4l} \sqrt{\frac{GTg}{J_p \gamma}}, \quad (\text{XII.15a})$$

f_i — частота i -й собственной формы крутильных колебаний консольной лопатки постоянного сечения²

¹ Ниже будет доказано, что только в том случае, когда постоянная равна $-p^2$, возможно удовлетворить граничные условия (XII.6); если бы постоянная равнялась p^2 или нулю, решение не могло бы быть найдено.

² Легко показать, что частоты продольных колебаний консольной лопатки определяются формулой, аналогичной (XII.15): $f_i = \sqrt{Eg/\gamma} (2i-1)/(4l)$. Обычно частоты продольных колебаний весьма высоки. Например, при $l = 100$ мм первая собственная частота продольных колебаний стальной лопатки при нормальной температуре составляет 12 800 Гц.

Как и при изучении изгибных колебаний, комбинируя амплитуды различных собственных форм, можно удовлетворить начальные условия (XII.7).

Из уравнения (XII.14) следует, что постоянная в формуле (XII.9) должна равняться именно $-p^2$. Действительно, в противном случае вместо уравнения (XII.13) имело бы место следующее выражение для $\theta(z)$:

$$\theta(z) = C \operatorname{sh} \frac{p}{a} z + D \operatorname{ch} \frac{p}{a} z.$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (XII.6), необходимо выполнение следующих равенств:

$$D = 0; \quad C \operatorname{ch}(pl/a) = 0,$$

что возможно только в том случае, если $C = 0$, $\theta(z) \equiv 0$.

При учете затухания необходимо решить уравнение (XII.4a) которое с помощью подстановки (XII.8) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d^2 K, dt^2 + 2h(dK, dt)}{K(t)} = a^2 \frac{d^2 \theta, dz^2}{\theta(z)} = -p^2$$

или

$$d^2 K, dt^2 + 2h(dK, dt) + p^2 K = 0.$$

Как и ранее, $K(t) = \exp(kt)$. Учитывая предположение о малой величине сил демпфирования, получим

$$k^2 + 2hk + p^2 = 0; \quad k_{1,2} = -h \pm i \sqrt{p^2 - h^2};$$

$$K(t) = \exp(-ht) (A \sin \sqrt{p^2 - h^2} t + B \cos \sqrt{p^2 - h^2} t). \quad (\text{XII.16})$$

Таким образом, при учете сил сопротивления свободные крутильные колебания (так же, как и изгибные, рассмотренные в гл. XI) являются затухающими. Так как при колебаниях лопаток выполняется неравенство $h \ll p$, то наличие сил сопротивления практически не сказывается на частоте колебаний: $p^2 - h^2 \approx p^2$.

В работе [13] приведены приближенные формулы для геометрических характеристик лопаточных профилей и, в частности, показано, что $J_p = a_1 b^3 c$, $T = a_2 b c^3$, причем a_1 и a_2 — постоянные, зависящие от параметра $F/(bc)$, где F — площадь поперечного сечения лопатки; b — хорда; c — максимальная толщина профиля. Используя эти приближенные значения для J_p и T , получим, что $p \sim c/(bl)$. Таким образом, если подобно изменять размеры поперечного сечения, не изменяя высоты лопатки, то частоты крутильных колебаний останутся неизменными, что затрудняет их отстройку.

Рассмотрим колебания лопаток при других граничных условиях. Если считать, что полностью ограничен поворот вершины

лопатки, то вместо условий (XII.6) следует использовать граничные условия

$$\Theta = 0 \text{ при } z = 0; \quad \Theta = 0 \text{ при } z = l. \quad (\text{XII.17})$$

Из уравнения (XII.13) при использовании условий (XII.17) получим следующее выражение, определяющее собственные частоты: $\sin(p l/a) = 0$ или $p l/a = \pi i$, где i — целое, $i = 1; 2; 3 \dots$. Таким образом,

$$p_i = \frac{\pi i}{l} \sqrt{\frac{G I g}{J_p \gamma}}; \quad f_i = \frac{i}{2l} \sqrt{\frac{G T g}{J_p \gamma}}. \quad (\text{XII.18})$$

В последние годы широкое распространение в паровых турбинах получили лопатки, выполненные заодно с бандажными полками. Рассмотрим влияние момента инерции бандажной полки на собственные частоты крутильных колебаний. Граничное условие на вершине бандажированной лопатки примет следующий вид:

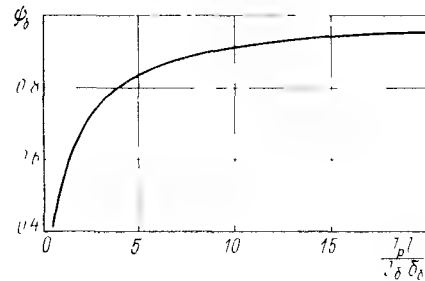


Рис. XII.2. Зависимость частоты первого тона крутильных колебаний от относительных размеров бандажной полки

$$G T \frac{d\theta(l)}{dz} = J_6 \delta_6 \frac{\gamma}{g} p^2 \theta(l), \quad (\text{XII.19})$$

где J_6 — полярный момент инерции сечения бандажной полки относительно центра кручения периферийного сечения лопатки; δ_6 — толщина бандажной полки.

Учитывая, что для заделанной по корневому сечению лопатки $\theta(z) = C \sin(p z/a)$, а также формулу $a^2 = G T g / (J_p \gamma)$, из (XII.19) получим

$$J_p l / (J_6 \delta_6) = (p l/a) \operatorname{tg}(p l/a), \quad (\text{XII.20})$$

или $J_p l / (J_6 \delta_6) = \rho \operatorname{tg} \rho$, где $\rho = p l/a$.

Уравнение (XII.20) определяет бесчисленное множество собственных частот крутильных колебаний бандажированных лопаток постоянного сечения.

Влияние геометрических размеров бандажной полки на собственные частоты оценим для частного случая прямоугольной бандажной полки, причем будем считать, что центр кручения периферийного сечения лопатки совпадает с центром тяжести полки. При проведении вычислений примем, что шаг t в периферийном сечении равен хорде b , угол α между плоскостью вращения и хордой составляет 30° , а $F/(bc) = 0,7$. Тогда в соответствии с приближенными формулами [13], $J_p = 0,0392 b^3 c$, а $J_6 = (t^3 b \sin^3 \alpha + t b^3 \sin^3 \alpha) / 12 = 0,052 b^4$.

Таким образом, в рассматриваемом частном случае $J_p l / (J_6 \delta_6) = 0,754 l c / (b \delta_6)$. При $J_6 \delta_6 / (J_p l) \rightarrow 0$ частотное уравнение (XII.20)

переходит в уравнение (XII.14), определяющее собственные частоты консольной лопатки без бандажной полки.

На рис. XII.2 приведена зависимость коэффициента $\Psi_6 = f/f_0$ (где f и f_0 — частоты первого тона крутильных колебаний бандажированной и небандажированной лопаток) от величины $J_p l / (J_6 \delta_6)$. Как следует из приведенных на рисунке данных, для принятых в расчете соотношений при $J_p l / (J_6 \delta_6) \approx 0,75$ или при $l c / (b \delta_6) \approx 1$ бандажная полка примерно в 2 раза снижает первую собственную частоту. Даже при $J_p l / (J_6 \delta_6) = 7,5$ или при $l c / (b \delta_6) = 10$ снижение первой собственной частоты будет превышать 10%.

XII.2. ВНУТРИПАКЕТНЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК

Лопатки паровых турбин, как правило, соединяются в пакеты или в замкнутый на круг «пакет» различными по конструкции связями. Установка связей, как и в случае рассмотренных ранее изгибных колебаний, приводит к возникновению внутрипакетных крутильных колебаний и делает частотный спектр значительно более густым. Задача определения собственных частот внутрипакетных крутильных колебаний лопаток, соединенных двумя рядами паяных проволок, была решена в [108].

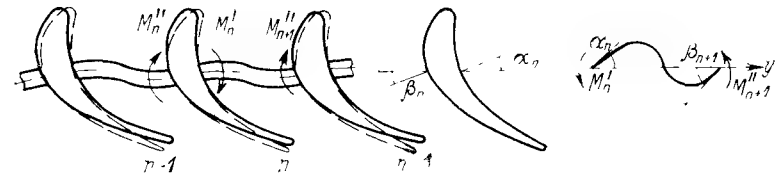


Рис. XII.3. Моменты, действующие на лопатки и связи при внутрипакетных крутильных колебаниях

Пренебрежем влиянием сил сопротивления, т. е. будем решать дифференциальное уравнение (XII.11). Считаем, что связь установлена в сечении $z = z_c$, причем предположим, что собственные частоты шага связи значительно выше представляющих практический интерес частот колебаний облоачивания, т. е. воздействие на связь можно рассматривать как статическое. Моменты, действующие от связей на лопатки, и форма прогиба шага связи изображены на рис. XII.3

Граничные условия в корневом и периферийном сечении, как и ранее, имеют вид:

$$\theta(0) = 0; \quad d\theta(l)/dz = 0.$$

Кроме того, в месте установки связи для n -й лопатки имеют место следующие соотношения:

$$\theta_n(z_c - 0) = \theta_n(z_c + 0); \quad M_{zn}(z_c + 0) - M_{zn}(z_c - 0) = M_{zn}^c, \quad (\text{XII.21})$$

где θ_n — угол поворота n -й лопатки; $M_{zn}(z_c = 0)$ и $M_{zn}(z_c + 1) = 0$ — крутящий момент, действующий в поперечном сечении n -й лопатки ниже и выше места установки связи; M_{zn}^c — момент, действующий от связи на n -ю лопатку

Массу шага связи считаем сосредоточенной в центре кручения соответствующего сечения лопатки, что практически не изменяет собственных частот и форм; моментом инерции шага связи пренебрегаем. Податливость зоны контакта лопатки и связи может быть учтена с помощью специального коэффициента H_c , где $\alpha_n = \beta_n = H_c \theta_n(z_c)$; α_n, β_n — углы поворота поперечного сечения связи в месте соединения с лопаткой

Учтем, что в соответствии с рис. XII 3

$$M_{zn}^c = M_n' + M_n'', \quad (\text{XII.22})$$

а также, что при статическом приложении изгибающих моментов к связям справедливы равенства:

$$\alpha_n = \frac{2M_n' - M_{n+1}''}{6J_c E} t_c; \quad \beta_{n+1} = \frac{2M_{n+1}'' - M_n'}{6J_c E} t_c, \quad (\text{XII.23})$$

где J_c и t_c — соответственно моменты инерции поперечного сечения и длина шага связи.

Так как решениями дифференциального уравнения (XII 11) являются тригонометрические функции, то, используя уравнение (XII.21) и граничное условие при $z = 0$, нетрудно показать, что форма колебаний n -й лопатки определяется следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \theta_n(\xi) &= C_n \sin \rho \xi \quad \text{при } 0 \leq \xi < \xi_c; \\ \theta_n(\xi) &= C_n \sin \rho \xi + \frac{M_{zn}^c l}{GT \rho} \sin \rho (\xi - \xi_c) \quad \text{при } \xi_c \leq \xi \leq 1, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.24})$$

где $\rho = p l / a$, $\xi = z / l$, $\xi_c = z_c / l$; C_n — произвольная постоянная, определяемая из граничных условий при $\xi = 1$.

Так как $d\theta_n(1)/d\xi = 0$, то:

$$C_n = - \frac{M_{zn}^c l}{GT \rho} \frac{\cos \rho (1 - \xi_c)}{\cos \rho}; \quad \theta_n(\xi_c) = - \frac{M_{zn}^c l}{GT \rho} \frac{\cos \rho (1 - \xi_c)}{\cos \rho} \sin \rho \xi_c$$

Используя выражение для $\theta_n(\xi_c)$ и уравнение (XII 23), преобразуем равенства $\alpha_n = \beta_n = H_c \theta_n(\xi_c)$ в уравнения в конечных разностях относительно M_n' и M_n'' :

$$\left. \begin{aligned} 2M_n' - M_{n+1}'' &= -H_c \frac{6EJ_c l (M_n' + M_n'') \cos \rho (1 - \xi_c) \sin \rho \xi_c}{t_c GT \rho \cos \rho}; \\ 2M_n' - M_{n+1}'' &= 2M_n'' - M_{n-1}'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.25})$$

Введя обозначения $k_1 = 12H_c E J_c l / (GT t_c)$; $a_1 = \cos \rho (1 - \xi_c) \times \sin \rho \xi_c / (\rho \cos \rho)$, получаем.

$$\left. \begin{aligned} 2M_n' - M_{n+1}'' &= -0,5k_1 a_1 (M_n' + M_n''); \\ M_{n+1}'' + 2(M_n'' - M_n') - M_{n-1}' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.25a})$$

Решение системы (XII.25a) ищем в виде: $M_n' = C' u^n$, $M_n'' = C'' u^n$, где C' и C'' — постоянные, определяемые из граничных условий на концах пакета.

Подставляя выражения для M_n' и M_n'' в уравнение (XII 25a), найдем

$$\left. \begin{aligned} 2C' - C'' u + 0,5k_1 a_1 (C' + C'') &= 0; \\ C'' u^2 + 2u(C' - C'') - C' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII 26})$$

Условие одновременного равенства нулю постоянных C' и C'' приводит к уравнению:

$$(2 + 0,5k_1 a_1)(u^2 + 2u) + (0,5k_1 a_1 - u)(2u + 1) = 0,$$

или

$$u^2 + u[4 + 6/(k_1 a_1)] + 1 = 0. \quad (\text{XII.27})$$

Из второго уравнения (XII.26) найдем, что $C'' = C'(1 + 2u) / [u(u + 2)]$. Так как из уравнения (XII.27) следует, что $u_1 u_2 = 1$, то выражения для M_n' и M_n'' примут следующий вид

$$\begin{aligned} M_n' &= C_1' u_1^n + C_2' u_1^{-n}; \\ M_n'' &= C_1' \frac{1 + 2u_1}{u_1(u_1 + 2)} u_1^n + C_2' \frac{u_1 + 2}{2 + u_1} \frac{1}{u_1^n} - \\ &= C_1' \frac{1 + 2u_1}{u_1 + 2} u_1^{n-1} + C_2' \frac{u_1 + 2}{2u_1 + 1} u_1^{1-n}. \end{aligned}$$

Для определения произвольных постоянных C_1' и C_2' учтем, что в соответствии с рис. XII 3 $M_1' = M_m'' = 0$, где m — число лопаток в пакете. В результате получим следующую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_1' \frac{2u_1 + 1}{u_1 + 2} + C_2' \frac{2 + u_1}{2u_1 + 1} &= 0; \\ C_1' u_1^m + C_2' u_1^{-m} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII 28})$$

Для того чтобы C_1' и C_2' не были одновременно равны нулю должно выполняться соотношение

$$\frac{2u_1 + 1}{u_1 + 2} u_1^{-m} - \frac{2 + u_1}{2u_1 + 1} u_1^m = 0,$$

или

$$u_1^{2m+2} + 4u_1^{2m+1} + 4u_1^m - 4u_1^2 - 4u_1 - 1 = 0. \quad (\text{XII 29})$$

Анализ уравнения (XII 29) показывает, что только m корней уравнения определяет m независимых различных наборов значе-

ний M_{zn}^c , соответствующих m форм колебаний с разным числом узлов по длине пакета.

Из уравнения (XII.28) находим, что $C_2' = -C_1' (2u_1 + 1)^2 / (u_1 + 2)^2$, откуда

$$M_{zn}^c = C_1' \left[u_1^n - \frac{(2u_1 + 1)^2}{(2 + u_1)^2} \frac{1}{u_1^n} + \frac{1 + 2u_1}{2 + u_1} \left(u_1^{n-1} - \frac{1}{u_1^{n-1}} \right) \right]; \quad (\text{XII } 30)$$

$$\theta_n(\zeta_c) = -\frac{C_1' l}{GT} \left[u_1^n - \frac{(2u_1 + 1)^2}{(2 + u_1)^2} \frac{1}{u_1^n} + \frac{1 + 2u_1}{2 + u_1} \left(u_1^{n-1} - \frac{1}{u_1^{n-1}} \right) \right] \cdot \frac{\cos \rho (1 - \zeta_c) \sin \rho \zeta_c}{\rho \cos \rho}. \quad (\text{XII } 31)$$

Из выражений (XII.24), (XII.30) и (XII.31) следует, что отношение M_{zn}^c/M_{z1}^c равно отношению амплитуд различных лопаток в пакете, которое определяется только числом перемен знака по длине пакета и числом лопаток в пакете. Отношение амплитуд различных лопаток не зависит от относительной жесткости связей и места их расположения по высоте лопатки, поскольку в уравнение (XII.29) не входят коэффициент k_1 и координата расположения связи ζ_c .

В табл. XII.1 приведено распределение амплитуд по длине пакета при внутрисекретных крутильных колебаниях, причем амплитуда первой лопатки принята за единичную. Как и ранее, k — число узлов по длине пакета; m — число лопаток в пакете.

Таблица XII.1

m	k					
	0	1	2	3	4	5
4	1	1	1	1	—	—
	3,302	1,618	—0,302	—0,618	—	—
	3,302	—1,618	—0,302	0,618	—	—
	1	—1	1	—1	—	—
5	1	1	1	1	1	—
	3,561	2,414	1	—0,414	—0,562	—
	4,561	0	—2	0	0,441	—
	3,561	—2,414	1	0,414	—0,562	—
6	1	1	1	1	1	1
	3,700	2,880	1,760	0,653	—0,463	—0,535
	5,289	1,534	—1,420	—1,880	0,133	0,346
	5,289	—1,534	—1,420	1,880	0,133	—0,346
6	3,700	—2,880	1,760	—0,653	—0,463	0,535
	1	—1	1	—1	1	—1

Собственные частоты внутрисекретных колебаний могут быть определены из уравнения (XII.27), подставляя различные значения u_1 , определяемые (XII.29), для каждого значения получим бесчисленное множество собственных частот, относящихся к различным группам форм (различным тонам) внутрисекретных крутильных колебаний. При этом определенному значению u_1 будет соответствовать определенное число перемен знака по длине пакета.

Из уравнения (XII.27) следует, что $u_1 u_2 = 1$ и $u_1 + u_2 = 4 - 6/(a_1 k_1)$, поэтому

$$a_1 = -\frac{6u_1}{k_1(u_1^2 + 4u_1 + 1)} = -\frac{a_2}{k_1},$$

где $a_2 = 6u_1(u_1^2 + 4u_1 + 1)$.

Используя введенные ранее обозначения, получим следующее уравнение для определения собственных частот колебаний пакета лопаток, соединенных одной связью в сечении ζ_c .

$$\frac{\cos \rho (1 - \zeta_c) \sin \rho \zeta_c}{\rho \cos \rho} = -\frac{a_2}{k_1} = -\frac{a_2 GT l_c}{12 H_c E J_c l}. \quad (\text{XII } 32)$$

С помощью аналогичных, хотя и значительно более громоздких выкладок, можно получить уравнение для определения частот крутильных колебаний пакета лопаток, соединенных двумя связями [108].

Оценим влияние постановки связей на частотный спектр для численного примера, разобранный в [108] $m = 7$; $k_1 = 6,15$; $f_0 = 1/GTg/(J_p \gamma) 4l = 376$ Гц, где f_0 — частота первого тона крутильных колебаний отдельной консольной лопатки. Примем, что единственная связь расположена на вершине лопатки, т. е. частотное уравнение (XII.32) в данном случае примет вид

$$\sin \rho / (\rho \cos \rho) = -a_2 / 6,15. \quad (\text{XII.32a})$$

Результаты вычислений для первых трех тонов сведены в табл. XII.2. Там же указано изменение частот первого тона при

Таблица XII.2

Тон колебаний	k_1	k							$\Delta f_{\text{отн}} \%$
		0	1	2	3	4	5	6	
I	6,150	653	641	630	600	557	524	521	25,3
	12,300	697	689	679	661	636	591	588	18,5
	3,075	590	575	558	532	498	466	464	27,2
II III	6,150	1330	1312	1290	1267	1238	1202	1200	10,8
	6,150	2032	2019	1997	1975	1953	1928	1925	5,55

уменьшении или увеличении в 2 раза относительной жесткости связи, характеризуемой коэффициентом k_1 , и интервал изменения частот соответствующего тона колебаний, равный $\Delta f_{\text{отн}} = |(f_{\text{max}} - f_{\text{min}}) / f_{\text{min}}| \%$ (где f_{max} и f_{min} — соответственно максимальная и минимальная собственная частота одного и того же тона). Как следует из приведенных в таблице данных, существует довольно значительная разница в частотах, соответствующих одному и тому же тону колебаний. В этом состоит различие между внутрипакетными крутильными и внутрипакетными изгибными колебаниями; для последних из них диапазон изменения частот, соответствующих одной группе форм внутрипакетных колебаний, при малом числе лопаток в пакете обычно весьма невелик.

Физически указанное различие объясняется следующим: при внутрипакетных изгибных колебаниях изменение частот определяется изменением отношения жесткости лопатки на изгиб к жесткости связи на растяжение, которое обычно невелико и поэтому его изменение слабо влияет на собственные частоты, при внутрипакетных крутильных колебаниях изменение частот определяется изменением отношения жесткости лопатки на кручение к жесткости связи на изгиб, являющихся обычно величинами одного порядка. Поэтому изменение относительной жесткости связи, имеющее место при различных собственных формах одного и того же тона колебаний, во многих случаях мало сказывается на частотах внутрипакетных изгибных колебаний (связь в первом приближении можно рассматривать как нерастяжимую) и значительно сильнее сказывается на частотах внутрипакетных крутильных колебаний.

Наибольшей собственной частоте, как следует из табл. XII 2, соответствует собственная форма без перемен знака по длине пакета, наименьшей — с числом перемен знака, равным $m - 1$, т. е. при противофазных колебаниях соседних лопаток. Это объясняется тем, что изгибная жесткость шага связи уменьшается по мере увеличения числа перемен знака по длине пакета: как показано в п. XI.10, при одинаковых по величине и знаку амплитудах соседних лопаток изгибная жесткость шага связи равна $12EJ_c/t_c$, при одинаковых по величине, но противоположных по знаку амплитудах — $4EJ_c/t_c$. Указанное изменение изгибной жесткости связей приблизительно определяет границы изменения собственных частот, соответствующих одному и тому же тону внутрипакетных колебаний лопаток.

Диапазон изменения собственных частот, соответствующих первому тону внутрипакетных крутильных колебаний, для рассмотренного в табл. XII.2 численного примера превышает 25 %. Для этих же лопаток, но соединенных двумя рядами паяных проволок, диапазон изменения частот первого тона превышает 50% [108]. Большое различие частот внутрипакетных крутильных колебаний, соответствующих определенному тону, приводит к значительным трудностям при проведении вибрационной настройки облопачивания стационарных паровых турбин.

XII.3. ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК

Рассмотрим две причины, вызывающие связанность изгибных и крутильных колебаний отдельной лопатки.

Несовпадение центра тяжести и центра кручения (изгиба) поперечного сечения лопатки. Расчеты показывают, что центр тяжести для типичных лопаточных профилей не совпадает с центром кручения. В связи с этим при колебаниях лопатки силы инерции, равнодействующая которых проходит через центр тяжести, создают крутящий момент относительно центра кручения, а перемещение центра тяжести из-за поворота сечения вокруг центра кручения приводит к возникновению дополнительной силы инерции. На рис. XII 4 изображено поперечное сечение лопатки и указаны положительные направления координатных осей и перемещений (предполагается, что главные оси поперечного сечения параллельны координатным осям x и y). Обозначим, как и ранее, перемещение поперечного сечения в направлении оси y через $V(z, t)$, угол поворота сечения — через $\Theta(z, t)$, центр кручения и центр тяжести соответственно через o_1 и o . Будем считать, что проекция расстояния между центром кручения и центром тяжести на ось x равна a . Используя введенные обозначения, получим следующие уравнения для перемещения центра тяжести V_o и силы инерции:

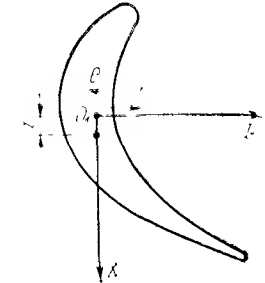


Рис. XII.4. Система координатных осей и положительные направления перемещений при изгибно-крутильных колебаниях лопатки

$$\left. \begin{aligned} V_o(z, t) &= V(z, t) + \Theta(z, t)a; \\ \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V_o}{\partial t^2} &= \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{g} Fa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad \text{(XII.33)}$$

Пренебрежем силами сопротивления и рассмотрим свободные колебания, т. е. будем считать, что отсутствуют возмущающие силы. Тогда вместо уравнений (XI.9) и (XII.4) получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 (EJ \partial^2 V / \partial z^2)}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{g} Fa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial (GT \partial \Theta / \partial z)}{\partial z} - \frac{\gamma}{g} J_p \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{g} Fa \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \text{(XII.34)}$$

Связанность изгибных и крутильных колебаний имеет место независимо от того, сохраняются ли геометрические характеристики поперечного сечения неизменными по высоте лопатки. Действительно, для равномерно нагретой лопатки постоянного сечения

(т. е. для лопатки, модуль упругости которой неизменен по высоте) система уравнений (XII.34) может быть преобразована к виду:

$$\left. \begin{aligned} EJ \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{g} Fa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} &= 0; \\ GT \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma}{g} J_p \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{g} Fa \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.35})$$

«Точное» решение системы (XII.35) может быть получено, но оно требует проведения весьма громоздких выкладок [186], численные способы решения будут рассмотрены в гл. XV.

Предварительная закрутка лопатки. Предварительная закрутка лопатки также приводит к возникновению связанных изгибно-крутильных колебаний. Так как в данном случае изгиб и кручение лопатки оказываются связанными независимо от расстояния между центром тяжести и центром кручения, то для упрощения выкладок предположим, что центр тяжести и центр кручения совпадают.

Рассмотрим два поперечных сечения лопатки, отстоящих друг от друга на расстоянии l и предварительно закрученных на угол θ_0 (угол закручивания на единицу длины $\tau_0 = \theta_0/l$) — рис. XII.5.

Первоначальная длина волокна (см. п. V.1), проходящего через точку A , расположенную на расстоянии r от центра тяжести составляет $l_1 = \sqrt{l^2 + r^2 \theta_0^2} = l \sqrt{1 + r^2 \tau_0^2}$; длина волокна после закрутки лопатки на угол θ

$$l_2 = \sqrt{l^2 + r^2 (\theta_0 + \theta)^2} = l \sqrt{1 + r^2 (\tau_0 + \tau)^2}.$$

Если пренебречь членами, содержащими квадрат малой величины θ , то продольная деформация винтового волокна окажется равной:

$$\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{l_1} \approx \frac{r^2 \tau_0 \tau}{1 + (r^2 \tau_0^2 / 2)}. \quad (\text{XII.36})$$

Для случаев, представляющих практический интерес, выполняется соотношение $r \tau_0 \ll 1$, поэтому формулу (XII.36) можно преобразовать к виду

$$\varepsilon = r^2 \tau_0 \tau. \quad (\text{XII.36a})$$

Как видно, продольная деформация волокна предварительно закрученной лопатки пропорциональна первой степени малой величины τ и пренебрегать ею нельзя. При кручении лопатки в поперечном сечении возникнут нормальные напряжения, распределенные по следующему закону:

$$\sigma = Er^2 \tau_0 \tau. \quad (\text{XII.37})$$

Изгибающий момент, создаваемый этими напряжениями,

$$M_x = \int_F \sigma y dF = E \tau_0 \tau \int_F r^2 y dF = E \tau_0 \tau J_{px}, \quad (\text{XII.38})$$

где J_{px} — полярно-осевой момент инерции поперечного сечения рассматриваемой лопатки.

Таким образом, кручение и изгиб для предварительно закрученной лопатки оказываются взаимосвязанными.

Если пренебречь обоими указанными выше причинами, то взаимодействие изгибных и крутильных колебаний все же может иметь место при условии соединения лопаток в пакет с помощью связей. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим деформацию участка связи, соединяющего три соседние лопатки в пакете, при внутрипакетных колебаниях.

В п. XII.2 при изучении внутрипакетных крутильных колебаний предполагалось, что частоты изгибных и крутильных колебаний лопаток существенно различаются, поэтому силы, действующие от связей на лопатки при внутрипакетных крутильных колебаниях, практически не вызовут смещения лопаток в направлении оси x . см. рис. XII.4. Откажемся от этого предположения и рассмотрим общий случай деформации связей: будем считать, что связи изгибаются в плоскости xoy , причем имеют место перемещения связей в направлении оси x в местах соединения связей с лопатками. Обозначим, как и ранее, через M''_n и M'_n изгибающие моменты, действующие в поперечном сечении связи непосредственно до и после n -й лопатки; α_n — угол поворота связи в месте соединения с n -й лопаткой; J_c и l_c — момент инерции и длину шага связи. Кроме того, введем следующие обозначения. x_n — перемещение связи в направлении оси x в месте соединения с n -й лопаткой; Q''_n и Q'_n — перерезывающие силы, действующие в поперечном сечении связи до и после n -й лопатки. Из рис. XII.3 и XII.4 следует, что крутящий момент и перерезывающая сила, действующие от связи на n -ю лопатку, таковы:

$$M_{zn} = M''_n + M'_n; \quad Q_n = Q''_n - Q'_n. \quad (\text{XII.39})$$

Так как считаем, что собственные частоты шага связи значительно выше рассматриваемых частот изгибно-крутильных колебаний пакета, то силами инерции шага связи можно пренебречь. Из условия равновесия шага связи следует:

$$Q'_n = Q''_{n+1}; \quad Q'_n = (M'_n + M''_{n+1})/l_c, \text{ или } Q''_{n+1} = (M'_n + M''_{n+1})/l_c.$$

Аналогичные условия равновесия имеют место и для следующего шага связи, поэтому $Q''_n = (M'_{n-1} + M''_n)/l_c$.

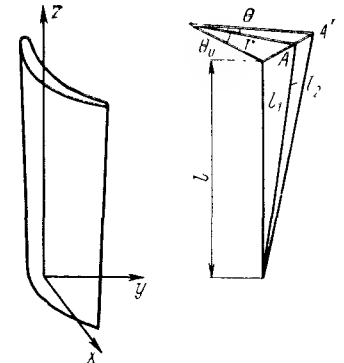


Рис. XII.5. Кручение предварительно закрученной лопатки

Используя уравнение (XII.39), получим:

$$Q_n = (M_n'' - M_{n+1}'' + M_{n-1}' - M_n')/t_c. \quad (\text{XII.40})$$

Так как в соответствии с принятым положительным направлением осей

$$EJ_c x'' = -M_n' + Q_n y, \quad (\text{XII.41})$$

то, интегрируя уравнение (XII.41) и используя граничные условия, а также равенство $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$, получим.

$$\left. \begin{aligned} EJ_c \alpha_{n+1} &= -M_n' t_c + \frac{M_n' + M_{n+1}''}{2} t_c + \alpha_n EJ_c; \\ EJ_c x_{n+1} &= -\frac{M_n' t_c^2}{2} + \frac{M_n' + M_{n+1}''}{6} t_c^2 + \alpha_n t_c EJ_c + x_n EJ_c. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.42})$$

Из уравнений (XII.42) получим:

$$\left. \begin{aligned} M_n' &= -\frac{6EJ_c}{t_c^2} (x_{n+1} - x_n) + \frac{2EJ_c}{t_c} (\alpha_{n+1} + 2\alpha_n); \\ M_{n+1}'' &= -\frac{6EJ_c}{t_c^2} (x_{n+1} - x_n) + \frac{2EJ_c}{t_c} (2\alpha_{n+1} + \alpha_n). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.43})$$

Используя уравнения (XII.39), (XII.40) и (XII.43), найдем:

$$\left. \begin{aligned} M_n'' &= -\frac{6EJ_c}{t_c^2} (x_n - x_{n-1}) + \frac{2EJ_c}{t_c} (2\alpha_n + \alpha_{n-1}), \\ M_{2n} &= -\frac{6EJ_c}{t_c^2} (x_{n+1} - x_{n-1}) + \frac{2EJ_c}{t_c} (\alpha_{n+1} + 4\alpha_n + \alpha_{n-1}), \\ Q_n &= -\frac{12EJ_c}{t_c^3} (2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) - \frac{6EJ_c}{t_c^2} (\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.44})$$

Если обозначить перемещение и угол поворота n -й лопатки в месте установки связи u_n и θ_n и учесть, что в соответствии с принятым положительным направлением осей $u_n = x_n$, $\theta_n = -\alpha_n$, то из уравнений (XII.44) можно найти зависимость между прогибом и углом поворота лопатки и моментом и перерезывающей силой, действующей на лопатку от связи:

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= -\frac{12EJ_c}{t_c^3} (2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) + \frac{6EJ_c}{t_c^2} (\theta_{n+1} - \theta_{n-1}); \\ M_{2n} &= -\frac{2EJ_c}{t_c} (\theta_{n-1} + 4\theta_n + \theta_{n+1}) + \frac{6EJ_c}{t_c^2} (u_{n-1} - u_{n+1}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.45})$$

Если учесть податливость контактного соединения, из-за которой будет иметь место равенство $\alpha_n = -H_c \theta_n$, то формула (XII.45) преобразуется к виду.

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= -\frac{12EJ_c}{t_c^3} (2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) + \frac{6EH_c J_c}{t_c^2} (\theta_{n+1} - \theta_{n-1}); \\ M_{2n} &= -\frac{2EJ_c H_c}{t_c} (\theta_{n-1} + 4\theta_n + \theta_{n+1}) + \frac{6EJ_c}{t_c^2} (u_{n-1} - u_{n+1}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.45a})$$

Как следует из формулы (XII.45), сила и крутящий момент, действующие на n -ю лопатку, зависят от прогибов и углов поворота только $n-1$, n и $n+1$ лопаток.

Если предположить, что лопатки совершают чисто крутильные внутрипакетные колебания, при которых $u_{n-1} = u_n = u_{n+1} = 0$, то, как следует из формулы (XII.45), величина перерезывающей силы, действующей на n -ю лопатку, будет все же отлична от нуля. Появление силы Q_n вызовет изгиб лопатки и, таким образом, приведет к возникновению совместных изгибно-крутильных колебаний.

Глава XIII

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК

XIII.1. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИЛЫ

При изучении линейных колебаний справедлив принцип суперпозиции, заключающийся в том, что колебания, вызванные различными внешними силами, независимы друг от друга. Поскольку неравномерное по окружности поле давлений, скоростей или углов потока может быть разложено в ряд Фурье, рассмотрим воздействие на лопатку только одной гармоники ряда, имея в виду, что колебания, вызванные различными внешними силами, могут быть линейно просуммированы. В настоящем параграфе будем считать, что на жестко заделанную в корневом сечении лопатку воздействует возмущающая сила, изменяющаяся по закону $\eta \cos \lambda t$, где η (γ) — интенсивность возмущающей силы, причем первоначально примем, что $\eta = \text{const}$, т. е. возмущающая нагрузка равномерно распределена по высоте лопатки.

Как показано в п. XII, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в рассматриваемом случае примет следующий вид:

$$EJ \frac{\partial^4 V}{\partial \xi^4} + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2h \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial V}{\partial t} = \eta \cos \lambda t \quad \text{при } 0 \leq \xi \leq 1. \quad (\text{XIII.1})$$

Одновременно должны выполняться начальные условия

$$V = 0(\xi) \quad \text{и} \quad \partial V / \partial t = \psi(\xi) \quad \text{при } t = 0;$$

граничные условия в корневом сечении:

$$V = 0 \text{ и } \partial V / \partial \xi = 0 \text{ при } \xi = 0,$$

а также граничные условия на вершине лопадки ($\xi = 1$), зависящие от способа ее закрепления: $\partial^2 V / \partial \xi^2 = 0$, $\partial^3 V / \partial \xi^3 = 0$ — вершина лопадки свободна; $V = 0$, $\partial^2 V / \partial \xi^2 = 0$ — вершина лопадки оперга; $V = 0$, $\partial V / \partial \xi = 0$ — вершина лопадки жестко заделана.

Решение дифференциального уравнения (XIII.1) будем искать в виде $V = V_1 + V_2$, где V_1 определяет свободные колебания лопадки, г. е. решение уравнения (XIII.1) при условии $\eta = 0$, удовлетворяющее начальным и граничным условиям. Как было показано в п. XI.2, из-за наличия демпфирования ($h \neq 0$) эти колебания со временем затухнут. Так как V_1 удовлетворяет дифференциальному уравнению (XIII.1) без правой части, начальным и граничным условиям, то V_2 должно удовлетворять дифференциальному уравнению (XIII.1) с правой частью, граничным условиям и нулевым начальным условиям, г. е. должны выполняться следующие соотношения:

$$V_2 = 0 \text{ и } \partial V_2 / \partial t = 0 \text{ при } t = 0. \quad (\text{XIII.2})$$

Как и при вычислении V_1 , будем искать V_2 в виде

$$V_2(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t) Z_i(\xi), \quad (\text{XIII.3})$$

где $Z_i(\xi)$ — решения (XI.35) дифференциального уравнения (XI.9a), удовлетворяющие граничным условиям на концах лопадки. Из выражения (XIII.3) следует, что в этом случае и V_2 удовлетворяет граничным условиям.

Для определения функций $K_i(t)$ подставим выражение (XIII.3) в дифференциальное уравнение (XIII.1):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{EJ}{i^4} Z_i^{IV} K_i + \frac{\gamma}{g} F Z_i K_i'' + 2h \frac{\gamma}{g} F Z_i K_i' \right\} = \eta \cos \lambda t.$$

Заменив Z_i^{IV} в соответствии с уравнением (XI.39), получим:

$$Z_i^{IV} = \rho_i^4 Z_i; \quad \rho_i^4 = p_i^2 \gamma F i^4 / (g E J);$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \{ K_i''(t) + 2h K_i'(t) + p_i^2 K_i(t) \} Z_i(\xi) = \frac{g \eta}{\gamma F} \cos \lambda t. \quad (\text{XIII.4})$$

Правую часть уравнения (XIII.4) представим в виде

$$\frac{g \eta}{\gamma F} \cos \lambda t = \sum_{i=1}^{\infty} H_i(t) Z_i(\xi). \quad (\text{XIII.5})$$

Коэффициенты ряда H_i будут определены тем же способом, что и коэффициенты ряда (XI.36). Умножив обе части уравнения

(XIII.5) на $Z_i(\xi)$ и проинтегрировав от нуля до единицы, найдем на основании (XI.38)

$$H_i(t) = \frac{g \eta}{\gamma F} \frac{\int_0^1 Z_i(\xi) d\xi}{\int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi} \cos \lambda t = N_i \cos \lambda t, \quad (\text{XIII.6})$$

где

$$N_i = \frac{g \eta}{\gamma F} \frac{\int_0^1 Z_i(\xi) d\xi}{\int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi}.$$

Подставив в уравнение (XIII.4) выражение для правой части, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \{ K_i''(t) + 2h K_i'(t) + p_i^2 K_i(t) - H_i(t) \} Z_i(\xi) = 0. \quad (\text{XIII.4a})$$

Равенство (XIII.4a) можно удовлетворить, положив

$$K_i''(t) + 2h K_i'(t) + p_i^2 K_i(t) = H_i(t) = N_i \cos \lambda t. \quad (\text{XIII.7})$$

Для того чтобы удовлетворить начальным условиям (XIII.2), надо выбрать $K_i(t)$ так, чтобы выполнялись соотношения:

$$K_i(t) = 0 \text{ и } K_i'(t) = 0 \text{ при } t = 0. \quad (\text{XIII.2a})$$

Так как уравнение (XIII.7) является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, то нетрудно показать [159], что решение уравнения имеет вид:

$$K_i(t) = e^{-ht} (C_1 \cos p_{1i} t + C_2 \sin p_{1i} t) + \frac{N_i \cos(\lambda t + \varepsilon)}{\sqrt{(p_i^2 - \lambda^2)^2 + 4h^2 \lambda^2}}, \quad (\text{XIII.8})$$

$$\text{где } p_{1i} = \sqrt{p_i^2 - h^2}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = -2h\lambda / (p_i^2 - \lambda^2).$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий (XIII.2a) и, таким образом, $K_i(t)$ и $V_2(\xi, t)$ полностью определяются.

Из выражений (XIII.3) и (XIII.8) следует, что V_2 является суммой двух слагаемых, первое из которых имеет множитель e^{-ht} (свободные сопровождающие колебания [4]) и со временем стремится к нулю. Второе слагаемое имеет вид:

$$V_2^{\text{II}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_i Z_i(\xi)}{\sqrt{(p_i^2 - \lambda^2)^2 + 4h^2 \lambda^2}} \cos(\lambda t + \varepsilon), \quad (\text{XIII.9})$$

выражения для N_i и $\operatorname{tg} \varepsilon$ приведены выше.

Если частота возмущающей силы λ близка к какой-либо из собственных частот лопатки p_i , то, учитывая малое значение коэффициента h , легко понять, что слагаемое суммы, соответствующее случаю $p_i \approx \lambda$, будет много больше остальных слагаемых по абсолютной величине и приближенно можно считать

$$V_2^{II} \approx \frac{N_i}{\sqrt{(p_i^2 - \lambda^2)^2 + 4h^2\lambda^2}} Z_i(\xi) \cos(\lambda t + \varepsilon). \quad (\text{XIII } 10)$$

Рассмотрим зависимость амплитуды колебаний от соотношения между частотой возмущающей силы и собственной частотой лопатки. Выражение (XIII.10) перепишем в виде

$$V_2^{II} = \beta \frac{N_i}{p_i^2} Z_i(\xi) \cos(\lambda t + \varepsilon), \quad (\text{XIII.10a})$$

где

$$\beta = \frac{1}{V(1 - \mu^2)^2 + \mu^2 \kappa^2}; \quad \mu = \frac{\lambda}{p_i}; \quad \kappa = \frac{2h}{p_i} - \frac{\delta}{\pi};$$

δ — логарифмический декремент колебаний

На рис. II.31 представлено изменение β в зависимости от μ и κ . Как видно из приведенных кривых, величина амплитуды, вызванной заданной периодической силой, быстро возрастает с приближением частоты возмущающей силы к собственной частоте лопатки. Значение β возрастает также при уменьшении величины h . При $\mu = 1$ ($\lambda = p_i$), т. е. при совпадении частоты возмущающей силы с собственной частотой лопатки, наступает резонанс:

$$\lambda = p_i, \quad \varepsilon = -\pi/2; \quad \cos(\lambda t + \varepsilon) = \sin \lambda t$$

Выражение для прогиба (XIII.10a) в этом случае примет следующий вид:

$$V_2^{II} = \frac{N_i}{2hp_i} Z_i(\xi) \sin p_i t = \frac{g\eta}{2\gamma F h p_i} \frac{\int_0^1 Z_i(\xi) d\xi}{\int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi} Z_i(\xi) \sin p_i t.$$

Так как $h = \delta p_i'/(2\pi)$, а $p_i^2 = \rho_i^4 E J g / (F l^4 \gamma)$, то

$$V_2^{II} = \frac{\pi \eta l^4}{E J \delta} \frac{\int_0^1 Z_i(\xi) d\xi}{\rho_i^4 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi} Z_i(\xi) \sin p_i t. \quad (\text{XIII.11})$$

Как следует из формулы (XIII.11), амплитуда колебаний при резонансе с учетом сделанных предположений о характере демпфирующих сил прямо пропорциональна интенсивности возмущающей

силы и обратно пропорциональна декременту колебаний. Так как в п. XI.3 было показано, что

$$\int_0^1 [Z_i'(\xi)]^2 d\xi = \rho_i^4 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi,$$

то выражение (XIII.11) можно преобразовать к виду

$$V_2^{II} = \frac{\pi \eta l^4}{E J \delta} \frac{\int_0^1 Z_i(\xi) d\xi}{\int_0^1 [Z_i'(\xi)]^2 d\xi} Z_i(\xi) \sin p_i t \quad (\text{XIII.11a})$$

Выражение для амплитуды колебаний лопатки при резонансе может быть получено также из закона сохранения энергии.

Как следует из формулы (XIII.11), прогиб лопатки при резонансе имеет вид

$$V = A Z_i(\xi) \sin p_i t, \quad (\text{XIII.12})$$

где A — постоянный коэффициент; $Z_i(\xi)$ — собственная форма, соответствующая частоте p_i .

Элементарная работа возмущающей силы интенсивности $\eta \cos p_i t$, действующей на участке лопатки длиной $l d\xi$,

$$dR_1 = \eta l \cos p_i t d\xi dV,$$

где $dV = A Z_i(\xi) \cos p_i t d(p_i t)$

Работа за период возмущающей силы, распределенной по всей высоте лопатки,

$$R_1 = A \eta l \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi \int_0^{2\pi} \cos^2 p_i t d(p_i t) = \pi A \eta l \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi, \quad (\text{XIII.13})$$

так как $\int_0^{2\pi} \cos^2 p_i t d(p_i t) = \pi$

Интенсивность сил трения при принятых предположениях будет следующей:

$$2h \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial V}{\partial t} = 2h \frac{\gamma}{g} p_i A Z_i(\xi) \cos p_i t.$$

Элементарная работа сил трения, распределенных на участке длиной $l d\xi$, такова:

$$dR_2 = 2h(\gamma/g) l F p_i A Z_i(\xi) \cos p_i t d\xi dV.$$

Работа за период сил трения, распределенных по всей высоте лопатки, составит

$$R_2 = 2\pi h \frac{\gamma}{g} F l p_i A^2 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi. \quad (\text{XIII.14})$$

Учитывая, что кинетическая энергия лопатки T_i равна

$$T_i = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} F l p_i^2 A^2 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi,$$

а также принимая во внимание, что $h = \delta p_i / (2\pi)$, из выражения (XIII 14) найдем

$$R_2 = 2\delta T_i$$

Так как в условиях резонанса работа за период возмущающих сил равна работе демпфирующих сил, то, приравнявая величины R_1 и R_2 , получим

$$A = \frac{\frac{g\eta}{2\gamma h F p_i} \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi}{\int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi}.$$

Подставив найденное значение A в формулу (XIII 12), найдем

$$V = \frac{\frac{g\eta}{2\gamma h F p_i} \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi}{\int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi} Z_i(\xi) \sin p_i t = \frac{\pi \eta l^4}{F J \delta} \frac{\int_0^1 Z_i(\xi) d\xi}{\rho_i^4 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi} Z_i(\xi) \sin p_i t,$$

что совпадает с найденным ранее выражением (XIII 11)

Зная амплитуду колебаний лопатки и форму прогиба, нетрудно определить уровень динамических напряжений

Максимальное во времени значение изгибающего момента, действующего в поперечном сечении лопатки,

$$M = \frac{EJ}{l^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \right)_{\max}.$$

Заменив V его выражением (XIII 11), получим

$$M = \frac{\pi \eta l^2}{\delta} \frac{\int_0^1 Z_i(\xi) d\xi}{\rho_i^4 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi} Z_i''(\xi).$$

Динамические напряжения в поперечном сечении лопатки

$$\sigma(\xi) = \frac{\pi \eta l^2}{\delta W} \frac{\int_0^1 Z_i(\xi) d\xi}{\rho_i^4 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi} Z_i''(\xi). \quad (\text{XIII 15})$$

Расчеты показывают, что для лопатки постоянного поперечного сечения максимальные динамические напряжения достигаются в корневом сечении. Величина их может быть вычислена по формуле (XIII 15), если положить $\xi = 0$. Учитывая, что в соответствии с формулами (XI 35) и (XI 18) выполняется равенство $Z_i''(0) = \rho_i^2$, получим

$$\sigma_i(0) = \frac{\pi l^2}{\delta W} \eta C_i = \frac{2\pi}{\delta} \sigma_{ст} C_i, \quad (\text{XIII 16})$$

где $\sigma_{ст}$ — напряжения в корневом сечении лопатки при статическом приложении нагрузки η

$$C_i = \frac{\int_0^1 Z_i(\xi) d\xi}{\rho_i^2 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi}. \quad (\text{XIII 17})$$

Значения C_i приведены в табл. II 4. Как показано в таблице, при принятом законе постоянства интенсивности возмущающих сил по высоте лопатки, динамические напряжения, пропорциональные величине C_i , резко падают при увеличении номера собственной формы.

В п. I 4 отмечалось, что интенсивность возмущающих сил может возрастать вблизи вершины и корня лопатки из-за наличия концевых потерь в решетке направляющих лопаток. Для качественной оценки опасности подобного возмущения рассмотрим действие сосредоточенной на вершине лопатки силы $P \cos p_i t$, т. е. силы, гармонически изменяющейся во времени с частотой, равной собственной частоте лопатки (сосредоточенную силу у корня лопатки не рассматриваем, так как при колебаниях жестко заделанной лопатки ее работа будет равна нулю). Разберем только случай колебаний лопатки со свободной вершиной, так как при опертной или заделанной вершине работа возмущающей силы $P \cos p_i t$ также окажется равной нулю.

Определим амплитуду колебаний при резонансе из условия равенства работ возмущающих и демпфирующих сил. Так как рассматриваются резонансные колебания, то собственная форма по-прежнему описывается формулой (XIII 12), а работа демпфирующих сил — выражением (XIII 14).

Выражение для работы возмущающей силы за период колебаний в данном случае может быть найдено элементарно, поскольку сосредоточенная сила действует только в периферийном сечении лопатки

$$R_1 = \int_0^{2\pi} P A Z_i(1) \cos^2 p_i t d(p_i t) = P A Z_i(1) \pi. \quad (\text{XIII 18})$$

59

$$(0) = \frac{PEJg\pi\rho_i^2}{l^3\gamma F\delta p_i^2 W} \frac{Z_i(l)}{\int_0^l Z_i^2(\zeta) d\zeta}, \quad (\text{XIII.19})$$

причем в формуле (XIII.19) учтено, что $Z_i''(0) = \rho_i^2$.

$$\sigma_i(0) = \frac{P\pi l}{\delta W} \frac{Z_i(1)}{\rho_i^2 \int_0^1 Z_i^2(\zeta) d\zeta}. \quad (\text{XIII.19a})$$
$$\int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi = \frac{1}{4} Z_i^2(1),$$
$$\sigma_i(0) = \frac{2P\pi l}{8W} C'_i = \sigma_{cr} \frac{2\pi}{\delta} C'_i, \quad (\text{XIII.20})$$

Так как $\rho_i^2 \approx p_i$, то выполняется соотношение

$$\sigma_i(0)/\sigma_1(0) = C'_i/C'_1 = p_i/p_1, \quad (\text{XIII.21})$$

Величины коэффициентов C_i' приведены в табл. II.5.

Как следует из приведенных в табл. II.4 и II.5 данных, при возбуждении колебаний лопатки сосредоточенной на вершине силой уровня динамических напряжений при высших собственных формах резко падает, хотя и несколько более медленно, чем при возбуждении колебаний распределенной по высоте лопатки нагрузкой. Физическая причина этого явления, как отмечалось в п. II.7, заключается в резком уменьшении амплитуд колебаний при высших собственных формах в случае равенства максимальных напряжений в лопатках при всех формах колебаний.

Рассмотрим более общий случай нагрузки, возбуждающей колебания лопатки. Будем считать, что нагрузка представляет собой периодическую функцию времени, период которой равен одному обороту турбины (рис. XIII.1). Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в данном случае примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{EJ}{t^4} \frac{\partial^4 V}{\partial \zeta^4} + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \\ & + 2h \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial V}{\partial t} = q(\zeta, t), \end{aligned} \quad (\text{XIII.22})$$

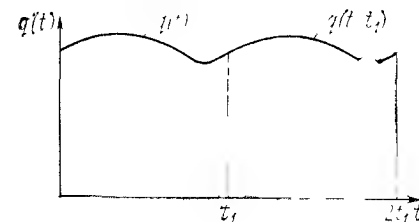


Рис. XIII.1. Зависимость нагрузки, возбуждающей колебания лопатки, от времени

где $\eta(\xi, t)$ — интенсивность возмущающего усилия, действующего на лопатку

При проведении сравнительных вычислений примем, что интенсивность возмущающего усилия не зависит от ζ , т. е. является постоянной по высоте лопатки

В соответствии с рис. XIII.1 выражение $q(t)$ примет вид;

при $0 \leq t < t_1$ $q(t) = q(t)$;

при $t_1 \leq t < 2t_1$ $q(t) = q(t - t_1)$;

при $(s-2)t_1 \leq t < (s-1)t_1$ $q(t) = q[t - (s-2)t_1]$;

$$\text{при } (s-1)t_1 \leq t < st_1 \quad q(t) = q|t - (s-1)t_1|;$$

$$\varphi(t + st_1) = \varphi(t), \text{ где } s \text{ — целое.}$$

Вводя обозначение $EJg/(Fl^4\gamma) = a^2$, преобразуем уравнение (XIII.22) к виду:

$$a^2 \frac{\partial^4 V}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{g}{\gamma F} \Psi(t). \quad (\text{XIII.22a})$$

Так как при наличии сил сопротивления свободные колебания, возникающие при отличных от нуля начальных условиях, со временем затухнут, будем искать решение уравнения (XIII 22a) при нулевых начальных условиях:

$$V = \partial V / \partial t = 0 \text{ при } t = 0.$$

Будем рассматривать колебания отдельной лопатки без связей, жестко заделанной в корневом сечении. Граничные условия в этом случае будут следующими:

$$V = \partial V / \partial \xi = 0 \text{ при } \xi = 0; \quad \partial^2 V / \partial \xi^2 = \partial^3 V / \partial \xi^3 = 0 \text{ при } \xi = 1.$$

Как и в предыдущем параграфе, будем искать решение дифференциального уравнения (XIII.22a) в виде

$$V(\zeta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t) Z_i(\zeta).$$

Подставив выражение для $V(\zeta, t)$ в дифференциальное уравнение (XIII.22a), получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} [K_i''(t) + 2hK_i'(t) + p_i^2 K_i(t)] Z_i(\zeta) = \frac{g}{\gamma F} \varphi(t). \quad (\text{XIII.23})$$

Правую часть уравнения (XIII.23) представим в виде ряда

$$\frac{g}{\gamma F} \varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i(t) Z_i(\zeta), \quad (\text{XIII.24})$$

причем, как и ранее, коэффициенты ряда определяются выражениями

$$H_i(t) = A_i \varphi(t), \quad (\text{XIII.25})$$

где

$$A_i = \frac{\frac{g}{\gamma F} \int_0^1 Z_i(\zeta) d\zeta}{\int_0^1 Z_i^2(\zeta) d\zeta}.$$

Подставив выражение (XIII.24) в уравнение (XIII.23), получим уравнение для определения $K_i(t)$

$$K_i''(t) + 2hK_i'(t) + p_i^2 K_i(t) = A_i \varphi(t). \quad (\text{XIII.26})$$

Для того чтобы удовлетворить нулевым начальным условиям, необходимо выполнение следующих равенств:

$$K_i = 0, \quad K_i' = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (\text{XIII.27})$$

Решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (XIII.26) имеет следующий вид [95]:

$$K_i(t) = e^{-ht} (C_1 \cos p_{1i} t + C_2 \sin p_{1i} t) + \frac{A_i}{p_{1i}} e^{-ht} \int_0^t e^{hx} \varphi(x) \sin p_{1i} (t-x) dx, \quad (\text{XIII.28})$$

где $p_{1i} = \sqrt{p_i^2 - h^2}$.

Так как в соответствии с правилами дифференцирования под знаком интеграла [159]

$$\left[\int_0^t e^{hx} \varphi(x) \sin p_{1i} (t-x) dx \right]' = p_{1i} \int_0^t e^{hx} \varphi(x) \cos p_{1i} (t-x) dx + e^{hx} \varphi(x) \sin p_{1i} (t-x) \Big|_{t=x} = p_{1i} \int_0^t e^{hx} \varphi(x) \cos p_{1i} (t-x) dx,$$

то нетрудно показать, что при начальных условиях (XIII.27)

$$C_1 = C_2 = 0 \quad \text{и} \quad K_i(t) = \frac{A_i}{p_{1i}} e^{-ht} \int_0^t e^{hx} \varphi(x) \sin p_{1i} (t-x) dx. \quad (\text{XIII.28a})$$

Пусть ротор турбины совершает s -й оборот. Тогда $(s-1)t_1 \leq t < st_1$.

Заменив под знаком интеграла (XIII.28a) функцию $\varphi(x)$ ее значением согласно рис. XIII.1, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{hx} \varphi(x) \sin p_{1i} (t-x) dx &= \int_0^{t_1} e^{hx} q(x) \sin p_{1i} (t-x) dx + \\ &+ \int_{t_1}^{2t_1} e^{hx} q(x-t_1) \sin p_{1i} (t-x) dx + \dots \\ &\dots + \int_{(s-2)t_1}^{(s-1)t_1} e^{hx} q[x-(s-2)t_1] \sin p_{1i} (t-x) dx + \\ &+ \int_{(s-1)t_1}^t e^{hx} q[x-(s-1)t_1] \sin p_{1i} (t-x) dx. \end{aligned}$$

Выражение для $K_i(t)$ представится в виде:

$$K_i(t) = \frac{A_i e^{-ht}}{p_{1i}} \sum_{k=0}^{s-2} \int_{kt_1}^{(k+1)t_1} e^{hx} q(x-kt_1) \sin p_{1i} (t-x) dx + \frac{A_i e^{-ht}}{p_{1i}} \int_{(s-1)t_1}^t e^{hx} q[x-(s-1)t_1] \sin p_{1i} (t-x) dx. \quad (\text{XIII.28б})$$

Введем вместо t новую переменную τ . $\tau = t - (s-1)t_1$. Тогда при $(s-1)t_1 \leq t < st_1$ $0 \leq \tau < t_1$.

В интеграле под знаком суммы введем новую переменную u . $u = x - kt_1$. При $kt_1 \leq x < (k+1)t_1$ $0 \leq u < t_1$; $du = dx$.

Произведя подстановку получим следующее выражение для суммы интегралов R :

$$R = \sum_{k=0}^{s-2} \int_{kt_1}^{(k+1)t_1} e^{hx} q(x-kt_1) \sin p_{1i} (t-x) dx + e^{(s-1)ht_1} \sum_{k=0}^{s-2} e^{-(s-k-1)ht_1} \int_0^{t_1} e^{hu} q(u) \sin p_{1i} [\tau - u + (s-k-1)t_1] du.$$

Пусть $s-k-1 = \rho$, тогда при $0 \leq k \leq s-2$ $1 \leq \rho \leq s-1$. В результате получим:

$$R = e^{(s-1)ht_1} \sum_{\rho=1}^{s-1} e^{-\rho ht_1} \int_0^{t_1} e^{hu} q(u) \sin p_{1i} (\tau - u + \rho t_1) du =$$

$$= e^{(s-1)ht_1} \left[\int_0^{t_1} e^{hu} q(u) \sin p_{1i}(\tau - u) du \sum_{\rho=1}^{s-1} e^{-\rho ht_1} \cos \rho p_{1i} t_1 + \right. \\ \left. + \int_0^{t_1} e^{hu} q(u) \cos p_{1i}(\tau - u) du \sum_{\rho=1}^{s-1} e^{-\rho ht_1} \sin \rho p_{1i} t_1 \right].$$

Выражения для сумм могут быть легко найдены. Для этого рассмотрим

$$V = \sum_{\rho=1}^{s-1} e^{-\rho a} \cos \rho b = \frac{1}{2} \left[\sum_{\rho=1}^{s-1} e^{(-a+ib)\rho} + \sum_{\rho=1}^{s-1} e^{(-a-ib)\rho} \right].$$

По формуле геометрической прогрессии имеем

$$V = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{s(-a+ib)} - e^{-a+ib}}{e^{-a+ib} - 1} + \frac{e^{s(-a-ib)} - e^{-a-ib}}{e^{-a-ib} - 1} \right].$$

Учитывая, что $\exp a + \exp(-a) = 2 \operatorname{ch} a$; $\exp(ib) + \exp(-ib) = 2 \cos b$, получим

$$\sum_{\rho=1}^{s-1} e^{-\rho a} \cos \rho b = \frac{e^{-sa} \cos(s-1)b - e^{-(s-1)a} \cos sb - e^{-a} + \cos b}{2(\operatorname{ch} a - \cos b)}.$$

Аналогично найдем

$$\sum_{\rho=1}^{s-1} e^{-\rho a} \sin \rho b = \frac{e^{-sa} \sin(s-1)b - e^{-(s-1)a} \sin sb + \sin b}{2(\operatorname{ch} a - \cos b)}.$$

Заменяя $a = ht_1$, $b = p_{1i} t_1$ и подставляя найденные формулы в выражение для R , получим

$$R = \frac{e^{(s-1)ht_1}}{2(\operatorname{ch} ht_1 - \cos p_{1i} t_1)} \left\{ [e^{-sht_1} \cos(s-1)p_{1i} t_1 - e^{-(s-1)ht_1} \cos p_{1i} t_1 + \right. \\ \left. + \cos p_{1i} t_1 - e^{-ht_1}] \int_0^{t_1} e^{hu} q(u) \sin p_{1i}(\tau - u) du + \right. \\ \left. + [e^{-sht_1} \sin(s-1)p_{1i} t_1 - e^{-(s-1)ht_1} \sin p_{1i} t_1 + \sin p_{1i} t_1] \times \right. \\ \left. \times \int_0^{t_1} e^{hu} q(u) \cos p_{1i}(\tau - u) du \right\}.$$

Преобразуем второе слагаемое в выражении (XIII.28б). Положим $\tau = t = (s-1)t_1$, $u = x = (s-1)t_1$. Тогда при $(s-1)t_1 \leq x < t$ будет выполняться неравенство $0 \leq u < \tau$ и можно записать

$$\int_{(s-1)t_1}^t e^{hx} q[x - (s-1)t_1] \sin p_{1i}(t - x) dx = \\ = e^{(s-1)ht_1} \int_0^{\tau} e^{hu} q(u) \sin p_{1i}(\tau - u) du.$$

Подставив найденное значение в выражение (XIII.28б), получим при $0 \leq \tau < t_1$:

$$K_i(\tau) = \frac{A_i e^{-h\tau}}{2p_{1i}(\operatorname{ch} ht_1 - \cos p_{1i} t_1)} \left\{ [e^{-sht_1} \cos(s-1)p_{1i} t_1 - \right. \\ \left. - e^{-(s-1)ht_1} \cos p_{1i} t_1 + \cos p_{1i} t_1 - e^{-ht_1}] \int_0^{t_1} e^{hu} q(u) \sin p_{1i}(\tau - u) du + \right. \\ \left. + [e^{-sht_1} \sin(s-1)p_{1i} t_1 - e^{-(s-1)ht_1} \sin p_{1i} t_1 + \sin p_{1i} t_1] \times \right. \\ \left. \times \int_0^{t_1} e^{hu} q(u) \cos p_{1i}(\tau - u) du \right\} + \frac{A_i e^{-h\tau}}{p_{1i}} \int_0^{\tau} e^{hu} q(u) \sin p_{1i}(\tau - u) du \quad (\text{XIII.29})$$

Слагаемые, содержащие множители $\exp(-sht_1)$ и $\exp[-(s-1)ht_1]$, с течением времени быстро затухают. Действительно, по определению $h = \delta p_{1i}/(2\pi) = \delta f_{1i}$, поэтому, например, при $f = 1500$ Гц, $\delta = 0,01$; $t_1 = 1/n = 0,02$ с; $ht_1 = \delta f t_1 = 0,3$. Следовательно, уже после ста первых оборотов, т.е. по прошествии двух секунд $e^{-sht_1} = e^{-30}$, и указанными слагаемыми следует пренебречь.

Таким образом, колебания очень быстро примут установившийся характер и выражение для $K_i(\tau)$ окажется следующим

$$K_i(\tau) = \frac{A_i e^{-h\tau}}{2p_{1i}(\operatorname{ch} ht_1 - \cos p_{1i} t_1)} \left\{ (\cos p_{1i} t_1 - e^{-ht_1}) \times \right. \\ \left. \times \int_0^{t_1} e^{hu} q(u) \sin p_{1i}(\tau - u) du + \sin p_{1i} t_1 \int_0^{t_1} e^{hu} q(u) \cos p_{1i}(\tau - u) du \right\} + \\ + \frac{A_i e^{-h\tau}}{p_{1i}} \int_0^{\tau} e^{hu} q(u) \sin p_{1i}(\tau - u) du; \quad (\text{XIII.30})$$

для s -го оборота $t = (s-1)t_1 + \tau$, $0 \leq \tau < t_1$, причем выражение $K_i(\tau)$ не зависит от s

Как легко проверить, из выражения (XIII.30) следует, что

$$K_i(0) = K_i(t_1); \quad K_i'(0) = K_i'(t_1). \quad (\text{XIII.31})$$

Физически это означает, что прогиб и скорость колебаний любой точки лопатки в начале оборота и в конце равны друг другу. Выражение (XIII.30) можно было бы получить и непосредственно из уравнения (XIII.22), если рассматривать интервал времени, равный одному обороту и использовать условия (XIII.31) вместо нулевых начальных условий.

ХИИ.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ПАРЦИАЛЬНОМ ПОДВОДЕ ПАРА

В п. II.9 указывалось, что для повышения экономичности турбин при частичных нагрузках применяется парциальный подвод пара. При парциальном подводе (сопловом парораспределении) пар к лопаткам регулирующей ступени подводится только по части окружности, причем по мере роста нагрузки дуга подвода пара возрастает ступенчато. Процесс нагружения и разгрузки лопаток парциальных ступеней носит весьма сложный характер: в связи с перестройкой потока на границах дуги подвода аксиальная и тангенциальная составляющие силы, дей-

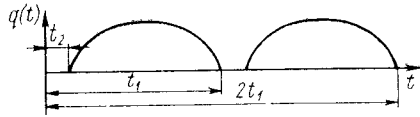


Рис. ХИИ 2 График изменения нагрузки при парциальном подводе пара

ствующей на лопатку, могут изменяться не вполне синхронно [153]; существует переходная область, в которой изменяются параметры потока; возникают определенные пульсации давления и при прохождении рабочими лопатками дуги окружности, где не осуществляется подвод пара. Кроме того, в ряде случаев при изучении высокочастотных колебаний лопаток регулирующих ступеней необходимо учитывать конечность скорости распространения возмущений как в потоке, так и в материале лопатки.

Для получения качественных результатов будем рассматривать упрощенную схему нагружения рабочей лопатки, при которой величина нагрузки на части окружности равна нулю, а затем возрастает от нулевого до максимального значения (рис. ХИИ.2). Конкретные законы нарастания нагрузки от нулевого значения до максимального будут рассмотрены ниже. Выражение для величины $K_i(\tau)$ в случае парциального подвода, изображенного на рис. ХИИ 2, примет следующий вид

$$K_i(\tau) = \frac{A_i e^{-h\tau}}{2p_{1i}(\operatorname{ch} ht_1 - \cos p_{1i}t_1)} \left[(\cos p_{1i}t_1 - e^{-ht_1}) \times \right. \\ \left. \int_{t_2}^{t_1} e^{hu} q(u) \sin p_{1i}(\tau - u) du + \right. \\ \left. + \sin p_{1i}t_1 \int_{t_2}^{t_1} e^{hu} q(u) \cos p_{1i}(\tau - u) du \right] + \Phi_i(\tau), \quad (\text{ХИИ.32})$$

где при $0 \leq \tau < t_2$ $\Phi_i(\tau) = 0$; при $t_2 \leq \tau < t_1$ $\Phi_i(\tau) = \frac{A_i e^{-h\tau}}{p_{1i}} \int_{t_2}^{\tau} e^{hu} q(u) \sin p_{1i}(\tau - u) du$.

Для вычисления величины $K_i(\tau)$ необходимо знать как максимальную величину $q(u)$, так и закон нарастания и убывания

$q(u)$ от нулевого до максимального значения. Рассмотрим два различных случая изменения нагрузки во времени.

Прямоугольная нагрузка. График изменения нагрузки во времени изображен на рис. II.45. Нагрузка равна нулю на определенной части дуги окружности, затем мгновенно возрастает до максимального постоянного значения и также мгновенно уменьшается до нулевого значения. Таким образом, закон изменения нагрузки следующий:

$$\text{при } 0 \leq \tau < t_2 \quad q(\tau) = 0; \quad \text{при } t_2 \leq \tau < t_1 \quad q(\tau) = q. \quad (\text{ХИИ.33})$$

До того как перейти к дальнейшим вычислениям, учтем следующее обстоятельство: лопатки регулирующих ступеней с малым отношением l/b имеют очень высокие собственные частоты. Поэтому резонансные (кратные числу оборотов) и не резонансные частоты отличаются друг от друга не более, чем на 1—2%. Так как разброс в частотах лопаток в соответствии с действующими в стационарном турбостроении нормами может в несколько раз превышать указанную величину, то следует иметь в виду, что на диске всегда имеются лопатки с частотами, кратными числу оборотов, т. е. работающие в резонансе. Рассматривая этот случай как наиболее опасный, полагаем

$$f_i = p_{1i}(2\pi) = kn,$$

где k — целое (k — кратность колебаний, т. е. число колебаний лопатки за оборот); n — частота вращения ротора турбины, об/с.

Учитывая малость h по сравнению с p_{1i} , считаем, что $p_{1i} = \sqrt{p_{1i}^2 - h^2} \approx p_{1i} = 2k\pi n$; так как $t_1 = 1/n$, то $p_{1i}t_1 = 2k\pi$ и, следовательно:

$$\cos p_{1i}t_1 = 1; \quad \sin p_{1i}t_1 = 0. \quad (\text{ХИИ.34})$$

Используя соотношения (ХИИ.33) и (ХИИ.34), преобразуем выражение (ХИИ.32) для $K_i(\tau)$ в случае резонансных колебаний при прямоугольной нагрузке:

$$K_i(\tau) = \frac{A_i q (1 - e^{-ht_1}) e^{-h\tau}}{2p_{1i}(\operatorname{ch} ht_1 - 1)} \int_{t_2}^{t_1} e^{hu} \sin p_{1i}(\tau - u) du + \\ + \frac{A_i q e^{-h\tau}}{p_{1i}} \int_{t_2}^{\tau} e^{hu} \sin p_{1i}(\tau - u) du \quad \text{при } t_2 \leq \tau < t_1; \quad (\text{ХИИ.35})$$

При $0 \leq \tau < t_2$ второе слагаемое равно нулю.

Так как имеют место соотношения:

$$\int_{t_2}^{t_1} e^{hu} \cos p_{1i}u du = \frac{e^{ht_1}}{h^2 + p_{1i}^2} [h(1 - e^{-h(t_1-t_2)}) \cos p_{1i}t_2 - \\ - p_{1i}e^{-h(t_1-t_2)} \sin p_{1i}t_2];$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_2}^{t_1} e^{hu} \sin p_{1i} u \, du = \\
& = \frac{e^{ht_1}}{h^2 + p_{1i}^2} [-h e^{-h(t_1-t_2)} \sin p_{1i} t_2 - p_{1i} (1 - e^{-h(t_1-t_2)} \cos p_{1i} t_2)]; \\
& \int_{t_2}^{\tau} e^{hu} \cos p_{1i} u \, du = \\
& = \frac{e^{h\tau}}{h^2 + p_{1i}^2} [h (\cos p_{1i} \tau - e^{-h(\tau-t_2)} \cos p_{1i} t_2) + \\
& + p_{1i} (\sin p_{1i} \tau - e^{-h(\tau-t_2)} \sin p_{1i} t_2)]; \\
& \int_{t_2}^{\tau} e^{hu} \sin p_{1i} u \, du = \\
& = \frac{e^{h\tau}}{h^2 + p_{1i}^2} [h (\sin p_{1i} \tau - e^{-h(\tau-t_2)} \sin p_{1i} t_2) - \\
& - p_{1i} (\cos p_{1i} \tau - e^{-h(\tau-t_2)} \cos p_{1i} t_2)]; \\
& (1 - e^{-ht_1}) / [2 (\operatorname{ch} ht_1 - 1)] = 1 / (e^{ht_1} - 1),
\end{aligned}$$

то выражение (XIII.35) можно преобразовать к виду (пренебрегаем величиной h^2 по сравнению с p_{1i}^2 , т. е. считаем $p_i \approx p_{1i}$)

$$\begin{aligned}
K_i(\tau) = & \frac{A_i q e^{ht_1}}{p_i^3 (e^{ht_1} - 1)} \{ \sin p_i \tau [h - e^{h\beta} (h \cos p_i t_2 + p_i \sin p_i t_2)] + \\
& + \cos p_i \tau [p_i - e^{h\beta} (p_i \cos p_i t_2 - h \sin p_i t_2)] \} e^{-h\tau} + \Phi_i, \quad (\text{XIII.35a})
\end{aligned}$$

где при $0 \leq \tau < t_2$ $\beta = -(t_1 - t_2)$, $\Phi_i = 0$; при $t_2 \leq \tau < t_1$ $\beta = t_2$, $\Phi_i = A_i q / p_i^2$.

Окончательное выражение для $K_i(\tau)$ можно записать в следующем виде:

$$K_i(\tau) = \frac{A_i q e^{-h\tau}}{p_i^2 (1 - e^{-ht_1})} \sqrt{2e^{h\beta} (\operatorname{ch} h\beta - \cos p_i t_2)} \sin(p_i \tau + \theta_i) + \Phi_i, \quad (\text{XIII.35б})$$

где

$$\operatorname{tg} \theta_i = \frac{p_i - e^{h\beta} (p_i \cos p_i t_2 - h \sin p_i t_2)}{h - e^{h\beta} (h \cos p_i t_2 + p_i \sin p_i t_2)},$$

причем при $0 \leq \tau < t_2$ $\beta = -(t_1 - t_2)$, $\Phi_i = 0$; при $t_2 \leq \tau < t_1$ $\beta = t_2$, $\Phi_i = A_i q / p_i^2$.

В общем случае, как нетрудно показать с помощью аналогичных, хотя и несколько более громоздких преобразований, выражение (XIII.32) для $K_i(\tau)$ примет следующий вид:

$$K_i(\tau) = \frac{q A_i e^{ht_1}}{2 p_i^3 (\operatorname{ch} ht_1 - \cos p_i t_1)} (a_i \cos p_i \tau + b_i \sin p_i \tau) e^{-h\tau} + \Phi_i, \quad (\text{XIII.36})$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_i = & p_i \left[\lambda [p_i \cos p_i (\mu - t_1) - h \sin p_i (\mu - t_2)] - \right. \\ & - e^{-ht_1} (p_i \cos p_i t_1 - h \sin p_i t_1) \left. \right] + \\ & + \eta (p_i \cos p_i t_2 - h \sin p_i t_2); \\ b_i = & h \left[\lambda [h \cos p_i (\mu - t_2) - p_i \sin p_i (\mu - t_2)] - \right. \\ & - e^{-ht_1} (h \cos p_i t_1 - p_i \sin p_i t_1) \left. \right] + \\ & + \eta (h \cos p_i t_2 + p_i \sin p_i t_2), \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII.37})$$

причем при $0 \leq \tau < t_2$ $\lambda = -e^{-h(t_1-t_2)}$, $\mu = t_1$, $\eta = e^{-h(t_1-t_2)}$, $\Phi_i = 0$; при $t_2 \leq \tau < t_1$ $\lambda = e^{-h(t_1-t_2)}$, $\mu = -t_1$, $\eta = e^{-ht}$, $\Phi_i = q A_i / p_i^2$.

С учетом полученных соотношений выражение (XIII.3) для прогиба лопатки окажется следующим:

$$V(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{q A_i e^{ht_1}}{2 p_i^3 (\operatorname{ch} ht_1 - \cos p_i t_1)} \times \right.$$

$$\left. \times (a_i \cos p_i \tau + b_i \sin p_i \tau) e^{-h\tau} Z_i(\xi) \right] + Y(\xi), \quad (\text{XIII.38})$$

где при $0 \leq \tau < t_2$ $Y(\xi) = 0$; при $t_2 \leq \tau < t_1$ $Y(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} (q A_i / p_i^2) Z_i(\xi)$; a_i и b_i определяются по формулам (XIII.37).

Таким образом, на участке окружности, не занятой соплами ($0 \leq \tau < t_2$), имеют место гармонические колебания.

На участке подвода пара деформация лопатки складывается из двух составляющих: переменной во времени (гармонические колебания) и постоянной. Покажем, что последняя составляющая представляет собой статический прогиб лопатки.

Действительно, при статическом изгибе выполняется соотношение

$$(EJ/l^4) v_{\text{ст}}^{\text{IV}}(\xi) = \varphi(\xi), \quad (\text{XIII.39})$$

где $v_{\text{ст}}(\xi)$ — прогиб упругой оси лопатки; $\varphi(\xi)$ — интенсивность сил, действующего на лопатку.

Будем искать решение уравнения (XIII.39) в виде

$$v_{\text{ст}} = \sum_{i=1}^{\infty} B_i Z_i(\xi),$$

где $Z_i(\zeta)$ — решения дифференциального уравнения (XI 12а), т. е. собственные формы колеблющейся лопатки, удовлетворяющие граничным условиям на обоих концах лопатки. Отсюда следует, что и $v_{ст}$ также удовлетворяет граничным условиям. Разложим $\varphi(\zeta)$ в ряд по собственным формам

$$\varphi(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i Z_i(\zeta)$$

Умножив обе части формулы на $Z_i(\zeta)$ и проинтегрировав от нуля до единицы, на основании (XI 38) найдем

$$H_i = \frac{\int_0^1 \varphi(\zeta) Z_i(\zeta) d\zeta}{\int_0^1 Z_i^2(\zeta) d\zeta}.$$

Подставив в (XIII 39) вместо $v_{ст}(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$ их разложения в ряды и имея в виду, что согласно (XI 39) $Z_i^{IV}(\zeta) = \rho_i^4 Z_i(\zeta)$, где $\rho_i^4 = p_i^2 \gamma F l^4 / (g E J)$, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(p_i^2 B_i - \frac{g}{\gamma F} H_i \right) Z_i(\zeta) = 0$$

Равенство можно удовлетворить, положив

$$B_i = H_i g / (\gamma F p_i^2).$$

Если нагрузка равномерна по высоте лопатки, то $\varphi(\zeta) = q$ и

$$B_i = \frac{gq}{\gamma F p_i^2} \frac{\int_0^1 Z_i(\zeta) d\zeta}{\int_0^1 Z_i^2(\zeta) d\zeta}.$$

Имея в виду выражение (XIII 25) для A_i , окончательно найдем

$$B_i = q A_i / p_i^2.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{q A_i}{p_i^2} Z_i(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i Z_i(\zeta) = v_{ст}(\zeta).$$

Таким образом, выражение для прогиба лопатки представится в виде

$$\left. \begin{aligned} V(\zeta, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q A_i e^{h t_1}}{2 p_i^3 (\operatorname{ch} h t_1 - \cos p_i t_1)} \times \\ &\times (a_i \cos p_i \tau + b_i \sin p_i \tau) e^{-h \tau} Z_i(\zeta) \quad \text{при } 0 \leq \tau < t_2, \\ V(\zeta, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q A_i e^{h t_1}}{2 p_i^3 (\operatorname{ch} h t_1 - \cos p_i t_1)} \\ &\times (a_i \cos p_i \tau + b_i \sin p_i \tau) e^{-h \tau} Z_i(\zeta) + v_{ст}(\zeta) \\ &\quad \text{при } t_2 \leq \tau < t_1, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII } 40)$$

причем a_i и b_i определяются по (XIII 37).

Учитывая малую величину демпфирующих сил $[1 - \exp(-h t_1) \approx \approx h t_1]$, резонансное слагаемое (XIII.35б), входящее в формулу (XIII.40), окажется много больше остальных слагаемых, в результате чего приближенно можно считать

$$\left. \begin{aligned} V(\zeta, \tau) &= K_i(\tau) Z_i(\zeta) = \\ &= \frac{A_i q}{p_i^2 (1 - e^{-h t_1})} \sqrt{2 e^{h \beta} (\operatorname{ch} h \beta - \cos p_i t_2)} \\ &\times \sin(p_i \tau + \theta_i) e^{-h \tau} Z_i(\zeta) \\ &\quad \text{при } 0 \leq \tau < t_2, \text{ причем } \beta = -(t_1 - t_2); \\ V(\zeta, \tau) &= \frac{A_i q}{p_i^2 (1 - e^{-h t_1})} \sqrt{2 e^{h \beta} (\operatorname{ch} h \beta - \cos p_i t_2)} \\ &\times \sin(p_i \tau + \theta_i) e^{-h \tau} Z_i(\zeta) + v_{ст}(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII } 41)$$

при $t_2 \leq \tau < t_1$, причем $\beta = t_2$; величина θ_i определяется по формуле (XIII 35б).

Введем в рассмотрение степень парциальности $\varepsilon = (t_1 - t_2)/t_1$. Учитывая, что $t_2 = (1 - \varepsilon) t_1$, для резонансного случая получим $\cos p_i t_2 = \cos 2k\pi\varepsilon$, $\sin p_i t_2 = \sin 2k\pi\varepsilon$. Тогда

$$K_i(\tau) = N_i e^{-h \tau} \sin(p_i \tau + \theta_i), \quad (\text{XIII } 42)$$

где

$$N_i = \frac{q A_i}{p_i^2 (1 - e^{-h t_1})} \sqrt{2 e^{h \beta} (\operatorname{ch} h \beta - \cos 2k\pi\varepsilon)};$$

$$\operatorname{tg} \theta_i = \frac{p_i - e^{h t_1} (p_i \cos 2k\pi\varepsilon + h \sin 2k\pi\varepsilon)}{h - e^{h \beta} (h \cos 2k\pi\varepsilon - p_i \sin 2k\pi\varepsilon)},$$

при $0 \leq \tau < t_2$ $\beta = -\varepsilon t_1$; при $t_2 \leq \tau < t_1$ $\beta = t_1 (1 - \varepsilon)$.

Так как при $h\beta \ll 1$ $\exp(h\beta) \approx 1 + h\beta$, $\cos h\beta \approx 1$ (с точностью до членов $h^2\beta^2$), то максимального значения величина N_i достигает при условии:

$$\cos 2k\pi\varepsilon = -1. \quad (\text{XIII.43})$$

Из формулы (XIII.43) следует, что $2k\pi\varepsilon = (2j + 1)\pi$, где j — целое. Так как $\varepsilon = (t_1 - t_2)/t_1$, $f = kn$, $k't_1$, то получим

$$f_i(t_1 - t_2) = j + 0,5. \quad (\text{XIII.44})$$

Таким образом, амплитуда колебаний будет максимальной в том случае, когда число циклов, совершаемых лопаткой за время прохождения участка подвода пара, будет равно целому числу с половиной. Физически это объясняется тем, что при прямоугольной нагрузке положительная работа совершается в течение половины периода при движении лопатки в направлении действия нагрузки. Во время второй половины периода нагрузка тормозит колебания, поэтому максимальная работа будет произведена именно в том случае, когда за время действия нагрузки лопатка совершит целое число колебаний с половиной (см. рис. II.47).

Напряжения в лопатке достигают максимума вблизи точек A или B (конец и начало нагружения), так как после указанных точек колебания, как следует из формулы (XIII.41), являются затухающими. Расстояние от точки A или B до места, где деформация станет максимальной, определяется временем, необходимым для того, чтобы выполнялось равенство $|\sin(p_i\tau - \theta_i)| = 1$.

При $f_i(t_1 - t_2) = j + 0,5$ и $h \rightarrow 0$ $|\sin(p_i\tau - \theta_i)| = 1$ в точках A ($\tau = 0$) и B ($\tau = t_2$). Учитывая малость h , будем считать, что и при конечном значении h наибольшая деформация также имеет место в этих точках.

Приняв $\cos 2k\pi\varepsilon = -1$, сравним динамические напряжения, пропорциональные величине $K_i(\tau)$, в точках A и B . Так как $|2e^{h\beta}(\operatorname{ch} h\beta + 1) - e^{h\beta} + 1|$ и $t_2 = (1 - \varepsilon)t_1$, то из (XIII.42) получаем

$$\frac{K_i(0)}{K_i(t_2)} = \frac{1 + e^{-h\varepsilon t_1}}{1 + e^{-h(1-\varepsilon)t_1}}.$$

Таким образом, $K_i(0) > K_i(t_2)$, если $1 - 2\varepsilon > 0$, т. е. $\varepsilon < 0,5$. Как видно, с увеличением степени парциальности амплитуда колебаний в момент выхода из-под нагрузки падает, а в момент входа под нагрузку — увеличивается.

Зная $V(\xi, \tau)$, найдем напряжения в лопатке в моменты времени A и B (считая, что при этом $|\sin(p_i\tau - \theta_i)| = 1$):

$$\sigma = \frac{EJ}{l^2W} \frac{\partial^2 V(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}. \quad (\text{XIII.45})$$

Наибольшие напряжения в лопатке постоянного сечения имеют место в корневом сечении. Используя равенства $p_i^2 = \rho_i^4 EJg (Fl^4\gamma)$, $Z_i'(0) = \rho_i^2$ и формулу (XIII.25), получим

$$\frac{A_i Z_i(0)}{\rho_i^2} = \frac{l^4}{EJ} C_i, \quad (\text{XIII.46})$$

где

$$C_i = \frac{\int_0^1 Z_i(\xi) d\xi}{\rho_i^2 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi}.$$

Заменяя в (XIII.45) $V(\xi, \tau)$ его выражением (XIII.41), $K_i(\tau)$ — выражением (XIII.42), учитывая соотношение (XIII.46) и приняв $\cos 2k\pi\varepsilon = -1$, т. е. $\sqrt{2e^{h\beta}(\operatorname{ch} h\beta + 1)} = e^{h\beta} + 1$, получим следующие выражения для напряжений:

в момент времени A

$$\sigma_i(0) = \frac{1 + e^{-h\varepsilon t_1}}{1 - e^{-ht_1}} \frac{ql^2 C_i}{W}, \quad (\text{XIII.47})$$

в момент времени B

$$\sigma_i(0) = \frac{1 + e^{-h(1-\varepsilon)t_1}}{1 - e^{-ht_1}} \frac{ql^2 C_i}{W} + \sigma_{ст}, \quad (\text{XIII.47a})$$

где $\sigma_{ст}$ — статические напряжения в корневом сечении лопатки от равномерной нагрузки q ,

$$\sigma_{ст} = \frac{EJ}{Wl^2} \frac{d^2 v_{ст}(0)}{d\xi^2} = \frac{ql^2}{2W}.$$

Численные значения C_i для первых нескольких тонов колебаний приведены в табл. II.4, из которой следует, что возбудимость высших собственных форм резко уменьшается. Рассмотрим поэтому лишь колебания первого тона ($i = 1$), для которого $C_1 = 0,444$. Учитывая малость величины ht_1 , получим:

$$1 + \exp(-h\varepsilon t_1) \approx 1 - \exp[-h(1-\varepsilon)t_1] \approx 2; \quad 1 - \exp(-ht_1) \approx ht_1.$$

Кроме того, имея в виду, что $ht_1 = \delta f_1 t_1 = \delta k$, получим следующие формулы для напряжений:

в момент времени A

$$\sigma_1(0) = \frac{2ql^2}{Wk\delta} C_1 = \sigma_{ст} \frac{4C_1}{k\delta} = \frac{1,8}{k\delta} \sigma_{ст}; \quad (\text{XIII.48})$$

в момент времени B

$$\sigma_1(0) = [1 + 1,8/(k\delta)] \sigma_{ст}. \quad (\text{XIII.48a})$$

Например, при $f = 1000$ Гц, $n = 50$ Гц, $\delta = 0,01$, получим $k\delta = 0,2$ и $\sigma_1(0) = 10\sigma_{ст}$, т. е. динамические напряжения в 10 раз больше статических.

Формулы (XIII.48) или (XIII.48a) могут быть легко получены в том случае, если пренебречь изменением амплитуды колебаний лопатки за оборот.

Используя выражение (XIII.12) для прогиба лопатки, найдем максимальную работу возмущающей нагрузки (XIII.33) за оборот R'_1 , равную, в соответствии со сказанным выше, работе за половину периода колебаний лопатки

$$R'_1 = A_l q l \int_0^1 Z_l(\xi) d\xi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos p_l t d(p_l t) = 2A_l q l \int_0^1 Z_l(\xi) d\xi.$$

Так как при принятых предположениях работа демпфирующих сил за оборот R'_2 в k раз больше работы демпфирующих сил за период колебаний, то, используя формулу (XIII.14), найдем

$$R'_2 = A_l^2 \delta \frac{\gamma}{g} F l p_l^2 k \int_0^1 Z_l^2(\xi) d\xi.$$

Приравняв выражения R'_1 и R'_2 , найдем

$$A_l = \frac{2qg}{\delta \gamma F k p_l^2} \frac{\int_0^1 Z_l(\xi) d\xi}{\int_0^1 Z_l^2(\xi) d\xi}.$$

Поскольку

$$\sigma'_l(0) = Z''_l(0) E J A_l / (l^2 W) = p_l^2 E J A_l / (l^2 W) \text{ и } p_l^2 = p_l^4 E J g_l (F l^4 \gamma),$$

то

$$\sigma'_l(0) = \frac{2ql^2}{\delta k W} \frac{\int_0^1 Z_l(\xi) d\xi}{p_l^2 \int_0^1 Z_l^2(\xi) d\xi} = \frac{2ql^2}{\delta k W} C_l = \frac{4}{k\delta} \sigma_{ст} C_l,$$

а максимальные напряжения в корневом сечении

$$\sigma_l(0) = \sigma'_l(0) + \sigma_{ст} = \left(1 + \frac{4}{k\delta} C_l\right) \sigma_{ст}.$$

В частности, при колебаниях первого тона

$$\sigma_l(0) = [1 + 1,8/(k\delta)] \sigma_{ст},$$

что совпадает с формулой (XIII.48a),

Если турбина работает с открытыми регулирующими клапанами, а расстояния между сегментами сопел достаточно велики (см. п. II.9), то можно считать, что на протяжении оборота рабочие лопатки регулирующей ступени s раз подвергаются нагрузкам, изменяющимся по прямоугольному закону. Повторяя приведен-

ные выше выкладки, легко показать, что максимальные напряжения в лопатках в этом случае будут определяться формулами:

$$\sigma_l(0) = \left(1 + \frac{4s}{k\delta} C_l\right) \sigma_{ст}; \quad \sigma_1(0) = \left(1 + \frac{1,8s}{k\delta}\right) \sigma_{ст}. \quad (\text{XIII.49})$$

Следует, однако, учитывать, что формулы (XIII.49) определяют верхнюю границу напряжений в лопатках, для достижения которой необходимо, чтобы на протяжении каждой дуги подвода пара лопатка совершала целое число колебаний с половиной, а фаза колебаний лопатки при подходе к каждой дуге подвода была одинаковой

Трапецеидальная нагрузка. Рассмотрим более близкий к действительности трапецеидальный закон изменения нагрузки во времени — рис. II.48. Зависимость нагрузки от времени имеет в данном случае следующий вид:

$$\begin{aligned} 0 \leq \tau < t_2 & & q(\tau) &= 0; \\ t_2 \leq \tau < t_2 + \Delta & & q(\tau) &= q(t_2 - t_2) \Delta; \\ t_2 + \Delta \leq \tau < t_1 - \Delta & & q(\tau) &= q; \\ t_1 - \Delta \leq \tau < t_1 & & q(\tau) &= q(t_1 - \tau)/\Delta. \end{aligned}$$

В соответствии с зависимостью $q(\tau)$ от времени, интегралы, входящие в выражение (XIII.32) для $K_l(\tau)$, могут быть разбиты на сумму трех интегралов (как и ранее, пренебрегаем членами h^2 по сравнению с p_l^2 , т. е. считаем $p_{l1} \approx p_l$):

$$\begin{aligned} \int_{t_2}^{t_1} e^{hu} q(u) \sin p_l(\tau - u) du &= \frac{q}{\Delta} \int_{t_2}^{t_2 + \Delta} e^{hu} (u - t_2) \sin p_l(\tau - u) du + \\ &+ q \int_{t_2 + \Delta}^{t_1 - \Delta} e^{hu} \sin p_l(\tau - u) du + \frac{q}{\Delta} \int_{t_1 - \Delta}^{t_1} e^{hu} (t_1 - u) \sin p_l(\tau - u) du. \end{aligned}$$

Аналогично может быть представлен и интеграл $\int_{t_2}^{t_1} e^{hu} q(u) \times \cos p_l(\tau - u) du$. Произведя интегрирование, получим следующее выражение для первого слагаемого $K_l(\tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{A_l e^{-h\tau}}{2p_l (\operatorname{ch} ht_1 - \cos p_l t_1)} &\left[(\cos p_l t_1 - e^{-ht_1}) \int_{t_2}^{t_1} e^{hu} q(u) \sin p_l(\tau - u) du + \right. \\ &\left. + \sin p_l t_1 \int_{t_2}^{t_1} e^{hu} q(u) \cos p_l(\tau - u) du \right] = \\ &= \frac{q A_l e^{ht_1}}{2\Delta p_l^4 (\operatorname{ch} ht_1 - \cos p_l t_1)} (a_l \cos p_l \tau + b_l \sin p_l \tau) e^{-h\tau}, \quad (\text{XIII.50}) \end{aligned}$$

где a_l и b_l — коэффициенты, не зависящие от τ .

Найдем для каждого участка нагрузки выражение для $\Phi_i(\tau)$ в формуле (XIII.32) — см. рис. II.48.

Для участка I: при $0 \leq \tau < t_2$ $q(\tau) = 0$, $\Phi_i^I(\tau) = 0$.

Для участка II: при $t_2 \leq \tau < t_2 + \Delta$ $q(\tau) = q(\tau - t_2)\Delta$,

$$\begin{aligned}\Phi_i^{II}(\tau) &= \frac{qA_i}{\Delta p_i} e^{-h\tau} \int_{t_2}^{\tau} e^{hu} (u - t_2) \sin p_i(\tau - u) du = \\ &= \frac{qA_i}{\Delta p_i^3} (a_i^{II} \cos p_i \tau + b_i^{II} \sin p_i \tau) e^{-h\tau} + \frac{qA_i}{\Delta p_i^2} \left(\tau - t_2 - \frac{\cos \alpha}{p_i} \right),\end{aligned}\quad (\text{XIII.51})$$

где $\cos \alpha \approx 2h/p_i$.

Для участка III: при $t_2 + \Delta \leq \tau < t_1 - \Delta$ $q(\tau) = q$,

$$\begin{aligned}\Phi_i^{III}(\tau) &= \frac{A_i}{p_i} e^{-h\tau} \left[\frac{q}{\Delta} \int_{t_2}^{t_2+\Delta} e^{hu} (u - t_2) \sin p_i(\tau - u) du + \right. \\ &\quad \left. + q \int_{t_2+\Delta}^{\tau} e^{hu} \sin p_i(\tau - u) du \right] = \\ &= \frac{qA_i}{\Delta p_i^3} (a_i^{III} \cos p_i \tau + b_i^{III} \sin p_i \tau) e^{-h\tau} + \frac{qA_i}{p_i^2}.\end{aligned}\quad (\text{XIII.52})$$

Для участка IV: при $t_1 - \Delta \leq \tau < t_1$ $q(\tau) = q(t_1 - \tau)\Delta$,

$$\begin{aligned}\Phi_i^{IV}(\tau) &= \frac{A_i}{p_i} e^{-h\tau} \left[\frac{q}{\Delta} \int_{t_2}^{t_2+\Delta} e^{hu} (u - t_2) \sin p_i(\tau - u) du + \right. \\ &\quad \left. + q \int_{t_2+\Delta}^{t_1-\Delta} e^{hu} \sin p_i(\tau - u) du + \frac{q}{\Delta} \int_{t_1-\Delta}^{\tau} e^{hu} (t_1 - u) \sin p_i(\tau - u) du \right] = \\ &= \frac{qA_i}{\Delta p_i^3} (a_i^{IV} \cos p_i \tau + b_i^{IV} \sin p_i \tau) e^{-h\tau} + \frac{qA_i}{\Delta p_i^2} \left(t_1 - \tau + \frac{\cos \alpha}{p_i} \right),\end{aligned}\quad (\text{XIII.53})$$

где $a_i^{II}, \dots, b_i^{IV}$ — коэффициенты, не зависящие от τ .

В результате подстановки найденных значений в выражение для прогиба лопатки (XIII.3) найдем:

$$V(\zeta, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} (P_i \cos p_i \tau + Q_i \sin p_i \tau) e^{-h\tau} Z_i(\zeta) + \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i Z_i(\zeta), \quad (\text{XIII.54})$$

где

$$P_i = \lambda a_i, \quad Q_i = \lambda b_i, \quad \Psi_i = 0 \quad \text{при } 0 \leq \tau < t_2;$$

$$P_i = \lambda a_i + \mu a_i^{II}, \quad Q_i = \lambda b_i + \mu b_i^{II}, \quad \Psi_i = \frac{qA_i}{\Delta p_i^2} \left(\tau - t_2 - \frac{\cos \alpha}{p_i} \right)$$

при $t_2 \leq \tau < t_2 + \Delta$;

$$P_i = \lambda a_i + \mu a_i^{III}, \quad Q_i = \lambda b_i + \mu b_i^{III}, \quad \Psi_i = qA_i/p_i^2$$

при $t_2 + \Delta \leq \tau < t_1 - \Delta$;

$$P_i = \lambda a_i + \mu a_i^{IV}, \quad Q_i = \lambda b_i + \mu b_i^{IV}, \quad \Psi_i = \frac{qA_i}{\Delta p_i^2} \left(t_1 - \tau - \frac{\cos \alpha}{p_i} \right)$$

при $t_1 - \Delta \leq \tau < t_1$;

$$\lambda = \frac{qA_i e^{ht_1}}{2\Delta p_i^1 (\cosh ht_1 - \cos p_i t_1)}, \quad \mu = \frac{qA_i}{\Delta p_i^3}.$$

Рассмотрим случай резонанса, при котором $f_i = kn$, $p_i = 2\pi kn$, т. е. $\cos p_i t_1 = 1$, $\sin p_i t_1 = 0$.

Из формул (XIII.50) — (XIII.53) получим выражения для коэффициентов P_i и Q_i резонансного слагаемого, входящего в первую сумму формулы (XIII.54):

$$\left. \begin{aligned}P_i &= \frac{qA_i e^{ht_1}}{\Delta p_i^3 (e^{ht_1} - 1)} \{ \cos \alpha + a \cos(p_i t_2 - \alpha) - \\ &\quad - b \cos[p_i(t_2 + \Delta) - \alpha] - c \cos(p_i \Delta + \alpha) \}; \\ Q_i &= \frac{qA_i e^{ht_1}}{\Delta p_i^3 (e^{ht_1} - 1)} \{ -\sin \alpha + a \sin(p_i t_2 - \alpha) - \\ &\quad - b \sin[p_i(t_2 + \Delta) - \alpha] + c \sin(p_i \Delta + \alpha) \},\end{aligned}\right\} \quad (\text{XIII.55})$$

где

$$a = e^{-h(t_1-t_2)}, \quad b = e^{-h(t_1-t_2-\Delta)}, \quad c = e^{-h\Delta} \quad \text{при } 0 \leq \tau < t_2;$$

$$a = e^{ht_2}, \quad b = e^{-h(t_1-t_2-\Delta)}, \quad c = e^{-h\Delta} \quad \text{при } t_2 \leq \tau < t_2 + \Delta;$$

$$a = e^{ht_2}, \quad b = e^{h(t_2+\Delta)}, \quad c = e^{-h\Delta} \quad \text{при } t_2 + \Delta \leq \tau < t_1 - \Delta;$$

$$a = e^{ht_2}, \quad b = e^{h(t_2+\Delta)}, \quad c = e^{h(t_1-\Delta)} \quad \text{при } t_1 - \Delta \leq \tau < t_1.$$

Кроме того, учтем, что из-за малости ht_1 $\exp(ht_1) - 1 \approx ht_1$.

Так как резонансное слагаемое будет много больше остальных, то практически можно считать:

$$\left. \begin{aligned}V(\zeta, \tau) &= K_i(\tau) Z_i(\zeta) - \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i Z_i(\zeta); \\ K_i(\tau) &= (P_i \cos p_i \tau - Q_i \sin p_i \tau) e^{-h\tau} - \\ &\quad - N_i e^{-h\tau} \sin(p_i \tau + \zeta_i),\end{aligned}\right\} \quad (\text{XIII.56})$$

где $N_i = \sqrt{P_i^2 + Q_i^2}$; $\operatorname{tg} 0 = P_i/Q_i$; причем P_i и Q_i определяются по выражениям (XIII.55), а Ψ_i — из (XIII.54).

Наибольшую деформацию лопатка может иметь только вблизи точек A или B (см. рис. II.48). Расстояние от точки A или B до точки, где деформация станет максимальной, определяется

временем, необходимым для того, чтобы выполнялось равенство $|\sin(p_i \tau + \theta_i)| = 1$. Обычно соотношения таковы, что расстояние от точки A или B до места на участке I или III , где деформация будет максимальной, очень невелико и приближенно можно принять, что максимальные деформации возникают в точках A или B . В других местах на участках I и III деформация будет меньше, так как на этих участках колебания являются затухающими. На участках II и IV максимальные деформации будут постепенно убывать или нарастать до значений в точках A или B . Поэтому достаточно рассмотреть деформацию лопатки на участках I и III вблизи гочек A и B . Выражение $V(\xi, \tau)$ на этих участках может быть представлено в виде

$$V(\xi, \tau) = K_i(\tau) Z_i(\xi) + Y(\xi); \quad K_i(\tau) = N_i e^{h\tau} \sin(p_i \tau + \theta_i), \quad (XIII.57)$$

где

$$N_i = \frac{2qe^{ht_1} A_i}{\Delta p_i^3 (e^{ht_1} - 1)} \times \\ \times \sqrt{e^{h\beta} [ch h(\beta + \Delta) - \cos p_i(t_2 + \Delta)] (ch h\Delta - \cos p_i \Delta)}, \quad (XIII.58) \\ \cos \alpha + e^{h\beta} \cos(p_i t_2 - \alpha) - e^{h(\beta + \Delta)} \cos[p_i(t_2 + \Delta) - \alpha] - \\ - e^{-h\Delta} \cos(p_i \Delta + \alpha) \\ \operatorname{tg} \theta_i = \frac{\sin \alpha + e^{h\beta} \sin(p_i t_2 - \alpha) - e^{h(\beta + \Delta)} \sin[p_i(t_2 + \Delta) - \alpha] - \\ - e^{-h\Delta} \sin(p_i \Delta + \alpha)}{\sin \alpha + e^{h\beta} \sin(p_i t_2 - \alpha) - e^{h(\beta + \Delta)} \sin[p_i(t_2 + \Delta) - \alpha] - \\ - e^{-h\Delta} \sin(p_i \Delta + \alpha)};$$

при $0 \leq \tau < t_2$ $\beta = -(t_1 - t_2)$, $Y(\xi) = 0$; при $t_2 + \Delta \leq \tau < t_1 - \Delta$ $\beta = t_2$, $Y(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} (qA_i/p_i^2) Z_i(\xi) = v_{i1}(\xi)$, как было показано выше.

При $\Delta \rightarrow 0$ $ch h\Delta - \cos p_i \Delta \approx 0,5 (h^2 \Delta^2 + p_i^2 \Delta^2) \approx 0,5 p_i^2 \Delta^2$ и формула (XIII.58) для N_i переходит в формулу (XIII.42), полученную при действии прямоугольной нагрузки.

Рассмотрим изменение амплитуды колебаний N_i в зависимости от геометрических размеров дуги подвода пара, т. е. от величин Δ и $t_1 - t_2 - 2\Delta$. Из формулы (XIII.58) следует, что подкоренное выражение достигает максимума при условии:

$$\cos p_i(t_2 + \Delta) = -1; \quad \cos p_i \Delta = -1$$

или

$$p_i(t_2 + \Delta) = 2\pi(s + 0,5), \quad p_i \Delta = 2\pi(j + 0,5), \quad (XIII.59)$$

где s, j — целые.

Так как при резонансе $p_i = 2\pi f_i = 2\pi k/t_1$, то выполнение условий (XIII.59) означает справедливость следующих соотношений

$$f_i \Delta = j + 0,5; \quad f_i t_2 = s + j, \quad f_i(t_1 - t_2 - 2\Delta) = k - s - j - 1. \quad (XIII.60)$$

Таким образом, максимального значения подкоренное выражение достигает в том случае, когда за время прохождения участка полной нагрузки (а также участка без нагрузки) лопатка совершает целое число колебаний, а за время нагружения или разгрузки — целое число колебаний с половиной. Введя обозначение $x = f_i \Delta$, найдем, что последовательные максимумы подкоренного выражения будут иметь место при условиях $x = 0,5; 1,5; 2,5$ и т. д. Так как величина участка нагружения Δ входит и в знаменатель формулы (XIII.58), то максимальные значения резонансной амплитуды N_i будут достигаться при несколько меньших значениях x , чем указывалось выше: $x = 0,364; 1,466; 2,48; 3,485$ и т. д. Как видно, максимальное различие имеет место в том случае, когда на участке нагружения лопатка совершает меньше, чем одно колебание. В п. II.9 показано, что если под полной нагрузкой лопатка совершает целое число колебаний, то работа возмущающих сил, которой пропорциональна величина N_i , при $x = 0,364$ примерно на 14% превосходит работу возмущающих сил при $x = 0,5$.

Так как значения резонансных амплитуд, вычисленные при выполнении условий (XIII.60), оказываются близкими к максимальным, в дальнейшем будем считать, что эти условия определяют максимальные динамические напряжения в лопатках под действием грапецидальной нагрузки.

Сравним переменную составляющую деформации в гочках A и B , считая при этом, что $|\sin(p_i \tau + \theta_i)| = 1$. Имея в виду, что

$$\sqrt{e^{h\beta} [ch h(\beta + \Delta) + 1] (ch h\Delta + 1)} = 0,5[e^{h(\beta + \Delta)} + 1](1 + e^{-h\Delta}),$$

из формул (XIII.57) и (XIII.58) получим

$$\frac{K_i(0)}{K_i(t_2 + \Delta)} = \frac{1 + e^{-h(t_1 - t_2 - 2\Delta)}}{1 + e^{-h(t_2 + \Delta)}}.$$

Отсюда следует, что $K_i(0) > K_i(t_2 + \Delta)$, если $t_2 > t_1 - t_2 - 2\Delta$; $K_i(0) < K_i(t_2 + \Delta)$, если $t_2 < t_1 - t_2 - 2\Delta$.

Таким образом, если дуга окружности, на которой лопатка испытывает полную нагрузку, меньше, чем свободная от нагрузки дуга, то наибольшая амплитуда колебаний будет достигаться при выходе из-под нагрузки в точке A (см. рис. II.48). В противном случае наибольшая амплитуда будет иметь место в точке B .

Выражения для напряжений в корневом сечении лопатки могут быть получены также, как и при рассмотрении прямоугольной нагрузки. При выполнении условий (XIII.60) и использовании формулы (XIII.46), получим:

в момент времени A

$$\sigma_i(0) = \frac{[1 + e^{-h(t_1 - t_2 - 2\Delta)}] (1 + e^{-h\Delta})}{\Delta p_i (1 - e^{-ht_1})} \frac{ql^2}{W} C_i,$$

в момент времени B

$$\sigma_i(0) = \frac{[1 + e^{-h(t_2 + \Delta)}] (1 + e^{-h\Delta})}{\Delta p_i (1 - e^{-ht_1})} \frac{ql^2}{W} C_i + \sigma_{ct}.$$

Так как при возрастании номера собственной формы численные значения коэффициентов C_i уменьшаются, а собственные частоты увеличиваются, то рассмотрим лишь колебания первого тона (1).

Выше было показано, что $qI^2C_1 W = 0,9\sigma_{cr}$, поэтому выражения для напряжений примут вид

$$\sigma_1(t) = \frac{[1 - e^{-h(t_1 - t_2 - 2\Delta)}](1 - e^{-h\Delta})}{\lambda p_1(1 - e^{-ht_1})} 0,9\sigma_{cr}, \quad (\text{XIII } 61)$$

в момент времени B

$$\sigma_1(t) = \left[1 - \frac{[1 - e^{-h(t_1 - t_2 - 2\Delta)}](1 - e^{-h\Delta})}{\lambda p_1(1 - e^{-ht_1})} 0,9 \right] \sigma_{cr} \quad (\text{XIII } 61a)$$

Формулы (XIII 61) можно упростить, если учесть приближенные равенства $\exp[-h(t_1 - t_2 - 2\Delta)] \sim \exp(-h\Delta) \sim \sim \exp[-h(t_2 - \Delta)] \approx 1$, $1 - \exp(-ht_1) \approx ht_1 - \delta k$

Так как в соответствии с (XIII 59) $p_1\Delta = 2\pi(j + 0,5)$, то получим следующее выражение для напряжений в момент времени B :

$$\sigma_1(t) = \left[1 - \frac{1,8}{k\delta} \frac{1}{\pi(j + 0,5)} \right] \sigma_{cr}, \quad (\text{XIII } 61b)$$

где $j = 0,5$ — число колебаний, совершаемых лопаткой за время нагружения или разгрузки.

Таким образом, при трапецидальной нагрузке напряжения в лопатке могут быть в $1 - 1,8 [k\delta\pi(j + 0,5)]$ раз больше статических. Например, если принять, что время нагружения примерно равняется времени, необходимому для поворота ротора на дугу, соответствующую шагу между лопатками, то можно найти: $f\Delta = ft_{cr}t_1/(\pi D_{cr})$, где D_{cr} и t_{cr} — средний диаметр и шаг лопаток на среднем диаметре.

Зная $f\Delta$, t_1 и степень парциальности $\varepsilon = (t_1 - t_2)/t_1$, можно определить и число циклов колебаний лопатки под полной нагрузкой $f(t_1 - t_2 - 2\Delta)$. Так как время нагружения и разгрузки лопатки Δ зависит от целого ряда трудно учитываемых факторов, при расчете необходимо принимать наиболее тяжелые условия работы лопатки. Поэтому полученные значения $f\Delta$ и $f(t_1 - t_2 - 2\Delta)$ округляем до ближайших величин, при которых амплитуда колебаний имеет максимум в соответствии с формулами (XIII 60). Получив, например, $f\Delta = 1,7$ и $f(t_1 - t_2 - 2\Delta) = 18,2$, принимаем в расчете $f\Delta = 1,5$ и $f(t_1 - t_2 - 2\Delta) = 18$.

Если $f\Delta < 1$, то расчет следует производить исходя не из постепенного, а из мгновенного нагружения лопатки, приняв $f(t_1 - t_2 - 2\Delta)$ равным ближайшему целому числу с половиной.

На рис. II.51 показана зависимость работы трапецидальной нагрузки от времени нагружения лопатки Δ : кривая 1 построена

при условии, что под полной нагрузкой лопатка совершает 14,5 колебаний, кривая 2 — при условии, что лопатка совершает 15 колебаний. Следует учесть, что при принятых предположениях о характере возмущающих и демпфирующих сил величина динамических напряжений в лопатках пропорциональна работе возмущающих сил. Как видно, при увеличении времени нагружения максимальные значения динамических напряжений в лопатках уменьшаются в соответствии с формулой (XIII 58).

ХIII.4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПАКЕТА ЛОПАТОК. ПАКЕТНЫЙ МНОЖИТЕЛЬ

Соединение лопаток в пакеты приводит к возникновению некоторых особенностей вынужденных колебаний, которые отсутствовали при колебаниях отдельных лопаток без связей. В случае соединения лопаток в пакеты существует определенное соотношение между амплитудами и фазами колебаний различных лопаток, определяемое геометрическими характеристиками лопаток и связей и рассматриваемой собственной формой. Учитывая малую величину сил демпфирования, как и при изучении вынужденных колебаний отдельных лопаток будем считать, что в условиях резонанса распределение амплитуд по длине пакета совпадает с распределением амплитуд для резонирующей собственной формы. Отличие при резонансных колебаниях пакета лопаток от колебаний отдельной лопатки, как отмечалось в п. II.8, заключается в том, что для отдельной лопатки имеет место такой сдвиг по фазе между прогибом и возмущающей силой, который обеспечивает максимальную работу возмущающей силы при резонансе. Например, из сопоставления выражений (XIII 11) и (XIII 12) следует, что синусоидальная возмущающая сила при резонансе находится в фазе со скоростью колебаний отдельной лопатки и производит максимальную работу, определяемую формулой (XIII 13). При колебаниях пакета лопаток сдвиг по фазе между возмущающими силами, действующими на различные лопатки в пакете, отличается от сдвига по фазе между амплитудами колебаний этих лопаток, который определяется находящейся в резонансе собственной формой. В результате этого суммарная работа возмущающих сил оказывается меньше той, которая теоретически имела бы место при условии, что возмущающие силы находились бы в фазе со скоростями всех лопаток пакета.

Число, равное отношению этих работ, характеризующее уменьшение работы возмущающих сил из-за наличия сдвига по фазе между скоростями колебаний лопаток в пакете и действующими на них возмущающими силами, как указывалось в п. II.8, будем называть пакетным множителем. Для синфазных колебаний, при которых амплитуды всех лопаток в пакете равны, а сдвиг по фазе отсутствует, отношение указанных работ будет совпадать с отношением амплитуд возмущающих сил, действующих на лопатку в пакете и на отдельную лопатку без связей.

Вычислим величину пакетного множителя при различном характере возмущающих сил сначала для синфазных колебаний. Рассмотрим резонансные колебания пакета из m лопаток под действием гармонической силы, интенсивность которой η сохраняется неизменной по высоте лопатки. Считаем, что возмущающее усилие вызвано неравномерностью параметров потока, изменяющихся по окружности колеса по закону $\cos k\varphi$, где k — число волн по окружности колеса, φ — угол, отсчитываемый от какого-либо определенного радиуса. Для вращающейся лопатки $\varphi = \omega t = 2\pi n t$, где ω и n — соответственно угловая скорость и частота вращения (об/с) ротора турбины, т. е. для вращающейся лопатки возмущающее усилие, вызванное неравномерностью потока, приводится к виду

$$P = \eta \cos 2\pi n t. \quad (\text{XIII } 62)$$

Так как рассматривается случай резонанса, то частота собственных колебаний совпадает с частотой возмущающей силы, т. е. $p_t = 2\pi k n$; $f_t = k n$.

Таким образом, возмущающая сила, действующая на первую лопатку в пакете, изменяется во времени по закону

$$P_I = \eta \cos p_t t.$$

Так как вторая лопатка в пакете отстоит от первой на угол $2\pi/z_1$, третья лопатка — на угол $2(2\pi/z_1)$, m -я лопатка — на угол $(m-1)(2\pi/z_1)$, то возмущающие усилия, действующие на эти лопатки, будут равны следующим величинам

$$\left. \begin{aligned} P_{II} &= \eta \cos [p_t t + (2\pi/z_1)]; \\ P_{III} &= \eta \cos [p_t t + 2(2\pi/z_1)]; \\ P_m &= \eta \cos [p_t t + (m-1)(2\pi/z_1)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII } 63)$$

Суммарное усилие, действующее на все лопатки пакета, таково.

$$\begin{aligned} P_\Sigma &= P_I + P_{II} + \dots + P_m = \\ &= \eta \{ \cos p_t t + \cos [p_t t + (2\pi/z_1)] + \\ &\quad \dots + \cos [p_t t + (m-1)(2\pi/z_1)] \}. \end{aligned} \quad (\text{XIII } 64)$$

Воспользовавшись известными формулами для суммы синусов и косинусов кратных углов [159], получим:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \cos \frac{2k\pi}{z_1} + \cos 2 \frac{2k\pi}{z_1} + \dots + \cos (m-1) \frac{2k\pi}{z_1} &= \\ &= \frac{\sin (m\pi k/z_1) \cos [(m-1)\pi k/z_1]}{\sin (\pi k/z_1)}; \\ \sin \frac{2k\pi}{z_1} + \sin 2 \frac{2k\pi}{z_1} + \dots + \sin (m-1) \frac{2k\pi}{z_1} &= \\ &= \frac{\sin (m\pi k/z_1) \sin [(m-1)\pi k/z_1]}{\sin (\pi k/z_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII } 65)$$

Таким образом, получим.

$$P_\Sigma = \eta \frac{\sin (m\pi k/z_1)}{\sin (\pi k/z_1)} \cos \left[p_t t + \frac{(m-1)\pi k}{z_1} \right]. \quad (\text{XIII } 64a)$$

Если бы отсутствовал сдвиг по фазе между возмущающими силами и скоростями колебаний для всех лопаток пакета, то суммарное усилие, действующее на m лопаток, было бы равно

$$P_{\max} = m\eta \cos p_t t.$$

Таким образом, отношение амплитуд возмущающих сил, равное по определению величине пакетного множителя для синфазных колебаний, имеет следующий вид

$$\mu = \frac{P_\Sigma}{P_{\max}} = \frac{\sin (m\pi k/z_1)}{m \sin (\pi k/z_1)}. \quad (\text{XIII } 66)$$

В п. II.8 показано, что формула (XIII.66) будет иметь место и в том случае, если использовать данное выше общее определение для величины пакетного множителя μ .

Уменьшение амплитуд колебаний после соединения лопаток в пакет будет иметь место и при других законах изменения возмущающих сил. Например, при парциальном подводе пара в случае трапецидальной нагрузки объединение лопаток в пакет также приводит к снижению в них уровня динамических напряжений. Будем считать, что усилие, действующее на каждую из m лопаток пакета, равномерно передается на все лопатки. Как и ранее, предположим, что нагрузка на отдельную лопатку возрастает за время Δ , равное времени поворота ротора на один шаг рабочих лопаток. При сделанных предположениях за время вхождения под нагрузку первой лопатки пакета будет выполняться следующее условие: при $t_2 \leq \tau < t_2 + \Delta$ $q(t) = q(\tau - t_2)(m\Delta)$.

Аналогичным образом, за время вхождения под нагрузку второй, третьей, m -й лопаток пакета будут выполняться условия:

$$\begin{aligned} q(t) &= [q + q[\tau - (t_2 + \Delta)]/\Delta] m = q(\tau - t_2)(m\Delta); \\ &\text{при } t_2 + \Delta \leq \tau < t_2 + 2\Delta \\ q(t) &= [2q + q[\tau - (t_2 + 2\Delta)]/\Delta] m = q(\tau - t_2)(m\Delta); \\ &\text{при } t_2 + 2\Delta \leq \tau < t_2 + 3\Delta \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(t) &= [(m-1)q + q[\tau - t_2 - (m-1)\Delta]/\Delta] m = q(\tau - t_2)(m\Delta) \\ &\text{при } t_2 + (m-1)\Delta \leq \tau < t_2 + m\Delta \end{aligned}$$

График зависимости от времени усилия, действующего на лопатку в пакете, изображен на рис. XIII.3 (сплошная линия);

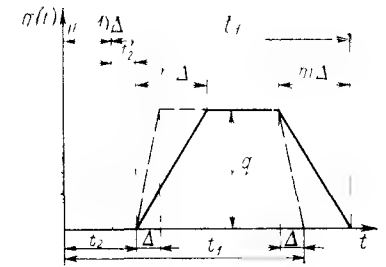


Рис. XIII.3 График зависимости от времени усилия, действующего на лопатку

там же для сравнения показана зависимость от времени усилия, действующего на отдельную лопатку без связей (штриховая линия).

Будем считать, что соединение лопаток в пакет не приведет к сколько-нибудь заметному изменению их собственных частот, форм и величины демпфирующих сил. Тогда амплитуда колебаний лопаток в пакете может быть определена по формулам типа (XIII.57) и (XIII.58), если в них вместо Δ подставить $m\Delta$, а вместо t_2 подставить $t'_2 - t_2 = (m - 1)\Delta$. Таким образом, на участках I и III (см. рис. II.48) выражение для амплитуды колебаний примет следующий вид

$$N'_i = \frac{2qA_i e^{h\beta}}{m \sqrt{p_i^2 (e^{h\beta} - 1)}}$$

$$\times \sqrt{e^{h\beta} [\operatorname{ch} h(\beta + m\Delta) - \cos p_i(t'_2 - m\Delta)] (\operatorname{ch} hm\Delta - \cos p_i m\Delta)},$$

где при $0 \leq \tau < t'_2$ $\beta = -[t_1 - t_2 + (m - 1)\Delta]$;

при $t'_2 + m\Delta \leq \tau < t_1 - m\Delta$ $\beta = t_2 - (m - 1)\Delta$.

Сравнивая амплитуды колебаний лопаток в пакете и отдельных лопаток, пропорциональные соответствующим динамическим напряжениям, определим величину пакетного множителя. Будем считать $h\beta$ и $hm\Delta$ настолько малыми, что выполняются приближенные равенства: $\exp(h\beta) \approx \operatorname{ch} h(\beta + m\Delta) \approx \operatorname{ch} hm\Delta \approx 1$. Тогда, учитывая, что $t'_2 + m\Delta = t_2 + \Delta$, получим:

$$\mu = \frac{N'_i}{N_i} = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{1 - \cos p_i m\Delta}{1 - \cos p_i \Delta}} = \frac{1}{m} \frac{\sin(p_i m\Delta/2)}{\sin(p_i \Delta/2)}. \quad (\text{XIII.67})$$

Так как предполагается, что Δ приблизительно равно времени поворота ротора на один шаг рабочих лопаток, а $f_i = kn = k/t_1$, то при z_1 рабочих лопатках на колесе получим:

$$\Delta = t_1/z_1; \quad f_i \Delta = k/z_1; \quad p_i \Delta/2 = \pi k/z_1.$$

Таким образом, выражение для пакетного множителя окажется таким:

$$\mu = \frac{\sin(mk\pi/z_1)}{m \sin(k\pi/z_1)}, \quad (\text{XIII.67a})$$

т. е. совпадает с полученным ранее значением пакетного множителя при рассмотрении колебаний под действием гармонической возмущающей силы.

ХIII.5. ПАКЕТНЫЙ МНОЖИТЕЛЬ ПРИ ВНУТРИПАКЕТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЛОПАТОК

Так как за счет рационального выбора числа лопаток в пакете величина пакетного множителя при синфазных колебаниях может быть сделана достаточно малой, то относительно возрастает

опасность внутрипакетных колебаний, что и подтверждается практикой эксплуатации стационарных паровых турбин (см. п. II.12). С учетом того, что при разных формах внутрипакетных колебаний отношение амплитуд лопаток существенно изменяется, получить общую формулу типа (XIII.66) для всех форм внутрипакетных колебаний не представляется возможным. Тем не менее, оценить эффективность соединения лопаток в пакеты для уменьшения работы возмущающих сил при различных формах внутрипакетных колебаний можно с помощью введенного выше понятия пакетного множителя.

Ограничимся рассмотрением вынужденных внутрипакетных изгибных колебаний под действием гармонической возмущающей силы и внутрипакетных крутильных колебаний под действием гармонического крутящего момента. Сначала будем считать, что интенсивность возмущающих сил и моментов постоянна по высоте лопатки. Кроме того, как и обычно, предполагаем, что демпфирующие силы малы, в связи с чем распределение амплитуд как по высоте лопатки, так и по длине пакета при резонансных колебаниях не зависит от распределения возмущающих сил, а определяется только резонирующей собственной формой.

При рассмотрении резонансных внутрипакетных колебаний будем считать, что круговая частота колебаний $p_i = k\omega$, а в пакет объединены m из z_1 лопаток ступени.

Как показано в п. II.8, при принятых предположениях работа, совершаемая за период возмущающей силой $\eta \cos p_i t$, окажется следующей:

$$R_\Sigma = \eta/\pi \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi [A_1 \cos \alpha + A_2 \cos(\alpha + 2\pi k z_1) + \dots + A_m \cos(\alpha + 2\pi k(m-1)z_1)],$$

где α — сдвиг по фазе между возмущающей силой и скоростью колебаний первой лопатки в пакете; A_n — относительная амплитуда n -й лопатки в пакете, определяемая резонирующей собственной формой.

Сдвиг по фазе между возмущающей силой и скоростью колебаний первой лопатки в пакете (α) определим из условия максимума суммарной работы возмущающих сил. В результате получим:

$$R_\Sigma = \eta/\pi \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi \sqrt{\left[\sum_{n=1}^m A_n \cos \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right]^2 + \dots + \left[\sum_{n=1}^m A_n \sin \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right]^2}. \quad (\text{XIII.68})$$

Если бы отсутствовал сдвиг по фазе между возмущающими силами и скоростями колебаний всех лопаток в пакете, то максимально возможная работа возмущающих сил за период была бы следующей:

$$R_{\max} = \eta/\pi \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi \sum_{n=1}^m |A_n|. \quad (\text{XIII.69})$$

В соответствии с определением величина пакетного множителя при внутрипакетных колебаниях $\mu_{\text{вн}}$ такова

$$\mu_{\text{вн}} = \frac{R_{\Sigma}}{R_{\max}} = \frac{\sqrt{\left[\sum_{n=1}^m A_n \cos \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^m A_n \sin \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right]^2}}{\sum_{n=1}^m |A_n|}. \quad (\text{XIII.70})$$

Из формулы (XIII.70) следует, что значения $\mu_{\text{вн}}$ равны при $k/z_1 = a$ и $k'/z_1 = s \pm a$, где s — целое, т. е. значения $\mu_{\text{вн}}$ достаточно определить, например, в диапазоне $0,5 \leq k/z_1 \leq 1$.

В п. XI.9 отмечалось, что при внутрипакетных колебаниях распределение прогибов по высоте различных лопаток в пакете может несколько различаться. Кроме того, может изменяться по высоте лопатки и интенсивность возмущающей силы, т. е. величина η может являться функцией координаты ξ . Тем не менее, и в этом случае формула (XIII.70) будет оставаться справедливой при условии, что величины A_n в числителе и знаменателе формулы

будут заменены величинами $A_n \int_0^1 \eta(\xi) Z_{in}(\xi) d\xi$, где $Z_{in}(\xi)$ — собственная форма n -й лопатки при i -й форме внутрипакетных колебаний.

Наконец, если рассматриваются изгибно-крутильные колебания закрученных лопаток переменного сечения, то пакетный множитель также может быть вычислен в соответствии с данным выше определением. Необходимо только иметь в виду, что при этом следует вычислить как работу аксиальной и тангенциальной составляющих возмущающей силы, так и работу распределенного крутящего момента, а затем полученные результаты сложить. При вычислении пакетного множителя в этом более общем случае необходимо, однако, знать не только соотношения между прогибами и углами поворота лопаток, определяемые резонирующей собственной формой, но и соотношения между различными компонентами возмущающих сил.

Именно при рассмотрении внутрипакетных колебаний становится ясной недостаточность определения пакетного множителя как отношения сил, действующих на лопатку в пакете и на отдельную лопатку: при внутрипакетных колебаниях равенство нулю главного вектора сил, действующих на все лопатки пакета, еще не означает равенства нулю работы возмущающих сил и наоборот. Определение же пакетного множителя с помощью формулы (XIII.70) и для внутрипакетных колебаний сохраняет ясный физический смысл, показывая, насколько уменьшается работа возмущающих сил из-за того, что сдвиг по фазе между скоростями колебаний различных лопаток в пакете, определяемый резонирующей собственной формой, отличается от сдвига по фазе между возмущающими силами, действующими на эти лопатки.

Пакетный множитель при внутрипакетных колебаниях можно легко вычислить по формуле (XIII.70), если известно распределение амплитуд по длине пакета и высоте лопатки при различных собственных формах. В гл. XI и XII было показано, что при m лопатках в пакете каждому типу внутрипакетных колебаний (например, B_0, B_1 и т. д.) соответствует $m-1$ собственных форм, различающихся числом перемен знака j по длине пакета. При изменении относительной жесткости соединяющих лопатки связей распределение амплитуд по длине пакета оказывается несколько различным даже для одинаковых величин m и j (см. п. XI.9). Поэтому получить фиксированное численное значение для величины $\mu_{\text{вн}}$ при заданных значениях k/z_1 , m и j оказывается невозможным¹. Тем не менее, расчеты показывают, что имеет место весьма важный для практики вывод: при определенных значениях n и j отношение k/z_1 , обеспечивающее достижение максимума величиной $\mu_{\text{вн}}$, весьма слабо зависит от относительной жесткости связей. Более того, указанные значения k/z_1 оказываются весьма близкими даже для внутрипакетных изгибных и внутрипакетных крутильных колебаний при условии, что m и j в обоих случаях одинаковы. Физически это объясняется тем, что $\mu_{\text{вн}} \rightarrow 1$ в том случае, когда сдвиг по фазе между скоростями колебаний различных лопаток, определяемый резонирующей собственной формой, меняется почти также, как и сдвиг по фазе между возмущающими силами, действующими на различные лопатки в пакете. При этом на величину пакетного множителя оказывает влияние, главным образом, число перемен знака j по длине пакета, а не некоторое различие в относительной величине амплитуд колебаний лопаток. В тех случаях, когда $\mu_{\text{вн}} \ll 1$, небольшое изменение распределения амплитуд по длине пакета может привести к существенному изменению величины пакетного множителя, но для практики гораздо важнее знать и избегать именно тех соотношений

¹ Из формулы (XIII.66) следует, что при синфазных колебаниях положение заданное k/z_1 и m однозначно определяет величину μ .

m, j и k/z_1 , при которых величина пакетного множителя близка к единице.

Проиллюстрируем это положение результатами расчетов. На рис. П.44 приведены распределение амплитуд по длине пакета и зависимость $\mu_{\text{п}}$ от k/z_1 (z'_1/z_1) для внутрипакетных изгибных и внутрипакетных кругильных колебаний: несмотря на значительные различия в распределении амплитуд по длине пакета, величина $\mu_{\text{п}}$ достигает максимума при $k/z_1 = 0,9$ и $0,88$, т. е. при весьма близких значениях k/z_1 .

Результаты настоящего параграфа могут быть использованы при проведении вибрационной настройки рабочих лопаток. На пример, при решении вопроса о необходимости отстройки от резонанса с частотой nz (т. е. при условии $k = z$) аксиально-кругильных колебаний пакета с одним или двумя узлами по его длине необходимо, используя фактические значения $z'_1/z_1, m$ и j , определить для рассматриваемых форм величину $\mu_{\text{п}}$. При проведении оценочных расчетов в этом случае, как указывается в [27], можно считать, что амплитуды лопаток по длине пакета изменяются в соответствии с формулой (XI.121).

ХIII.6. ПАКЕТНЫЙ МНОЖИТЕЛЬ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ЛОПАТОК, СОЕДИНЕННЫХ ЗАМКНУТЫМИ НА КРУГ СВЯЗЯМИ

В п. XI.10 было показано, что при внутрипакетных колебаниях форма прогиба по длине замкнутого на круг «пакета» имеет вид $C \sin [(2m\pi/z_1) - \alpha]$, где C и α — произвольные постоянные, m — число узловых диаметров; z_1 — число рабочих лопаток ступени.

Вычислим пакетный множитель отдельно для синфазных и внутрипакетных колебаний.

Численные значения пакетного множителя при синфазных колебаниях, возбуждаемых неравномерностью параметров потока по окружности, могут быть непосредственно получены из формулы (ХIII.66), если учесть, что в данном случае число лопаток в пакете совпадает с числом лопаток ступени. При этом выражение для пакетного множителя окажется следующим:

$$\mu = \frac{\sin \pi k}{z_1 \sin (\pi k/z_1)}. \quad (\text{ХIII.71})$$

Как следует из формулы (ХIII.71), $\mu \neq 0$ только при условии, что $k \neq sz_1$, где k — число колебаний лопатки за оборот ($p = k\omega$), s — целое. Если $k = sz_1$, то выражение (ХIII.71) представляет собой неопределенность типа $0/0$, которую можно раскрыть по правилу Лопиталья, считая, что $k \rightarrow sz_1$, и показать, что при этом $\mu = 1$.

Таким образом, пакетный множитель при синфазных колебаниях оказывается отличным от нуля только для очень высокочастотных колебаний, для которых выполняется условие

$k = sz_1$.

Полученный вывод справедлив при условии, что возбуждение колебаний вызвано неравномерностью параметров потока по окружности, т. е. при условии, что возмущающая сила имеет вид: $\eta \cos k\varphi = \eta \cos k\omega t = \eta \cos p.t$. В этом случае сдвиг по фазе между возмущающими силами, действующими на лопатки, отстающие друг от друга на угол φ_0 по окружности, будет равен $k\varphi_0$, а равнодействующая возмущающих сил, действующих на все лопатки пакета, будет равна нулю при условии, что $k \neq sz_1$.

Совершенно другая картина будет иметь место при условии синфазного воздействия периодически изменяющихся во времени возмущающих сил на все лопатки ступени. Подобное возбуждение может иметь место при кругильных колебаниях ротора, вызванных, например, коротким замыканием или неравномерной передачей крутящего момента при наличии редуктора. Если частота возбуждения будет совпадать с собственной частотой синфазных колебаний, то при резонансе сдвиг по фазе между скоростью колебаний и возмущающей силой будет отсутствовать для всех лопаток пакета и величина пакетного множителя по определению будет равна единице. Следует иметь в виду, что при нормальных условиях эксплуатации стационарных турбин подобное возбуждение не представляет практической опасности.

При возбуждении синфазных колебаний замкнутого на круг «пакета» импульсной нагрузкой формула для пакетного множителя преобразуется к виду:

$$\mu = \frac{\sin \pi k k_1}{z_1 \sin (\pi k k_1/z_1)}, \quad (\text{ХIII.72})$$

где k_1 — число равномерно повторяющихся за оборот импульсов; k — число колебаний лопатки за промежуток времени между двумя импульсами.

Из формулы (ХIII.72) следует, что пакетный множитель будет отличен от нуля только для очень высокочастотных колебаний, при которых число колебаний за оборот kk_1 будет кратным одновременно и числу равномерно повторяющихся за оборот импульсов, и числу рабочих лопаток на колесе ($kk_1 = sz_1$).

Определим величину пакетного множителя при внутрипакетных колебаниях, возбуждаемых неравномерностью параметров потока по окружности колеса, т. е. при условии, что возмущающая сила имеет вид: $\eta \cos k\varphi = \eta \cos k\omega t = \eta \cos p.t$. Представим форму прогиба по длине пакета в следующем виде:

$$C \sin [(2m\pi/z_1) - \alpha] = C_1 \cos [2m\pi(n-1)z_1] + \\ + C_2 \sin [2m\pi(n-1)z_1],$$

где постоянные C_1 и C_2 могут быть выражены через постоянные C и α .

После подстановки выражения для собственной формы формула (XIII.70) примет следующий вид:

$$U_{\text{ан}} = \frac{\sqrt{\left\{ \sum_{n=1}^{z_1} \left[C_1 \cos \frac{2m\pi(n-1)}{z_1} + C_2 \sin \frac{2m\pi(n-1)}{z_1} \right] \cos \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right\}^2 + \left\{ \sum_{n=1}^{z_1} \left[C_1 \cos \frac{2m\pi(n-1)}{z_1} + C_2 \sin \frac{2m\pi(n-1)}{z_1} \right] \sin \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right\}^2}}{\sum_{n=1}^{z_1} \left| C_1 \cos \frac{2m\pi(n-1)}{z_1} + C_2 \sin \frac{2m\pi(n-1)}{z_1} \right|} \quad (\text{XIII.73})$$

Используя формулы для произведения тригонометрических функций, преобразуем суммы, стоящие в подкоренном выражении (XIII.73), к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} C_1 \sum_{n=1}^{z_1} \left[\cos \frac{2\pi(m-k)(n-1)}{z_1} + \cos \frac{2\pi(m+k)(n-1)}{z_1} \right] \\ & + \frac{1}{2} C_2 \sum_{n=1}^{z_1} \left[\sin \frac{2\pi(m-k)(n-1)}{z_1} + \sin \frac{2\pi(m+k)(n-1)}{z_1} \right]; \\ & \frac{1}{2} C_1 \sum_{n=1}^{z_1} \left[\sin \frac{2\pi(m-k)(n-1)}{z_1} - \sin \frac{2\pi(m+k)(n-1)}{z_1} \right] \\ & + \frac{1}{2} C_2 \sum_{n=1}^{z_1} \left[\cos \frac{2\pi(m-k)(n-1)}{z_1} - \cos \frac{2\pi(m+k)(n-1)}{z_1} \right]. \end{aligned}$$

Если $m \neq k$ и $m \pm k \neq sz_1$ (где s — целое), то в соответствии с формулами (XIII.65) суммы в числителе выражения (XIII.73) равны нулю, т. е. будет равно нулю и значение пакетного множителя.

Рассмотрим несколько подробнее резонансные колебания при условии $m = k$, $p_i = k\omega$. Так как форма прогиба по длине пакет имеет вид: $C_1 \cos [2m\pi(n-1)/z_1] + C_2 \sin [2m\pi(n-1)/z_1]$, то имеются две собственные формы с m узловыми диаметрами и одинаковой собственной частотой p_i . Зависимость прогиба n -й лопатки от времени можно представить в следующем виде:

$$C_1 \cos [2m\pi(n-1)/z_1] \sin(p_i t + \alpha_1) + C_2 \sin [2m\pi(n-1)/z_1] \sin(p_i t + \alpha_2),$$

где начальные сдвиги по фазе α_1 и α_2 определяются из условия максимума работы возмущающих сил для всех лопаток ступени

при I и II собственных формах с m узловыми диаметрами, а амплитуды колебаний C_1 и C_2 при I и II собственных формах определяются соотношением величин возмущающих сил и декрементов δ_i для обеих собственных форм.

Как и в п. XIII 4, считая интенсивность возмущающей нагрузки постоянной по высоте лопатки и учитывая, что $m = k$, $p_i = k\omega$, для I собственной формы получим следующие выражения, определяющие работу возмущающей силы за период:

для первой лопатки

$$R_I = C_1 \eta / \pi \int_0^1 Z_{i1}(\xi) d\xi \cos \alpha_1;$$

для второй лопатки

$$R_{II} = C_1 \eta / \pi \int_0^1 Z_{i1}(\xi) d\xi \cos \frac{2k\pi}{z_1} \cos \left[\alpha_1 + \frac{2k\pi}{z_1} \right];$$

для n -й лопатки

$$R_n = C_1 \eta / \pi \int_0^1 Z_{i1}(\xi) d\xi \cos \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \cos \left[\alpha_1 + \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right];$$

для z_1 -й лопатки

$$R_{z_1} = C_1 \eta / \pi \int_0^1 Z_{i1}(\xi) d\xi \cos \frac{2k\pi(z_1-1)}{z_1} \cos \left[\alpha_1 + \frac{2k\pi(z_1-1)}{z_1} \right],$$

где $Z_{i1}(\xi)$ характеризует распределение амплитуд по высоте лопатки при I собственной форме с m узловыми диаметрами. Так как частоты I и II собственных форм равны, то одинаковыми будут и собственные формы, т. е. $Z_{i1} = Z_{i2} = Z_i$.

Суммарная работа возмущающих сил за период для I собственной формы будет равна:

$$R_{\Sigma} = \sum_{n=1}^{z_1} R_n = C_1 \eta / \pi \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi \sum_{n=1}^{z_1} \cos \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \cos \left[\alpha_1 + \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right]. \quad (\text{XIII.74})$$

Используя формулы

$$\left[\sum_{n=1}^{z_1} \cos^2 \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} = \frac{z_1}{2}; \sum_{n=1}^{z_1} \cos \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \sin \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} = 0; \sum_{n=1}^{z_1} \sin^2 \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} = \frac{z_1}{2}, \right] \quad (\text{XIII.75})$$

выражение (XIII 74) преобразуем к виду:

$$R_z = C_1 \eta' \pi \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi \frac{z_1}{2}; \quad \alpha_1 = 0 \quad (\text{XIII 74a})$$

Аналогичные выражения могут быть получены и для II собственной формы с m узловыми диаметрами:

$$R'_1 = 0; \quad R'_{II} = C_2 \eta' \pi \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi \sin \frac{2k\pi}{z_1} \cos \left(\alpha_2 - \frac{2k\pi}{z_1} \right),$$

так как

$$\int_0^{2\pi} \cos(p_1 t + \alpha_2) \cos \left(p_1 t + \frac{2k\pi}{z_1} \right) d(p_1 t) = \pi \cos \left(\alpha_2 - \frac{2k\pi}{z_1} \right);$$

$$R'_n = C_2 \eta' \pi \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi \sin \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \cos \left[\alpha_2 - \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right];$$

$$R'_{z_1} = C_2 \eta' \pi \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi \sin \frac{2k\pi(z_1-1)}{z_1} \cos \left[\alpha_2 - \frac{2k\pi(z_1-1)}{z_1} \right];$$

$$R'_\Sigma = C_2 \eta' \pi \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi \sum_{n=1}^{z_1} \sin \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \cos \left[\alpha_2 - \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right]. \quad (\text{XIII 76})$$

Как и ранее, используя формулы для суммы произведений тригонометрических функций, найдем:

$$R'_\Sigma = C_2 \eta' \pi \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi \frac{z_1}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{XIII.76a})$$

Так как и собственные частоты, и распределение амплитуд по высоте лопатки при обеих собственных формах с m узловыми диаметрами одинаковы, то естественно считать, что и декременты колебаний для этих собственных форм также будут равны. Полагая $\delta_1 = \delta_2$, получим, что $C_1 = C_2 = C$. В результате выражение для прогиба преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} C \cos \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \sin p_1 t + C \sin \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \sin \left(p_1 t + \frac{\pi}{2} \right) = \\ = C \sin \left[p_1 t + \frac{2k\pi(n-1)}{z_1} \right] = C \sin k \left[\omega t + \frac{2\pi(n-1)}{z_1} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, колебания носят характер волны, бегущей по длине пакета (по окружности колеса) с угловой скоростью ω (см. п. II.8).

Результаты, приведенные в настоящем параграфе, объясняют причину широкого распространения связей, обеспечивающих замыкание всех лопаток ступени в единый пакет. При возбуждении, вызванном неравномерностью потока по окружности колеса, представляющем наибольшую опасность в стационарном турбостроении, оказывается равным нулю пакетный множитель для всех форм низкочастотных синфазных колебаний и всех форм внутрипакетных колебаний, за исключением случая $k = m$. При возбуждении с частотой mz пакетный множитель также оказывается равным нулю для подавляющего большинства собственных форм.

Следует иметь в виду, что эти выводы получены без учета неизбежного на практике разброса в парциальных частотах лопаток, составляющих комплект. Влияние этого фактора на вынужденные колебания лопаток будет рассмотрено ниже.

XIII.7. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ РАЗБРОСА В ПАРЦИАЛЬНЫХ ЧАСТОТАХ ЛОПАТОК

В настоящем параграфе рассматриваются особенности вынужденных колебаний лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, при наличии разброса в парциальных частотах лопаток, т. е. в собственных частотах отдельных лопаток без связей. После соединения подобных лопаток замкнутыми на круг связями, как показано в п. XI.12, форма прогиба по длине пакета оказывается отличной от синусоидальной, а вместо одной собственной формы с m узловыми диаметрами (для которой неопределенной являлась не только амплитуда, но и положение узлов по длине пакета) возникают две с относительно близкими, но различными собственными частотами. Каждой из этих частот соответствует то же самое число узловых диаметров (точнее говоря, узловых радиусов, так как расстояние между узлами по длине пакета не сохраняется в точности одинаковым) и вполне определенное по длине окружности расположение узлов.

Так как форма прогиба по длине окружности при наличии разброса в парциальных частотах лопаток оказывается отличной от синусоидальной, то становится несправедливой и формула (XIII.73) для пакетного множителя при внутрипакетных колебаниях лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями. Собственную форму, как показано в п. XI.12, можно представить следующем виде:

$$v(\xi) = \sum_{k=0}^{z_1-2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos \left(\frac{2k\pi n}{z_1} + \alpha_k \right),$$

где n — номер лопатки; z_1 — число лопаток на колесе), причем для двух собственных форм с m узловыми диаметрами наибольшим значением оказывается коэффициент $\sqrt{a_m^2 + b_m^2}$ (см. табл. XI 4).

Если подставить выражение для собственной формы в формулу (XIII.73), то видно, что при колебаниях с k -й кратностью под действием неравномерности потока с k волнами по окружности колеса, пакетный множитель будет отличен от нуля только за счет коэффициента $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, содержащегося в разложении в ряд Фурье собственных форм с различными числами узловых диаметров. Введем обозначение

$$a_{km} = \left| \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right|_m \left| \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right|_k \%, \quad (\text{XIII.77})$$

где $\left| \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right|_m$ — k -й коэффициент ряда Фурье для формы с m узловыми диаметрами; $\left| \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right|_k$ — наибольший по величине k -й коэффициент для двух близких по частоте собственных форм с k узловыми диаметрами¹.

Проведя гармонический анализ собственных форм внутрипакетных колебаний, по формуле (XIII.77) можно определить коэффициенты a_{km} для пакета, состоящего из лопаток с различными парциальными частотами. Значения a_{km} для рассмотренного в п. XI.12 численного примера (пакет из 120 лопаток с различными парциальными частотами, соединенных замкнутыми на круг связями) приведены в табл. XIII.1. Указаны значения a_{3m} и a_{6m} для собственных форм с двумя семью узловыми диаметрами (a'_{km} относится к низшей из двух близких собственных частот с m узловыми диаметрами, a''_{km} — к высшей). Как видно, для рассмотренного конкретного случая разброса частот лопаток в комплекте, места расположения и относительной жесткости связей величины a_{km} (при $k \neq m$) могут достигать почти 25%.

Таблица XIII.1

m	a'_{3m}	a'_{4m}	a'_{5m}	a'_{6m}	a''_{3m}	a''_{4m}	a''_{5m}	a''_{6m}
2	3,25	3,13	0,20	0,36	1,83	1,09	0,40	0,25
3	100	1,79	1,27	0,09	100	3,37	1,02	0,92
4	4,91	100	3,11	1,42	4,91	100	5,94	1,14
5	3,61	8,75	99,6	9,22	3,85	7,98	100	4,60
6	5,70	4,31	5,08	100	1,39	2,47	16,8	99,50
7	4,36	7,42	2,18	7,1	1,15	5,97	4,60	23,40

Если колебания возбуждаются неравномерностью параметров потока по окружности колеса, то при постепенном изменении частоты вращения ротора турбины будут возникать колебания с одной и той же кратностью k , соответствующие собственным

формам с различными числами узловых диаметров m , поскольку коэффициенты a_{km} для этих форм будут отличны от нуля. Считая, что декремент не зависит от уровня напряжений и одинаков для собственных форм с различными числами узловых диаметров, возмущающих сил сохраняются постоянными при небольшом изменении частоты вращения ротора турбины, легко показать, что динамические напряжения при собственных формах с различными числами узловых диаметров будут пропорциональны коэффициентам a_{km} , приведенным в табл. XIII.1. Таким образом, при постепенном изменении частоты вращения ротора турбины на лопатках будет возникать один или два «основных» резонанса и несколько «побочных» с существенно меньшими напряжениями, причем все колебания будут происходить с одной и той же кратностью; для другого диапазона оборотов картина качественно полностью повторится, только кратность колебаний будет другая. Появление одного или двух «основных» резонансов на лопатке будет зависеть от различия в частотах двух собственных форм с одинаковым числом узловых диаметров, значения декремента и места расположения лопатки по окружности колеса, т. е. положения лопатки относительно узлов тех собственных форм, для которых число узловых диаметров совпадает с кратностью колебаний. Если декремент возрастает при увеличении уровня динамических напряжений, то в случае соблюдения остальных указанных выше предположений относительная величина «побочных» резонансов будет больше, чем соответствующие коэффициенты a_{km} .

Таким образом, картина вынужденных колебаний при наличии разброса в парциальных частотах лопаток качественно отличается от картины вынужденных колебаний при отсутствии разброса: в последнем случае при колебаниях с k -й кратностью будет возбуждаться только форма с k узловыми диаметрами, а для всех остальных собственных форм динамические напряжения будут равны нулю из-за равенства нулю пакетного множителя в соответствии с формулой (XIII.73).

Приведенный выше пример расчета характеризует только качественную сторону рассматриваемого явления. Необходимо учесть, что относительная величина «побочных» резонансов зависит не только от разброса в парциальных частотах лопаток, но и от связанности колебаний (см. п. XI.12). При стремлении коэффициента χ , характеризующего связанность колебаний, к нулю, отклонения от круговой симметрии резко возрастают, а характер вынужденных колебаний приближается к тому, который имеет место при колебаниях лопаток, «слабо» взаимодействующих друг с другом через упругое основание или поток [5]: при наличии разброса в парциальных частотах будет иметь место не только значительный разброс в уровне динамических напряжений в лопатках, но и различие в частотах вращения ротора, соответствующих возникновению максимальных напряжений в разных лопатках.

¹ Все коэффициенты были вычислены при условии $\sum_{n=1}^{z_1} v_n^2(1) = \text{const}$

Для того чтобы эффективность соединения лопаток в замкнутый на круг пакет существенно не снижалась, конструкция связей, их число и место расположения по высоте лопатки должны выбираться таким образом, чтобы связанность колебаний не стремилась к нулю. При выполнении этого условия разброс в парциальных частотах лопаток не приведет к существенному возрастанию уровня напряжений при «побочных» резонансах и опасность собственных форм, для которых при отсутствии разброса в парциальных частотах пакетный множитель был бы равен нулю, окажется сравнительно небольшой.

ХIII.8. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ВОЗБУДИМОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ ИЗГИБНЫХ И КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В п. ХIII.1 было показано, что динамические напряжения в корневом сечении консольной лопатки при резонансных изгибных колебаниях i -й собственной формы могут быть представлены в следующем виде.

при действии равномерно распределенной нагрузки

$$\sigma_i(0) = \frac{2\pi}{\delta} \sigma_{st} C_i; \quad C_i = \frac{\int_0^1 Z_i(\xi) d\xi}{\rho_i^2 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi};$$

при действии сосредоточенной на вершине силы

$$\sigma_i(0) = \frac{2\pi}{\delta} \sigma_{ст} C'_i; \quad C'_i = \frac{2}{\rho_i^2},$$

где $\sigma_{ст}$ — напряжения в лопатке при статическом приложении силы; δ — декремент колебаний

Значения коэффициентов C_i и C'_i приведены в табл. II.4 и II.5. Из приведенных в таблицах данных следует, что численные значения C'_i и особенно C_i резко уменьшаются с усложнением собственной формы, т. е. возбудимость высших собственных форм существенно уменьшается. Покажем, в чем заключается причина этого явления.

Воспользовавшись формулой (XI 25), найдем, что амплитуда колебаний вершины консольной жестко заделанной лопатки при i -й форме такова

$$v_i(1) = A_i \{U(\rho_i) - [S(\rho_i) T(\rho_i)] V(\rho_i)\} = A_i Z_i(1), \quad (\text{ХIII.78})$$

где A_i — постоянная

Учтем, что в соответствии с формулой (XI 24) для собственных частот консольной лопатки выполняется соотношение $S^2(\rho_i)$

$= T(\rho_i) V(\rho_i) = 0$ или $\text{ch } \rho_i \cos \rho_i = -1$ и преобразуем выражение (ХIII 78) к следующему виду:

$$U(\rho_i) - \frac{S(\rho_i) V(\rho_i)}{T(\rho_i)} = U(\rho_i) - \frac{V^2(\rho_i)}{S(\rho_i)} \cdot \frac{\text{sh } \rho_i \sin \rho_i}{\text{ch } \rho_i - \cos \rho_i}. \quad (\text{ХIII.79})$$

Так как $\cos \rho_i \neq 0$, то

$$v_i(1) = A_i \frac{\text{sh } \rho_i \sin \rho_i \cos \rho_i}{\text{ch } \rho_i \cos \rho_i + \cos^2 \rho_i} = A_i \frac{\text{sh } \rho_i \sin \rho_i \cos \rho_i}{-\sin^2 \rho_i} = A_i \frac{\text{sh } \rho_i}{\sin \rho_i \text{ch } \rho_i}.$$

Преобразуем равенство (ХIII 79), используя следующее соотношение, справедливое при выполнении условия (XI 24a):

$$\frac{\text{sh}^2 \rho_i}{\sin^2 \rho_i \text{ch}^2 \rho_i} = \frac{\text{ch}^2 \rho_i - 1}{\text{ch}^2 \rho_i - \text{ch}^2 \rho_i \cos^2 \rho_i} = \frac{\text{ch}^2 \rho_i - 1}{\text{ch}^2 \rho_i - 1} = 1$$

Таким образом: $\{U(\rho_i) - [S(\rho_i) V(\rho_i) T(\rho_i)]\}^2 = 1$ или

$$Z_i(1) = U(\rho_i) - [S(\rho_i) V(\rho_i) T(\rho_i)] = \pm 1. \quad (\text{ХIII.80})$$

Используя формулу (ХIII 80), запишем выражение (ХIII 78) в виде:

$$v_i(1) = \pm A_i. \quad (\text{ХIII 78a})$$

т. е. постоянная A_i определяет амплитуду вершины лопатки при i -й собственной форме

Динамические напряжения в корневом сечении лопатки с учетом формул (XI.18) и (XI 35) окажутся следующими:

$$\sigma_i(0) = \frac{EJ}{l^2 W} \frac{d^2 v_i(0)}{d\xi^2} = \frac{EJA_i}{l^2 W} \rho_i^2.$$

Так как $\rho_i^2 = \rho_i \sqrt{Fl^4 \gamma / (EJg)}$, то

$$\sigma_i(0) = \frac{A_i \rho_i}{W} \sqrt{\frac{EJF\gamma}{g}} = \frac{V_i}{W} \sqrt{\frac{EJF\gamma}{g}}, \quad (\text{ХIII.81})$$

где V_i — скорость колебаний периферийного сечения лопатки.

Из формулы (ХIII.81) следует, что при постоянной скорости колебаний периферийного сечения напряжения в корневом сечении также сохраняются постоянными, независимо от номера собственной формы. Из формулы следует также, что универсальная связь между скоростью периферийного сечения и максимальными динамическими напряжениями, имеющими место в корневом сечении, не зависит от длины лопатки и сохраняется при геометрически подобном изменении размеров поперечного сечения, поскольку в этом случае $\sqrt{JF/W} = \text{const.}$

Преобразуем формулу (ХIII.81) к виду

$$\sigma_i(0) = V_i \frac{\sqrt{JF}}{W} L \sqrt{\frac{\gamma}{Eg}}. \quad (\text{ХIII.81a})$$

Величина $\sqrt{JF/W}$ сравнительно слабо изменяется для различных лопаточных профилей, а величина $\sqrt{\gamma E g}$ сохраняется практически постоянной для всех материалов, применяемых при изготовлении лопаток. Таким образом, универсальную связь между скоростью периферийного сечения лопатки и напряжениями в ее корневом сечении можно представить в виде

$$\sigma_i(0) = V_i k E, \quad (\text{XIII.81б})$$

где k — параметр, сравнительно слабо зависящий от формы поперечного сечения лопатки.

Использование соотношения (XIII.81б) позволило, например, провести анализ вибронапряженного состояния лопаток газотурбинных двигателей по данным замера скоростей колебаний вершин лопаток [2]. В этой работе отмечается, что для лопаток с существенно различными геометрическими характеристиками при одинаковых максимальных динамических напряжениях скорости периферийных сечений отличаются не более, чем в 2 раза.

Аналогичные соотношения имеют место и для лопаток стационарных паровых турбин: для лопаток четырех ступеней одной из мощных турбин было вычислено 18 частот преимущественно изгибных колебаний отдельных лопаток и синфазных колебаний пакетов лопаток. Несмотря на то, что определялись частоты и формы закрученных лопаток переменного поперечного сечения (причем частоты различались в 49 раз, а амплитуды колебаний периферийных сечений, соответствующие одинаковым максимальным динамическим напряжениям — в 66 раз), оказалось, что скорости периферийных сечений лопаток, соответствующие одинаковым максимальным напряжениям, при всех собственных формах отличались не более, чем в 1,8 раза. При колебаниях типа А пакетов лопаток с паяными проволоками универсальная зависимость между напряжениями и скоростями колебаний периферийных сечений также сохраняется. Таким образом, по замеру скоростей колебаний вершин лопаток можно достаточно надежно оценить уровень динамических напряжений и в рабочих лопатках паровых турбин (естественно, что указанный вывод не относится к внутрипакетным колебаниям лопаток).

Полученные соотношения позволяют понять физическую природу уменьшения возбудимости высших собственных форм. Из формулы (XIII.81) следует:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i(0) &= \sigma_1(0) p_i/p_1 \text{ при } A_i = A_1; \\ A_i &= A_1 p_1/p_i \text{ при } \sigma_i(0) = \sigma_1(0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII.82})$$

Таким образом, при одинаковых амплитудах вершины лопатки динамические напряжения в корневом сечении при различных собственных формах возрастают пропорционально собственной частоте, а при одинаковом уровне максимальных динамических

напряжений амплитуды колебаний изменяются обратно пропорционально собственной частоте.

Воспользуемся полученным в п. XIII.1 выражением для работы сил демпфирования за период колебаний

$$R_i = 2\pi h \frac{\gamma}{g} F l p_i A_i^2 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi.$$

Так как $h = \delta p_i (2\pi)$ и для консольной лопатки справедлива формула (X.45), преобразуем выражение для R_i к виду

$$R_i = \frac{\gamma}{g} F l p_i^2 A_i^2 \delta \frac{1}{4} Z_i^2(1) - \frac{1}{4} \frac{\gamma}{g} F l \delta V_i^2. \quad (\text{XIII.83})$$

При одинаковом уровне динамических напряжений $V_i = \text{const}$, т. е. из формулы (XIII.83) следует, что при одинаковых максимальных напряжениях рассеянная за цикл энергия не зависит от номера собственной формы. Так как

$$R_i = \frac{\gamma}{g} \delta F l p_i^2 A_i^2 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi - 2\delta \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} F l p_i^2 A_i^2 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi = 2\delta T_i, \quad (\text{XIII.84})$$

(где T_i — кинетическая энергия лопатки при i -й собственной форме), то из формул (XIII.83) и (XIII.84) следует, что при одинаковых максимальных динамических напряжениях кинетическая энергия лопатки также не зависит от номера собственной формы.

Работа возмущающих сил за период в соответствии с формулой (XIII.13) пропорциональна амплитуде вершины лопатки

$$R_i = \pi A_i \eta_i \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi.$$

Учитывая, что величина A_i при одинаковых динамических напряжениях обратно пропорциональна частоте колебаний, становится понятным, что для поддержания одинакового уровня динамических напряжений при высших собственных формах, т. е. для сохранения равенства подведенной и рассеянной за цикл энергии, необходимо обеспечить выполнение следующего соотношения.

$$A_i \eta_i \int_0^1 Z_i(\xi) d\xi = A_1 \eta_1 \int_0^1 Z_1(\xi) d\xi, \quad (\text{XIII.85})$$

где η_1 и η_i — интенсивность равномерно распределенной по высоте лопатки нагрузки соответственно при первой и i -й формах колебаний.

Из формулы (XIII.85) вытекает, что для поддержания одинакового уровня динамических напряжений интенсивность возмуща-

ющей силы при высших собственных формах должна быть значительно больше. Если же возмущающие силы, возбуждающие первую и i -ю формы, равны, то уровень напряжений при высших собственных формах резко падает в соответствии с формулой (XIII.16).

Так как кинетическая энергия T_i или равная ей потенциальная энергия Π_i колеблющейся лопатки при одинаковых максимальных динамических напряжениях не зависят от номера собственной формы, то интересно выяснить, насколько равномерно распределены напряжения по длине лопатки и площади поперечного сечения. Судить об этом можно по тому, какую часть составляет потенциальная энергия колеблющейся лопатки Π_i от максимальной потенциальной энергии $\Pi_{\max}$, которая имела бы место при однородном одноосном напряженном состоянии, т. е. в том случае, когда напряжения, равные $\sigma_i(0)$, были бы постоянны как по площади поперечного сечения, так и по длине лопатки. Учиты-

вая, что $\sigma_i(0) = Z_i^2(0) EJA_i^{-1}(l^2W) = \rho_i^2 EJA_i^{-1}(l^2W)$, $\int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi = Z_i^2(1)/4 = 1/4$ и $\rho_i^2 = \rho_l^1 EJE_l(FI^1\gamma)$, найдем:

$$\Pi_i = T_i = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} FA_i^2 p_i^2 \int_0^1 Z_i^2(\xi) d\xi = \frac{1}{8} \frac{\gamma}{g} FA_i^2 p_i^2 = \frac{1}{8} \frac{EJ}{l^3} A_i^2 \rho_l^4;$$

$$\Pi_{\max} = \int_0^l \int_F \frac{\sigma_l^2(0)}{2E} dF dz = \frac{1}{2E} \sigma_l^2(0) Fl = \frac{1}{2} \frac{EJ^2 F}{W^2 l^3} A_l^2 \rho_l^4.$$

Таким образом, оказывается, что независимо от номера собственной формы

$$\Pi_i / \Pi_{\max} = W^2 (4JF). \quad (\text{XIII.86})$$

Из формулы (XIII.86) следует, что напряжения по длине колеблющейся лопатки и толщине ее поперечного сечения распределены весьма неравномерно. Это обстоятельство приводит к уменьшению величины энергии, рассеиваемой в материале при колебаниях, и должно учитываться при использовании справочных данных о величине декремента лопаточных материалов, полученных в большинстве случаев при испытаниях круглых образцов.

Действительно, в п. II.6 показано, что для стержня прямоугольного поперечного сечения $\Pi_i / \Pi_{\max} = 1/12$, для стержня круглого поперечного сечения $\Pi_i / \Pi_{\max} = 1/16$, а для турбинных лопаток это отношение еще меньше. Например, для лопатки, у которой максимальная толщина поперечного сечения равна максимальному подъему средней линии профиля, выполняется приближенное равенство $\Pi_i / \Pi_{\max} = 0,0395$.

Из формул (XIII.82) и (XIII.85) следует, что уровень динамических напряжений должен резко уменьшаться при усложнении собственных форм, а наибольшую опасность должны представлять колебания первого тона. Однако, в работе [107] на основании обобщения опыта эксплуатации большого числа стационарных паровых турбин, накопленного в 30—40-х годах, сформулирован вывод о необходимости отстройки от резонанса с частотой nz (где n — частота вращения; z — число направляющих лопаток) внутрипакетных колебаний типа B_0 , а не синфазных колебаний типа A_0 , близких по частоте и форме к первому тону колебаний отдельных лопаток. Это объясняется тем, что лопатки в условиях эксплуатации, как правило, соединяются в пакеты с помощью различных по конструкции связей. При этом динамические напряжения в лопатках оказываются пропорциональными не просто коэффициенту C_i , а произведению $C_i \mu$ или $C_i \mu_{\text{вн}}$. За счет выбора числа лопаток в пакете m можно добиться того, чтобы при заданном отношении числа направляющих и рабочих лопаток z/z_1 численное значение пакетного множителя при синфазных колебаниях μ , определяемое по формуле (XIII.66), оказалось достаточно малым. В противоположность этому ниже будет показано, что независимо от отношения z/z_1 численное значение пакетного множителя $\mu_{\text{вн}}$ при одной из форм внутрипакетных колебаний окажется в соответствии с формулой (XIII.70) близким к единице. Именно это обстоятельство и предопределяет опасность колебаний типа B_0 , для которых величина C_i может оказаться больше, чем величина $C_{i\mu}$ для колебаний типа A_0 .

Определим $\mu_{\text{вн}}$ при различных формах внутрипакетных колебаний, считая, что распределение амплитуд по длине пакета описывается формулой (XI.121): $A_i = C \cos [\pi j (n - 0,5) m]$.

Формула (XIII.70) для пакетного множителя при внутрипакетных колебаниях в данном случае примет вид

$$\mu_{\text{вн}} = \frac{\left| \sum_{n=1}^m \cos \frac{\pi j}{m} \left(n - \frac{1}{2} \right) \cos \frac{2\pi z}{z_1} (n - 1) \right|}{\sum_{n=1}^m \left| \cos \frac{\pi j}{m} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right|}. \quad (\text{XIII.87})$$

Для получения приближенной оценки величины $\mu_{\text{вн}}$ примем два дополнительных предположения.

1. Число лопаток в пакете достаточно велико, поэтому значения j/m «плотно» заполняют интервал $0 < j/m < 1$ и существует

определенное значение j_1 , для которого выполняется приближенное равенство

$$j_1 m \approx (2z/z_1) \pm s, \quad (\text{XIII.88})$$

где s — целое.

2 Из-за достаточно большого количества лопаток в пакете выполняется соотношение

$$mz \gg z_1 \quad (\text{XIII.89})$$

Учитывая выражение (XIII.88), получим приближенные соотношения

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^m \cos \frac{\pi j_1}{m} \left(n - \frac{1}{2} \right) \cos \frac{2\pi z}{z_1} (n-1) \sim \\ & \approx \sum_{n=0}^{m-1} \cos \frac{2\pi z}{z_1} \left(n + \frac{1}{2} \right) \cos \frac{2\pi z}{z_1} n = \sum_{n=0}^{m-1} \left(\cos \frac{2\pi z}{z_1} n \right)^2 \cos \frac{\pi z}{z_1} = \\ & \sum_{n=0}^{m-1} \cos \frac{2\pi z}{z_1} n \sin \frac{2\pi z}{z_1} n \sin \frac{\pi z}{z_1}. \end{aligned}$$

При выполнении условия (XIII.89) найдем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{m-1} \cos \frac{2\pi z}{z_1} n \sin \frac{2\pi z}{z_1} n \sim 0; \\ & \sum_{n=0}^{m-1} \left(\cos \frac{2\pi z}{z_1} n \right)^2 \cos \frac{\pi z}{z_1} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi z}{z_1} \sum_{n=0}^{m-1} \left(1 + \cos \frac{4\pi z}{z_1} n \right) \sim \\ & \approx \frac{m}{2} \cos \frac{\pi z}{z_1}. \end{aligned}$$

С помощью аналогичных преобразований получим, что

$$\sum_{n=1}^m \cos \frac{\pi j_1}{m} \left(n - \frac{1}{2} \right) \sin \frac{2\pi z}{z_1} (n-1) \approx -\frac{m}{2} \sin \frac{\pi z}{z_1}.$$

Таким образом, числитель выражения (XIII.87) оказывается равным $m/2$.

Знаменатель выражения (XIII.87) при выполнении условия (XIII.89) приближенно равен $m(2/\pi)$, что легко показать, если разбить сумму на группы слагаемых одного знака и сложить их

по абсолютной величине, учитывая, что $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = 2/\pi$.

Таким образом, при выполнении условий (XIII.88) и (XIII.89) получим, что для одной из форм внутривибрационных колебаний выполняется приближенное равенство¹

$$\mu_{\text{вн}} \approx \pi/4, \quad (\text{XIII.90})$$

которое не зависит от соотношения z/z_1 .

Справедливость приближенной формулы (XIII.90) подтверждается данными табл. XIII.2, где показана зависимость $\mu_{\text{вн}}$ от z/z_1 для пакета из восьми лопаток [27]. В таблице указаны также максимальные значения пакетного множителя для каждой из собственных форм $\mu_{\text{вн. max}}$ и соответствующие этому значению величины $(z/z_1)_{\text{max}}$.

Таблица XIII.2

j	z/z_1						$\mu_{\text{вн max}}$	$(z/z_1)_{\text{max}}$
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95		
1	0,199	0,170	0,077	0,113	0,833	0,683	0,854	0,91
2	0	0,130	0,268	0,496	0,630	0,216	0,795	0,86
3	0,235	0,209	0,117	0,800	0,190	0,028	0,800	0,80
4	0	0,173	0,622	0,452	0,056	0,038	0,723	0,73
5	0,351	0,391	0,736	0,057	0,045	0,008	0,797	0,67
6	0	0,803	0,283	0,081	0,017	0,013	0,803	0,60
7	1	0,510	0,031	0,011	0,011	0,002	1	0,50

Относительно приведенных в табл. XIII.2 результатов необходимо сделать несколько замечаний.

1. В отличие от остальных форм внутривибрационных колебаний при $j = m-1$ величина $\mu_{\text{вн}}$ достигает максимума, равного единице, при $z/z_1 = 0,5$. Действительно, при $j = m-1$ соседние лопатки колеблются в противофазе, т. е. $\cos [\pi j (n-0,5)/m] \propto \cos [\pi j (n+0,5)/m] < 0$.

Так как при $z/z_1 = 0,5$ $\cos [\pi (n-1)] = (-1)^{n+1}$, $\sin [\pi (n-1)] = 0$, то числитель выражения (XIII.87) оказывается равным $\sum_{n=1}^m |\cos [\pi j (n-0,5)/m]|$ и, следовательно, $\mu_{\text{вн}} = 1$.

2. При $(z/z_1) \rightarrow 1$ $\mu_{\text{вн}} \rightarrow 0$ для всех собственных форм внутривибрационных колебаний, однако при этом для синфазных колебаний $\mu \rightarrow 1$ независимо от числа лопаток в пакете.

¹ Повторяя аналогичные выкладки, легко показать, что величина пакетного множителя, определяемого по формуле (XIII.90), совпадает с определяемой по формуле (XIII.73) величиной пакетного множителя при внутривибрационных колебаниях лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, если в последнем случае выполняются равенства: $m = k$; $m \ll z_1$, где m — число узловых диаметров; k — кратность колебаний; z_1 — число рабочих лопаток ступени.

3. В таблице не указаны значения $\mu_{\text{вн}}$ при $z/z_1 < 0,5$ и $z'/z_1 > 1$, однако в п. XIII.5 было показано, что значения $\mu_{\text{вн}}$ совпадают при $z/z_1 = a$ и $z/z_1 = s \pm a$, где s — целое.

Таким образом, независимо от соотношения числа рабочих и направляющих лопаток [кроме случая $(z/z_1) > 1$] величина $\mu_{\text{вн}}$ для одной из форм внутриспакетных колебаний оказывается близкой к единице, что и подтверждает сформулированный в [107] вывод о значительной опасности колебаний типа В.

Результаты, аналогичные полученным выше для изгибных колебаний лопаток, имеют место и при крутильных колебаниях.

В п. XII.2 было показано, что угол поворота Θ при i -й форме крутильных колебаний лопатки изменяется по закону $\Theta_i(\xi, t)$

$\Theta_i(\xi, t) = \theta_i(1) \sin[\pi(2i-1)\xi/2] \sin p_i t$, где $\theta_i(1)$ — i -я собственная форма угла поворота лопатки

$$\theta_i(\xi) = C \sin(p_i \xi / a) = C \sin[\pi(2i-1)\xi/2],$$

где i — целое, C — постоянная; $p_i = 1/\sqrt{GTg/(J_p \gamma)} \pi(2i-1)/2$

Так как $\sin[\pi(2i-1)/2] = \pm 1$, то $C = \theta_i(1)$ — амплитуда угла поворота вершины лопатки

Максимальная величина касательных напряжений в поперечном сечении лопатки может быть найдена по приближенной формуле $\tau_{\text{кр}} = Mc/T$, где c — максимальная толщина профиля

Будем считать, что крутильные колебания вызваны равномерно распределенной по высоте лопатки нагрузкой $\eta \cos p_i t$, приложенной на расстоянии $1/s$ хорды (b/s) от центра кручения поперечного сечения⁴. При статическом приложении указанной нагрузки максимальные напряжения в корневом сечении будут равны:

$$\tau_{\text{кр}}(0) = \frac{1}{s} \frac{\eta b l c}{T}. \quad (\text{XIII.94})$$

Определим динамические напряжения при i -й собственной форме, считая, что при резонансе возмущающие силы находятся в фазе со скоростью колебаний, т. е. что выполняется равенство

$$\Theta_i(\xi, t) = \theta_i(1) \sin[\pi(2i-1)\xi/2] \sin p_i t.$$

Как и при изучении изгибных колебаний лопаток под действием гармонической возмущающей силы в п. XIII.1, определим амплитуду резонансных колебаний из условия равенства подведенной и рассеянной за цикл энергии.

Элементарная работа возмущающей нагрузки, действующей на участок лопатки длиной $ld\xi$, равна:

$$dR_1 = (1/s) b \eta l d\xi \cos(p_i t) \theta_i(1) \sin[\pi(2i-1)\xi/2] \cos(p_i t) d(p_i t).$$

⁴ В п. I.4 отмечалось, что при колебаниях решетки тонких слабоизогнутых профилей, для которых центр кручения совпадает с центром тяжести и расположен на расстоянии $b/2$ от входной кромки, точка приложения переменных аэродинамических сил находится на расстоянии $b/4$ от входной кромки, т. е. в этом случае $s = 1$.

Работа возмущающей нагрузки, распределенной по всей высоте лопатки, за период колебаний окажется следующей:

$$R_1 = \frac{1}{s} b \eta l \theta_i(1) \int_0^1 \sin\left[\frac{\pi}{2}(2i-1)\xi\right] d\xi \int_0^{2\pi} \cos^2 p_i t d(p_i t) = \frac{2b \eta l \theta_i(1)}{s(2i-1)}, \quad (\text{XIII.92})$$

$$\text{так как } \int_0^1 \sin\left[\frac{\pi}{2}(2i-1)\xi\right] d\xi = \frac{2}{\pi(2i-1)}.$$

Интенсивность сил демпфирования при колебаниях в соответствии с уравнением (XII.4) такова

$$2hJ_p \frac{\gamma}{g} \frac{\partial \Theta_i(\xi, t)}{\partial t} = 2hJ_p \frac{\gamma}{g} p_i \theta_i(1) \sin\left[\frac{\pi}{2}(2i-1)\xi\right] \cos p_i t$$

Тогда элементарная работа сил демпфирования, распределенных на участке лопатки длиной $ld\xi$, будет следующей:

$$dR_2 = 2hJ_p \frac{\gamma}{g} p_i \theta_i(1) \sin\left[\frac{\pi}{2}(2i-1)\xi\right] \cos(p_i t) l d\xi d\Theta_i(\xi, t)$$

Работа за период сил демпфирования, распределенных по всей высоте лопатки, составит:

$$R_2 = 2hJ_p \frac{\gamma}{g} p_i \theta_i^2(1) l \int_0^1 \sin^2\left[\frac{\pi}{2}(2i-1)\xi\right] d\xi \int_0^{2\pi} \cos^2 p_i t d(p_i t) = \pi hJ_p \frac{\gamma}{g} p_i \theta_i^2(1) l, \quad (\text{XIII.93})$$

$$\text{так как } \int_0^1 \sin^2\left[\frac{\pi}{2}(2i-1)\xi\right] d\xi = \frac{1}{2}.$$

Приравнявая работу возмущающих и демпфирующих сил за период, получим

$$\theta_i(1) = \frac{2b \eta g}{s(2i-1) \pi h J_p \gamma p_i}.$$

Так как $2\pi h = \delta \hat{p}_i$, а $p_i^2 = GTg \pi^2 (2i-1)^2 / (4J_p \gamma l^2)$, то

$$\theta_i(1) = \frac{16 l^2 b \eta}{s \delta G T \pi^2 (2i-1)^2}.$$

Учитывая, что $M_i(0) = (GT/l) d\theta_i(0)/d\xi$, получим следующее выражение для максимальных касательных напряжений в корневом сечении при i -й собственной форме:

$$\tau_{\text{кр}}(0) = \frac{Gc}{l} \frac{\pi}{2} (2i-1) \theta_i(1) = \frac{8 l b_1 c}{s \delta T \pi (2i-1)^2} \quad (\text{XIII.95})$$

Используя формулы (XIII.91) и (XIII.94), получим

$$\frac{\tau_i(0)}{\tau_{ct}(0)} = \frac{8}{\delta\pi(2i-1)^2}. \quad (\text{XIII.95})$$

По аналогии с формулой (XIII.16) для изгибных колебаний, представим формулу (XIII.95) в следующем виде [27]:

$$\tau_i(0) = \tau_{ct}(0) \frac{2\pi}{\delta} C_{кр i}, \quad (\text{XIII.95a})$$

где $C_{кр i} = 4[\pi^2(2i-1)^2]$, причем индексы при коэффициенте C указывают, что он относится к i -й собственной форме крутильных колебаний.

Совершенно аналогично могут быть найдены максимальные касательные напряжения при возбуждении колебаний сосредоточенным крутящим моментом Pb/s , приложенным на вершине лопатки. Так как в данном случае $\tau_{ct}(0) = Pbc/(sT)$, то нетрудно показать, что

$$\tau_i(0) = \tau_{ct}(0) \frac{2\pi}{\delta} C'_{кр i}, \quad (\text{XIII.96})$$

где $C'_{кр i} = 2/[\pi(2i-1)]$

Значения коэффициентов $C_{кр i}$, $C'_{кр i}$ и относительные величины максимальных касательных напряжений τ_i отн. — $\tau_i(0)/\tau_1(0)$ приведены в табл. II.6. Как следует из приведенных в таблице данных, возбудимость высших собственных форм крутильных колебаний резко убывает, что объясняется уменьшением амплитуды колебаний при высших собственных формах в случае равенства максимальных касательных напряжений. Возбудимость высших форм при действии равномерно распределенной нагрузки уменьшается быстрее, чем при действии сосредоточенного на вершине момента, так как при высших формах равномерно распределенная нагрузка на одних участках по высоте лопатки поддерживает колебания, на других — тормозит. Эти соображения легко подтверждаются аналитически. Действительно, из формулы (XIII.94) получим

$$\frac{\tau_i(0)}{\theta_i(1)p_i} = c \sqrt{\frac{J_p \gamma G}{gT}}. \quad (\text{XIII.97})$$

Так как скорости различных точек периферийного сечения пропорциональны $\theta_i(1)p_i$, то из формулы (XIII.97) следует, что при условии $\tau_i(0) = \tau_1(0)$ равенство $\theta_i(1)p_i = \theta_1(1)p_1$ соблюдается независимо от номера собственной формы. Таким образом, при равенстве максимальных касательных напряжений имеет место следующее соотношение для амплитуд колебаний вершины лопатки при различных собственных формах:

$$\theta_i(1) = \theta_1(1)(p_1/p_i). \quad (\text{XIII.98})$$

Как и при изгибных колебаниях, связь между максимальными напряжениями и скоростью кромки (например, входной) перифе-

рийного сечения лопатки носит универсальный характер. В п. XII.1 указывалось что имеют место приближенные формулы $J_p = a_1 b^3 c$, $T = a_2 b c^3$, где a_1 и a_2 — постоянные, зависящие от формы поперечного сечения. Принимая во внимание, что скорость входной кромки периферийного сечения $V_{кр i}$ равна $V_{кр i} = \kappa' \theta_i(1) p_i b$, (где κ' — безразмерный коэффициент, равный отношению расстоянию центра кручения от входной кромки) на основании формулы (XIII.97) получим

$$\tau_i(0) = V_{кр i} \kappa' \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} G \sqrt{\frac{\gamma}{gG}} = V_{кр i} \kappa_{кр} G \sqrt{\frac{\gamma}{gG}}, \quad (\text{XIII.99})$$

где $\kappa_{кр}$ — параметр, сравнительно слабо зависящий от формы поперечного сечения лопатки; $\sqrt{\gamma/(gG)}$ — величина, практически неизменная для всех лопаточных материалов.

Практика эксплуатации показывает, что в ряде случаев совпадение частот первого тона внутрипакетных крутильных колебаний с частотой nz может оказаться опасным и в соответствии с принятыми в стационарном турбостроении нормами не допускается. Это объясняется тем, что для одной из форм внутрипакетных крутильных колебаний пакетный множитель оказывается сравнительно близким к единице независимо от соотношения z/z_1 (как и при изучении внутрипакетных изгибных колебаний не рассматриваем случай $z/z_1 \rightarrow 1$, для которого велика опасность синфазных колебаний) и подтверждается данными табл. XIII.3, где показана зависимость $\mu_{вн}$ от z/z_1 для различных собственных форм внутрипакетных крутильных колебаний пакета из шести лопаток.

Таблица XIII.3

i	z/z_1						$\mu_{вн max}$	$(z/z_1)_{max}$
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95		
1	0,064	0,043	0,203	0,672	0,703	0,414	0,785	0,86
2	0	0,206	0,600	0,644	0,075	0,205	0,709	0,76
3	0,434	0,615	0,656	0,137	0,268	0,198	0,707	0,66
4	0	0,887	0,325	0,469	0,091	0,262	0,890	0,61
5	1	0,342	0,471	0,162	0,358	0,271	1	0,50

Проведенное сопоставление сравнительной возбудимости изгибных и крутильных колебаний носит чисто качественный характер, так как выше отмечалось, что фактически колебания носят связанный изгибно-крутильный характер, что существует зависимость демпфирующих сил от уровня динамических напряжений, формы и частоты колебаний, а возмущающих сил — от чисел M , Sh , отношения z/z_1 и т.д. Тем не менее, общая тенден-

ция, заключающаяся в уменьшении возбудимости высших собственных форм, сохраняется и при колебаниях реальных лопаточных венцов. Эта тенденция находит отражение и в практике вибрационной настройки лопаток стационарных паровых турбин, при проведении которой обеспечивают достаточные запасы от частоты nz для первого и второго тона изгибных синфазных колебаний пакетов (за исключением случаев, когда $\mu \ll 1$), а также для первого тона внутрипакетных крутильных и внутрипакетных изгибных колебаний пакетов лопаток.

ХIII.9. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СЛУЧАЕ ПРИМЕНЕНИЯ ДИАФРАГМЫ ПЕРЕМЕННОГО ШАГА ИЛИ НЕРАДИАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ НАПРАВЛЯЮЩИХ ЛОПАТОК

Одним из способов уменьшения опасности колебаний с частотой nz является применение так называемой диафрагмы переменного шага [120, 153, 203]. Целесообразность использования подобной диафрагмы объясняется тем, что с помощью специального сбоя шагов можно уменьшить (вплоть до нуля) амплитуду возмущающей силы с частотой nz . Правда, при этом возникнут возмущающие силы с частотами $n(z \pm s)$, где s — целое число, и закон изменения шагов должен обеспечить отсутствие значительных по величине возмущающих сил с этими частотами. В настоящем параграфе в основном будем следовать работе [203].

Если считать, что возмущения, вносимые направляющими лопатками, приводят к синусоидальному изменению параметров потока по шагу, и принять, что величина возмущений не зависит от небольшого различия в шагах лопаток, то при установке обычной диафрагмы возмущающая сила η изменяется по окружности по закону

$$\eta(\varphi) = \eta_{\max} \cos z\varphi,$$

а при установке диафрагмы переменного шага — по закону

$$\eta'(\varphi) = \eta_{\max} \cos[z\varphi + f(\varphi)], \quad (\text{ХIII.100})$$

где φ — угловая координата; f — функция, определяемая принятым законом изменения сбоя шагов.

Если отклонения в шагах будут изменяться по окружности по синусоидальному закону [$f(\varphi) = a \sin \varphi$], то амплитуды возмущающих сил с различными частотами — коэффициенты ряда Фурье в разложении функции $\eta'(\varphi)$ — будут выражаться через функции Бесселя первого рода различных порядков [52, 159].

Диафрагма переменного шага с синусоидальным законом изменения отклонений в шагах по окружности обладает определенными недостатками с точки зрения технологии: для облегчения изготовления и контроля желательно иметь лишь несколько различных шагов, т. е. диафрагма должна состоять из нескольких секторов с одинаковыми внутри каждого сектора шагами. Гармонический анализ в каждом конкретном случае может быть осуще-

ствлен с помощью ЭВМ, однако можно получить и некоторые общие соотношения, облегчающие проведение сравнительного анализа достоинств и недостатков рассматриваемой конструкции.

Поскольку в дальнейшем нас будет интересовать только относительная (по сравнению с обычной диафрагмой) величина возмущающих сил и динамических напряжений, возникающих при установке диафрагмы переменного шага, то будем рассматривать силовое воздействие на лопатку как импульсное, причем примем, что величина импульсов не зависит от небольшого изменения шагов. Кроме того, будем считать, что декремент не зависит от уровня напряжений, и первоначально предположим, что амплитуда колебаний сохраняется неизменной на протяжении всего оборота.

Рассмотрим колебания отдельной лопатки и учтем, что работа за оборот z равномерно расположенных по окружности импульсов пропорциональна величине

$$\sum_{n=0}^{z-1} \sin\left(\varphi_0 + \frac{2\pi kn}{z}\right), \quad (\text{ХIII.101})$$

где φ_0 — начальный фазовый угол, определяемый из условия максимума работы возмущающих сил; k — кратность колебаний лопатки.

Используя формулы (ХIII.65), найдем

$$\sum_{n=0}^{z-1} \sin\left(\varphi_0 + \frac{2\pi kn}{z}\right) = \frac{\sin k\pi}{\sin(k\pi/z)} \sin\left[\varphi_0 + \frac{(z-1)k\pi}{z}\right], \quad (\text{ХIII.101a})$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{z-1} \sin\left(\varphi_0 + \frac{2\pi kn}{z}\right) &= 0 \quad \text{при } k \neq sz; \\ \sum_{n=0}^{z-1} \sin\left(\varphi_0 + \frac{2\pi kn}{z}\right) &= z \quad \text{при } k = sz, \end{aligned} \right\} \quad (\text{ХIII.102})$$

где s — целое число.

Вторую из формул (ХIII.102) можно получить, раскрывая неопределенность в выражении (ХIII.101a) по правилу Лопиталья.

Используем введенное в п. ХIII.4 определение пакетного множителя для оценки эффективности диафрагмы переменного шага. В настоящем параграфе будем считать пакетный множитель равным отношению работы, совершаемой импульсами от кромок сопел диафрагмы переменного шага при колебаниях лопатки с k -й кратностью, к работе, совершаемой импульсами от кромок сопел обычной диафрагмы с шагами t при колебаниях лопатки с кратностью, равной z . Пусть диафрагма переменного шага со-

ставлена из m секторов, причем I сектор включает z_I направляющих лопаток с шагами t_I , II сектор — z_{II} направляющих лопаток с шагами t_{II} и т.д.

В соответствии с введенным определением пакетный множитель при учете импульсов от кромок сопл только I сектора будет равен

$$\mu_I = \frac{\sum_{n=0}^{z_I-1} \sin\left(\varphi_0 + \frac{2\pi n t_I}{z t}\right)}{z} = \frac{\sin[\pi k z_I t_I/(z t)]}{z \sin[\pi k t_I/(z t)]} \sin \varphi_I, \quad (\text{XIII } 103)$$

где $\varphi_I = \varphi_0 + [\pi k (z_I - 1) t_I]/(z t)$

Аналогичные вычисления для лопаток только j -го сектора дадут следующие результаты

$$\mu_j = \frac{\sin[\pi k z_j t_j/(z t)]}{z \sin[\pi k t_j/(z t)]} \sin \varphi_j, \quad (\text{XIII } 104)$$

где

$$\varphi_j = \varphi_0 + [2\pi k (z_1 - 1) t_1]/(z t) + (2\pi k z_1 t_{11})/(z t) + \dots + [\pi k (z_j + 1) t_j]/(z t)$$

Если выбрать значение φ_0 из условия максимума работы возмущающих сил для всех секторов, то пакетный множитель при колебаниях лопатки с k й кратностью будет равен

$$\mu = \frac{1}{z} \sqrt{\left[\sum_{j=1}^m \frac{\sin[\pi k z_j t_j/(z t)]}{\sin[\pi k t_j/(z t)]} \cos(\varphi_j - \varphi_1) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^m \frac{\sin[\pi k z_j t_j/(z t)]}{\sin[\pi k t_j/(z t)]} \sin(\varphi_j - \varphi_1) \right]^2}. \quad (\text{XIII } 105)$$

На рис. XIII 4 в соответствии с формулой (XIII 104) построена зависимость величины μ_j от кратности колебаний для различных относительных величин j -го сектора (при построении принято, что $\sin \varphi_j = 1$)

Как следует из рис. XIII 4, максимум μ_j равен z_j/z , т.е. уменьшается вместе с z_j . При малых величинах z_j/z значение μ_j при изменении кратности колебаний на единицу происходит значительно медленнее, чем при больших значениях z_j/z . Для того чтобы при всех кратностях k величина μ , определяемая формулой (XIII 105), незначительно превышала любую из величин μ_j , необходимо обеспечить резкое увеличение разницы в шагах направляющих лопаток по мере увеличения числа секторов m диафрагмы переменного шага. Видно также, что при большем числе направляющих лопаток в ступени одинаковое снижение величины μ может быть обес-

печено при меньшем в процентном отношении изменении шагов, поскольку важна разность в «приведенных» числах направляющих лопаток для каждого из секторов (k_j), т.е. в числе лопаток с шагом t_j , которые разместились бы по всей окружности

Рассмотрим, при каких условиях будет обеспечено наибольшее снижение уровня динамических напряжений. Учитывая приведенные в п. XIII 8 данные о сравнительной возбудимости различных собственных форм колебаний, будем считать, что динамические напряжения в лопатках при одинаковых амплитудах возмущающих сил изменяются обратно пропорционально крат-

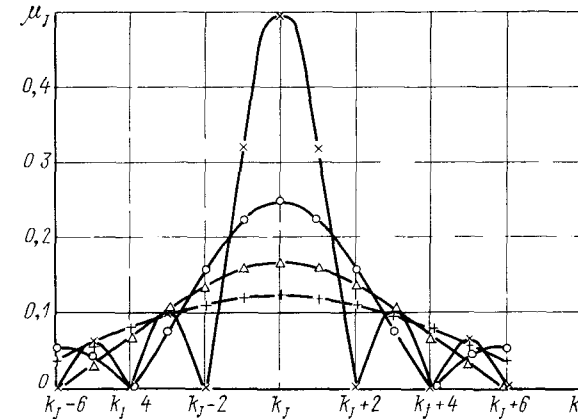


Рис. XIII 4 Зависимость пакетного множителя от кратности колебаний при различных относительных величинах j -го сектора

× — $z_j/z = 1/2$ ○ — $z_j/z = 1/4$
△ — $z_j/z = 1/6$ + — $z_j/z = 1/8$

ности колебаний. Тогда отношение динамических напряжений при колебаниях с кратностями k и k_i

$$\sigma(k_i)/\sigma(k_j) = \mu(k_i) k_j / [\mu(k_j) k_i] \quad (\text{XIII } 106)$$

Таким образом, равенство динамических напряжений в определенном диапазоне частот будет иметь место при условии, что в этом диапазоне выполняется следующее соотношение

$$\mu \sim k \quad (\text{XIII } 107)$$

Если разница приведенных чисел лопаток в различных секторах выбрана настолько большой, что $\mu(k_i) \approx \mu_j(k)$, то для выполнения условия (XIII 107) необходимо, чтобы каждый из секторов занимал примерно одинаковую часть окружности α_j . Действительно, если $\alpha_i - \alpha_j = 2\pi/m$, то

$$\mu_i(k_i) = z_i/z = k_i/(zm), \quad \mu_j(k_j) = z_j/z = k_j/(zm)$$

В этом случае при выполнении условий $\mu(k_i) \approx \mu_i(k_i)$, $\mu(k_j) \approx \mu_j(k_j)$ в соответствии с формулой (XIII.106) получим в определенном диапазоне частот

$$\sigma(k_i)/\sigma(k_j) \approx 1, \quad \sigma_{\text{отн}} = \sigma(k_i)/\sigma_0 = 1/m, \quad (\text{XIII.108})$$

где σ_n — динамические напряжения при колебаниях с частотой nz в случае использования обычной диафрагмы

Результаты расчета диафрагмы переменного шага, состоящей из шести секторов, приведены на рис. XIII.5 [203]. Величины μ и $\sigma(k_i)$ подсчитывались соответственно по формулам (XIII.105) и (XIII.106). Как следует из приведенных на рис. XIII.5 данных,

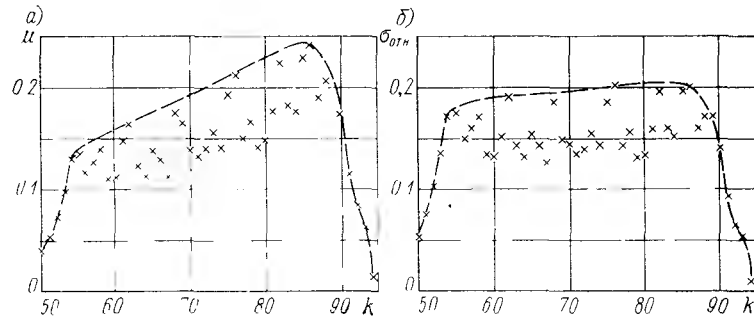


Рис. XIII.5 Зависимость величины пакетного множителя (а) и относительных динамических напряжений (б) от кратности колебаний для диафрагмы переменного шага из шести секторов

при принятых допущениях значение пакетного множителя μ не превосходит 0,25, а относительная величина динамических напряжений $\sigma_{\text{отн}} = 0,2$ и остается примерно постоянной в широком диапазоне частот ($k = 54 \div 90$)

Практически применение подобной диафрагмы ограничивается несколькими причинами. Во-первых, возбудимость различных собственных форм изгибных и крутильных колебаний лопаток может оказаться различной и существенно отличающейся от принятого выше предположения. При наличии широкого спектра возмущающих сил одновременно может возбудиться несколько собственных форм колебаний, в результате чего динамические напряжения могут уменьшиться незначительно, а в некоторых, наиболее неблагоприятных случаях даже возрасти. Во-вторых, существенное изменение шагов в разных секторах связано с необходимостью использования различных профилей лопаток, что нежелательно. Если же ограничиться применением лопаток с одинаковыми профилями, то большие отклонения в шагах будут сопровождаться изменением как интенсивности кромочных следов по секторам и на их границах, так и расхода и степени реакции по различным секторам, что может привести к увеличению напряжений в рабочих лопатках при низкочастотных колебаниях.

Свободной от указанных недостатков является диафрагма переменного шага, состоящая из двух секторов. В случае весьма малой разницы в шагах она позволяет практически в два раза уменьшить пакетный множитель. Расчеты показывают, что при $z = 80$ по формуле (XIII.105) имеем $\mu = 0,53$ при отклонениях в шагах менее 2% от среднего значения и даже при $z = 32$ $\mu = 0,56$ при отклонениях в шагах менее 4%.

Эффективность применения диафрагмы переменного шага может уменьшиться в том случае, когда декремент колебаний и число направляющих лопаток относительно велики, она уменьшается также из-за взаимного влияния колебаний лопаток при наличии разброса в их парциальных частотах

Уменьшение эффективности диафрагмы переменного шага вследствие первой причины легко оценить аналитически. Для этого нужно отказаться от принятого ранее предположения о неизменности амплитуды колебаний лопатки на протяжении оборота и рассмотреть закон изменения амплитуды за оборот аналогично тому, как это было выполнено в п. XIII.3 при изучении колебаний лопаток при парциальном подводе пара. Проведенные расчеты позволяют с достаточной для практики точностью считать [203], что максимальные напряжения за оборот при колебаниях с кратностью k возникают после прохождения сектора, для которого $k_i \approx k$. Если считать, что $k_i \approx z$ и пренебречь влиянием остальных секторов, то максимальные динамические напряжения после прохождения j -го сектора [203]

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{отн}} = \sigma_{\text{max}}/\sigma_0 = e^{\delta(z-z_j)}(e^{\delta z_j} - 1)/(e^{\delta z} - 1). \quad (\text{XIII.109})$$

В частности, для диафрагмы из двух секторов, когда $z_j \approx z/2$, получим

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{отн}} = e^{\delta z/2}(e^{\delta z/2} - 1)/(e^{\delta z} - 1). \quad (\text{XIII.110})$$

При увеличении δz имеем $\sigma_{\text{max}}^{\text{отн}} \rightarrow 1$, хотя при $\delta \rightarrow 0$ в данном случае $\sigma_{\text{max}}^{\text{отн}} \approx 0,5$. Физически это объясняется тем, что при больших значениях δz напряжения в рабочих лопатках успевают возрасти до максимального установившегося значения за время прохождения j -го сектора и отсутствие подвода энергии на остальной части окружности не отражается на величине максимальных напряжений за оборот. Уменьшить неблагоприятное возрастание динамических напряжений в лопатках при больших значениях δz можно за счет использования диафрагмы переменного шага из четырех секторов, в которых шаги в I и III, а также во II и IV секторах совпадают. В этом случае процесс нарастания и убывания амплитуд колебаний будет дважды повторяться за оборот, а максимальные напряжения будут меньше, чем при наличии только двух секторов. Значение $\sigma_{\text{max}}^{\text{отн}}$ может быть в этом случае подсчитано по формуле (XIII.109) при условии уменьшения величин z и z_j в два раза

Степень снижения эффективности диафрагмы переменного шага из-за взаимодействия колебаний лопаток с различными парциальными частотами зависит от связи колебаний различных лопаток (см. п. XI.12) и разброса в их парциальных частотах и может существенно отличаться для различных комплектов лопаток.

Другим конструктивным способом снижения уровня динамических напряжений в рабочих лопатках при колебаниях с частотой nz является нерадиальная установка направляющих лопаток. При этом в различных сечениях по высоте рабочих лопаток будут действовать возмущающие силы с частотой nz , но с определенным сдвигом по фазе, что может уменьшить их суммарную работу. Вообще говоря, из-за закрутки рабочих лопаток, различия в величине осевых зазоров по высоте, влияния концевых потерь и других причин может возникнуть некоторый сдвиг по фазе и в случае радиальной установки направляющих лопаток, однако он может быть в определенной мере изменен за счет нерадиальной установки лопаток. В дальнейшем не будем уточнять причины, в общем случае весьма сложные [153], вызвавшие сдвиг по фазе возмущающих сил в различных поперечных сечениях рабочих лопаток, считая, что величина его определена совместным действием указанных выше факторов.

Для получения качественных зависимостей примем, что сдвиг по фазе при действии возмущающих сил с частотой nz изменяется по высоте лопатки по линейному закону:

$$\eta(\zeta, t) = \eta \cos(p_i t - \gamma \zeta) = \eta \cos p_i t \cos \gamma \zeta + \eta \sin p_i t \sin \gamma \zeta, \quad (\text{XIII.111})$$

где $p_i = z\omega = 2\pi n z$

Считая, что колебания лопатки происходят по закону $V = AZ_i(\zeta) \sin(p_i t + \alpha)$, как и в п. XIII.1, найдем работу возмущающих сил за период колебаний:

$$R_1 = A\eta l \cos \alpha \int_0^1 Z_i(\zeta) \cos \gamma \zeta d\zeta \int_0^{2\pi} \cos^2 p_i t d(p_i t) - \\ - A\eta l \sin \alpha \int_0^1 Z_i(\zeta) \sin \gamma \zeta d\zeta \int_0^{2\pi} \sin^2 p_i t d(p_i t).$$

Выбирая угол α из условия максимума работы возмущающих сил за период, найдем

$$R_1 = \pi A\eta l \sqrt{\left[\int_0^1 Z_i(\zeta) \cos \gamma \zeta d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^1 Z_i(\zeta) \sin \gamma \zeta d\zeta \right]^2}. \quad (\text{XIII.112})$$

Как видно, отличие формулы (XIII.112) от формулы (XIII.13) заключается в наличии множителя

$$K_i = \frac{\sqrt{\left[\int_0^1 Z_i(\zeta) \cos \gamma \zeta d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^1 Z_i(\zeta) \sin \gamma \zeta d\zeta \right]^2}}{\int_0^1 Z_i(\zeta) d\zeta}, \quad (\text{XIII.113})$$

характеризующего изменение работы возмущающих сил по сравнению со случаем синфазного действия равномерно распределенной по высоте лопатки нагрузки.

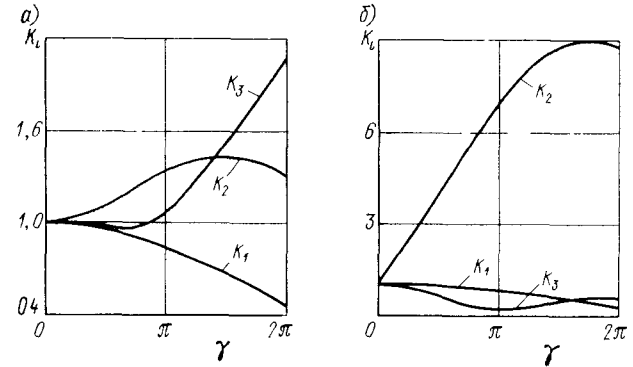


Рис. XIII.6 Зависимость коэффициентов K_i от сдвига фаз γ для собственных частот консольной лопатки (а) и лопатки с опертой вершиной (б)

Повторив выкладки, аналогичные выполненным в п. XIII.1, получим, что динамические напряжения при различных собственных формах колебаний лопаток будут определяться формулой

$$\sigma_i(0) = 2\pi \sigma_{ст}(0) C_i K_i / \delta, \quad (\text{XIII.114})$$

где C_i — коэффициенты, указанные в табл. II.4.

Зависимость коэффициентов K_i от сдвига фаз γ для трех первых собственных частот консольной лопатки и лопатки с опертой вершиной приведены на рис. XIII.6, зависимость коэффициентов $C_i K_i$ для этих же форм — на рис. XIII.7.

Как следует из рис. XIII.6 и XIII.7, при наличии сдвига по фазе между возмущающими силами, действующими в различных поперечных сечениях лопатки, динамические напряжения при первой собственной форме несколько уменьшаются, а при высших формах могут как уменьшаться, так и увеличиваться. Даже при значительных расфазировках возбудимость высших собственных

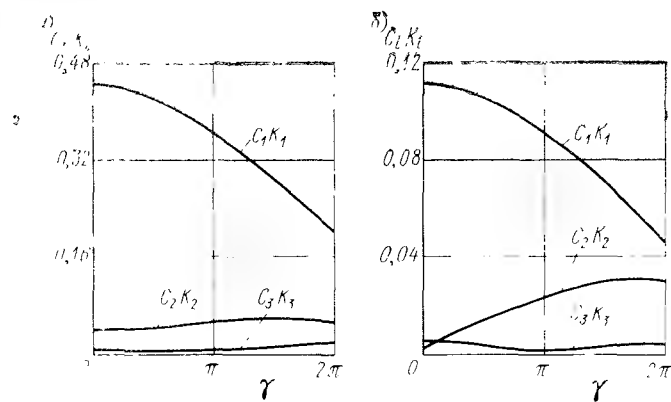


Рис. XIII.7. Зависимость коэффициентов $C_i K_i$ от сдвига фаз γ для собственных частот консольной лопатки (а) и лопатки с опертой вершиной (б)

форм остается значительно меньше, чем первой формы. Качественно аналогичные результаты легко могут быть получены и для крутильных колебаний лопаток.

ХIII.10. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК, СОЕДИНЕННЫХ УПРУГОФРИКЦИОННЫМИ СВЯЗЯМИ

В п. ХIII.6 было показано, что при соединении лопаток замкнутыми на круг связями и возбуждении колебаний неравномерностью потока пакетный множитель для подавляющего большинства собственных форм оказывается равным нулю. В то же время при соединении всех лопаток ступени упругими связями в лопатках и связях при работе могут возникнуть значительные статические напряжения, что является препятствием к замыканию всех лопаток на круг (п. IV.3). Статические напряжения в лопатках и связях могут быть ограничены при использовании упругофрикционных связей, обеспечивающих замыкание лопаток за счет усилий, возникающих по контактным поверхностям в поле центробежных сил или при сборке. Уменьшая в определенных пределах контактные усилия, можно предотвратить опасный рост статических напряжений как в связях, так и в лопатках и одновременно увеличить рассеяние энергии в зоне контакта при колебаниях. Конструктивное выполнение упругофрикционных связей может быть весьма различным (см. пп. I.1, XVI.1).

При возбуждении, вызванном неравномерностью потока по окружности колеса, наибольшую опасность для лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, представляют внутрипакетные колебания с числом узловых диаметров, совпадающим с кратностью колебаний. При этом связи испытывают динамические напряжения растяжения—сжатия, поскольку амплитуды лопаток

изменяются по окружности по закону $\sin(2\pi m/z_1)$, где n — номер лопатки; m — число узловых диаметров; z_1 — число лопаток на колесе. Так как силы, препятствующие взаимному смещению лопаток или лопаток и связей, пропорциональны усилиям, действующим по контактным поверхностям, и при заданной частоте вращения являются вполне определенными конечными величинами, а силы, стремящиеся сместить лопатки друг относительно друга, пропорциональны амплитуде колебаний, то при малых амплитудах взаимное смещение лопаток и связей по всей контактной поверхности будет отсутствовать.

Правда, уже при сколь угодно малых амплитудах будет иметь место проскальзывание на отдельных участках контактных поверхностей (участках предварительного смещения), площадь которых будет возрастать по мере роста амплитуды колебаний, что вызовет увеличение рассеяния энергии [130].

Рассмотрим зависимость рассеяния энергии в зоне контакта от амплитуды при внутрипакетных колебаниях лопаток, соединенных демпферными проволоками. Зона контакта лопатки и демпферной проволоки изображена на рис. ХIII.8, а, расчетная схема для определения рассеянной энергии — на рис. ХIII.8, б. Для получения качественных соотношений предположим, что рассеяние энергии в зоне контакта лопатки и проволоки будет описываться теми же уравнениями, что и рассеяние энергии в зоне контакта полосы, прижатой равномерным давлением к жесткому основанию и подвергающейся растяжению—сжатию периодически изменяющейся силой, приложенной к торцу полосы [130]. При вычислениях будем считать, что сила трения равна предельному максимальному значению на тех участках контактной поверхности, где имеется проскальзывание, и равна нулю там, где проскальзывание отсутствует; напряжения растяжения—сжатия равномерно распределены в поперечном сечении проволоки, в том числе и в зоне контакта¹.

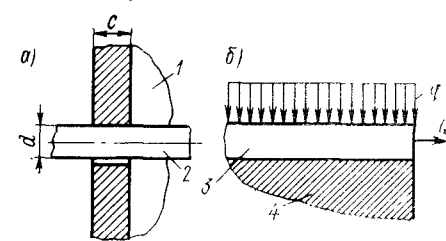


Рис. ХIII.8. Зона контакта лопатки и демпферной проволоки (а) и расчетная схема для определения рассеянной энергии в зоне контакта (б):

1 — лопатка; 2 — демпферная проволока; 3 — полоса; 4 — жесткое основание

¹ Это предположение не является достаточно строгим, если принять во внимание обычно имеющиеся соотношения между длиной c площадки контакта и диаметром d демпферной проволоки (рис. ХIII.8, а), однако оно может быть использовано для качественной оценки. Уточнение расчетной схемы, позволяющее вычисления, нецелесообразно и по той причине, что коэффициент трения в зоне контакта может существенно превосходить справочные значения.

Первоначально предположим, что выполняется соотношение

$$Q_{\max} < qvc,$$

где $Q_{\max}$ — амплитудное значение растягивающей (сжимающей) силы; q — контактное давление на единицу длины площадки контакта, Н/мм (рис. XIII.8, б); v — коэффициент трения; c — длина площадки контакта (рис. XIII.8, а).

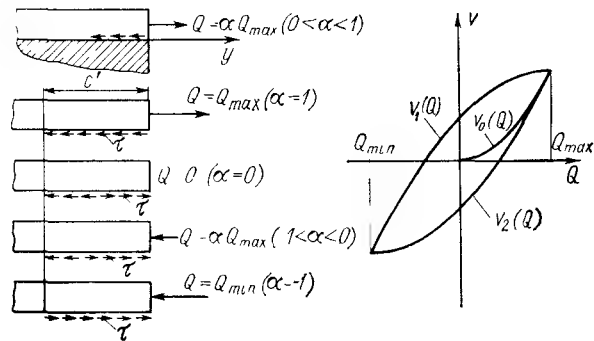


Рис. XIII.9. Зависимость v и τ от Q на протяжении цикла колебаний (связь расположена вблизи лопатки, находящейся в пучности)

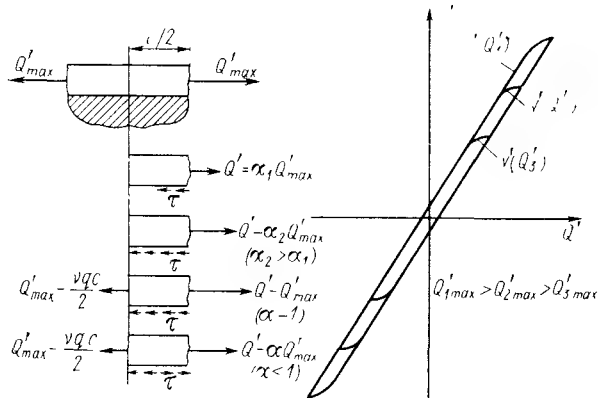


Рис. XIII.10. Зависимость v' и τ от Q' на протяжении цикла колебаний (связь расположена вблизи лопатки, находящейся в узле)

Будем считать, что имеют место внутриапакетные колебания с числом m узловых диаметров, и рассмотрим отдельно рассеяние энергии в зоне контакта проволоки и лопатки, расположенной в пучности колебаний $|\sin(2\pi m t/z_1)| = 1$ и в узле $|\sin(2\pi m t/z_1)| = 0$.

На рис. XIII.9 и XIII.10 изображена зависимость перемещения v сечения проволоки, совпадающего с границей площадки

контакта, от величины приложенного растягивающего усилия Q . На рис. XIII.9 и XIII.10 показано также распределение касательных напряжений τ в зоне контакта при изменении величины Q , т. е. при выполнении условия $Q = \alpha Q_{\max}$ ($-1 \leq \alpha \leq 1$).

На рис. XIII.9 $v_0(Q)$ означает перемещение при первом нагружении, $v_1(Q)$ — при разгрузке, $v_2(Q)$ — при последующем нагружении. В дальнейшем функции $v_1(Q)$ и $v_2(Q)$ периодически повторяются, если процесс колебаний установившийся. Принято, что $c > c' = Q_{\max}/(qv)$. При принятых упрощающих предположениях можно воспользоваться приведенными в работе [130] результатами, из которых следует, что $v_1(Q)$, $v_2(Q)$, а также энергия, рассеиваемая за цикл в зоне контакта (Ψ), описываются следующими формулами (см. рис. XIII.9):

$$v_1(Q) = \frac{1 + 2\alpha - \alpha^2}{4qvE_cF_c} Q_{\max}^2; \quad (\text{XIII.115})$$

$$v_2(Q) = \frac{\alpha^2 + 2\alpha - 1}{4qvE_cF_c} Q_{\max}^2; \quad (\text{XIII.116})$$

$$\Psi = \int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}} [v_1(Q) - v_2(Q)] d[\alpha Q_{\max}] = \frac{2Q_{\max}^3}{3qvE_cF_c}, \quad (\text{XIII.117})$$

где E_c , F_c — соответственно модуль упругости и площадь поперечного сечения связи.

Определим энергию, рассеиваемую в зоне контакта проволоки с лопаткой, находящейся в узле. В п. XI.10 было показано, что при внутриапакетных колебаниях с числом m узловых диаметров усилие в поперечном сечении проволоки, расположенном вблизи лопатки, находящейся в узле, в $1/[2 \sin(m\pi/z_1)]$ раз больше, чем усилие в поперечном сечении проволоки, расположенной вблизи лопатки, находящейся в пучности. Таким образом, выполняется соотношение

$$Q'_{\max} = Q_{\max}/[2 \sin(m\pi/z_1)],$$

при $m \ll z_1$ имеем

$$Q'_{\max} \approx Q_{\max} z_1 / (2\pi m).$$

До тех пор, пока выполняется условие $Q'_{\max} < qvc/2$, энергия, рассеянная на одной половине площадки контакта, может быть определена по формуле (XIII.117), а суммарная энергия рассеяния будет в два раза больше. После того как величина $Q'_{\max}$ станет больше, чем $qvc/2$, напряжения растяжения в сечении проволоки, совпадающем с центром площадки контакта, не будут уменьшаться до нуля, а перемещения v'_1 , v'_2 (рис. XIII.10) и рассеиваемая за цикл энергия Ψ' будут описываться более сложными зависимостями, чем (XIII.115) — (XIII.117). Проведя выкладки, аналогич-

ные сделанным в [130], нетрудно показать, что при $Q'_{\max} > qvc/2$ будут выполняться следующие соотношения ($Q' = \alpha Q'_{\max}$)

$$\left. \begin{aligned} v'_1(Q) &= \frac{Q'_{\max} c}{2E_c F_c} - \frac{qvc^2}{8E_c F_c} - \frac{(Q'_{\max})^2}{4qvc F_c} (1 + \alpha^2 - 2\alpha) \\ \text{при } 1 > \alpha > 1 - 2\alpha_{кр}; \quad \alpha_{кр} &= qvc/(2Q'_{\max}); \\ v'_1(Q') &= \frac{qvc^2}{8E_c F_c} + \frac{\alpha Q'_{\max} c}{2E_c F_c} \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII 118})$$

$$\left. \begin{aligned} v'_2(Q) &= -\frac{Q'_{\max} c}{2E_c F_c} + \frac{qvc^2}{8E_c F_c} + \frac{(Q'_{\max})^2}{4qvc F_c} (1 + \alpha^2 + 2\alpha) \\ \text{при } -1 < \alpha < -1 + 2\alpha_{кр}; \\ v'_2(Q') &= \frac{\alpha Q'_{\max} c}{2E_c F_c} - \frac{qvc^2}{8E_c F_c} \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII 119})$$

при $-1 + 2\alpha_{кр} < \alpha < 1$;

$$\Psi' = \int_{Q'_{\min}}^{Q'_{\max}} |v'_1(Q') - v'_2(Q')| d(\alpha Q'_{\max}) = \frac{Q'_{\max} qvc^2}{2E_c F_c} - \frac{q^2 v^2 c^3}{6E_c F_c} \quad (\text{XIII 120})$$

На рис. XIII 10 показана зависимость $v'(Q')$ для различных $Q'_{\max}$ при условии, что $Q'_{1\max} > Q'_{2\max} > Q'_{3\max}$

При $Q'_{\max} \gg qvc/2$

$$\Psi' \approx Q'_{\max} qvc^2 / (2E_c F_c);$$

при $Q_{\max} = qvc/2$

$$\Psi' = 2(Q'_{\max})^3 / (3qvc E_c F_c),$$

т.е. выражение совпадает с выражением (XIII.117)

Из сравнения формул (XIII.117) и (XIII 120) следует, что по мере увеличения силы $Q'_{\max}$ рассеяние энергии в зоне контакта возрастает медленнее, чем при малых амплитудах колебаний действительно, при $Q'_{\max} < qvc/2$ $\Psi' \sim (Q'_{\max})^3$, в то время как при $Q'_{\max} \gg qvc/2$ $\Psi' \sim Q'_{\max}$.

По-другому изменится рассеяние энергии в зоне контакта проволоки с лопаткой, находящейся в пучности, когда усилие, действующее от связи на лопатку, достигнет предельного значения

$$Q_{\text{пред}} = qvc, \quad (\text{XIII 121})$$

то дальнейшее возрастание амплитуды колебаний лопатки в зоне контакта не будет сопровождаться увеличением действующего на нее усилия. Таким образом, эквивалентная жесткость связей на растяжение начнет уменьшаться, относительная величина прогиба

лопатки в месте установки связей возрастет, а значит, увеличится и рассеяние энергии в контактной зоне.

Так как сила трения, препятствующая взаимному смещению лопатки и связи, является определенной конечной величиной, то динамические напряжения в лопатке, соответствующие началу проскальзывания по всей контактной поверхности ($\sigma_{\text{кр}}$), будут тем меньше, чем больше усилие, действующее от лопатки на связи при единичных максимальных напряжениях в лопатках, т.е. чем больше коэффициент D , определяемый формулой (XI 143). В п. XI 11 было показано, что величина D зависит от относительной жесткости связей, места расположения связи по высоте лопатки и формы колебаний. Кроме того, величина $\sigma_{\text{кр}}$ будет зависеть от центробежной силы связей, коэффициента трения в зоне контакта, конструкции связей, их числа и т.д.

В ряде встречающихся на практике случаев величина $\sigma_{\text{кр}}$ может оказаться сравнительно небольшой. Например, если считать, что связи, установленные на вершине, являются практически нерастяжимыми, то прогиб лопатки при внутрипакетных колебаниях будет определяться формулой (XI 29)

$$v_i(\xi) - A_i Z_i(\xi) = A_i \{U(\rho_i) - [U(\rho_i) V(\rho_i) / V(\rho_i) \xi]\},$$

где A_i — постоянная, пропорциональная амплитуде колебаний

Используя выражение для собственной формы колебаний, найдем

$$Q(1) = \frac{EJ}{l^3} \frac{d^3 v_i(1)}{d\xi^3} = \frac{EJ}{l^3} A_i \rho_i^3 \left[V(\rho_i) - \frac{U(\rho_i) S(\rho_i)}{V(\rho_i)} \right].$$

Так как в соответствии с формулой (XIII 121) предельное значение усилия, действующего от связи на лопатку, равно $Q_{\text{пред}} = Q(1) = qvc = Pv$, где P — центробежная сила шага связи, то можно найти значение постоянной A_i , определяющей предельное усилие $Q_i(1)$.

$$A_i = \frac{Pvl^3}{EJ} \frac{V(\rho_i)}{\rho_i^3 [V^2(\rho_i) - U(\rho_i) S(\rho_i)]}.$$

При найденном значении постоянной A напряжения в корневом сечении лопатки составляют

$$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_i(0) = \frac{EJ}{l^2 W} A_i Z_i''(0) = \frac{EJ}{l^2 W} A_i \rho_i^2 = \frac{Pvl}{W} \frac{V(\rho_i)}{\rho_i [V^2(\rho_i) - U(\rho_i) S(\rho_i)]}. \quad (\text{XIII 122})$$

Для численного примера, рассмотренного в п. XI 11, при условии соединения лопаток замкнутыми на круг стальными демпферными проволоками диаметром 8 мм, расположенными в периферийных сечениях лопаток, при $v = 0,2$ и $\omega = 314$ с⁻¹ для колебаний типа B_0 можно найти: $\rho_1 = 3,927$; $P = 1520$ Н, $\sigma_{\text{кр}} = 26$ МПа. Фактическая величина $\sigma_{\text{пр}}$ может быть еще меньше, если учесть разрезку демпферных проволок на отдельные сегменты.

После начала проскальзывания по всей контактной поверхности возможно использование метода эквивалентной линеаризации [19] для определения эквивалентных «линейных» значений жесткости связей на растяжение и сил демпфирования, однако можно произвести и более простую приближенную оценку. Для достаточно жестких связей некоторое увеличение их податливости слабо изменяет частоту и собственную форму внутрипакетных колебаний лопатки (см. пп. XI.10 и XI.11), поэтому приближенно можно считать, что после начала проскальзывания собственная форма и частота колебаний, а также уровень динамических напряжений не изменяются ($\sigma_{пр}/Q_{пред} = \text{const}$), а вместо выражения (XI.133) в сечении лопатки, где установлена связь, должно быть записано равенство

$$K_{эв} v(\zeta_c) = Q_{пред}, \quad (\text{XIII.123})$$

где $K_{эв}$ — эквивалентная жесткость связей на растяжение, учитывающая проскальзывание в зоне контакта; $v(\zeta_c)$ — амплитуда колебаний лопатки в месте установки связи.

Величина $v(\zeta_c)$ может быть представлена в следующем виде:

$$v(\zeta_c) = v_1(\zeta_c) + v_2(\zeta_c), \quad (\text{XIII.124})$$

где $v_1(\zeta_c)$ — перемещение поперечного сечения лопатки из-за растяжимости связей; $v_2(\zeta_c)$ — перемещение поперечного сечения лопатки, находящейся в пучности, из-за ее проскальзывания относительно демпферной проволоки (или вообще упругофрикционной связи).

В соответствии с формулой (XI.133) существует следующая связь между $v_1(\zeta_c)$ и $Q_{пред}$:

$$v_1(\zeta_c) = -Q_{пред}/K_1 = -Q_{пред}t_c [E_c F_c 4 \sin^2(\pi m/z_1)].$$

Даже при небольших относительных значениях $v_2(\zeta_c)$ рассеяние энергии в зоне контакта может стать определяющим. Например, рассмотрим случай, когда $v_2(\zeta_c) = 0,1v_1(\zeta_c)$, т. е. когда эквивалентная жесткость проволоки на растяжение в соответствии с формулой (XIII.123) уменьшится всего на 10% [для сравнения отметим, что жесткость на растяжение в соответствии с формулой (XI.133) уменьшается примерно в 2,25 раза при переходе от колебаний с тремя к колебаниям с двумя узловыми диаметрами].

Энергия, рассеиваемая в зоне контакта за ту часть периода, когда происходит проскальзывание по всей контактной поверхности, определяется формулой [31, 171]

$$\Psi'' = 4v_2(\zeta_c) Q_{пред}. \quad (\text{XIII.125})$$

Используя формулы (XI.133), (XIII.121), (XIII.123) — (XIII.125) и условие $v_2(\zeta_c) = 0,1v_1(\zeta_c)$, получим

$$\Psi'' = \frac{0,1q^2c^2v^2t_c}{E_c F_c \sin^2(\pi m/z_1)}.$$

Энергия, рассеиваемая в зоне контакта до начала проскальзывания по всей контактной поверхности, в соответствии с формулой (XIII.117) составляет

$$\Psi = \frac{2}{3} \frac{Q_{пред}^3}{qvE_c F_c} = \frac{2q^2v^2c^3}{3E_c F_c}.$$

Таким образом,

$$\frac{\Psi''}{\Psi} = \frac{0,15t_c}{c \sin^2(\pi m/z_1)}.$$

Считая, например, что $t_c/c = 10$ и $m/z_1 = 0,05$, получим $\Psi'' \approx 61\Psi$, т. е. рассеяние энергии в зоне контакта резко возрастает после начала проскальзывания по всей контактной поверхности лопаток и связей.

Относительное увеличение амплитуды колебаний поперечного сечения лопатки, где установлена связь, после начала проскальзывания по всей контактной поверхности приводит к качественному отличию колебаний лопаток с упругофрикционными связями от колебаний, например, одномассовой системы при наличии сухого трения: в последнем случае и работа возмущающей силы P_v , и силы трения $P_{тр}$ пропорциональны амплитуде колебаний, поэтому при выполнении условия $P_v > 4P_{тр}/\pi$ амплитуда колебаний будет неограниченно возрастать [171].

Приведенные в настоящем параграфе данные свидетельствуют о том, что упругофрикционные связи могут быть использованы для существенного увеличения конструкционного демпфирования при колебаниях рабочих лопаток.

Глава XIV

ИЗГИБНЫЕ И КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

XIV.1. ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЗАКРУЧЕННЫХ ЛОПАТОК ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В работе [232] приведены экспериментальные результаты свидетельствующие о малом влиянии закрутки на первую собственную частоту изгибных колебаний консольного стержня прямоугольного поперечного сечения; аналогичные расчетные и экспериментальные результаты для лопаток турбомашин получены в работах [142, 218]. Учитывая, что во многих ступенях цилиндров высокого и среднего давления полный угол закрутки сравнительно мал, первоначально пренебрежем влиянием закрутки и будем рассматривать изгибные колебания «раскрученной» лопатки переменного поперечного сечения, совершающей колебания относительно минимальной оси инерции

Рассмотрим синфазные колебания пакета m лопаток, соединенных связью, расположенной на расстоянии ξ_c от корня лопатки. В соответствии с данными п. XI.7 можем записать граничные условия в месте установки связи в виде:

$$M_c = \frac{12E(m-1)J_c H_c \cos^2 \beta}{m l t_c} v'(\xi_c); \quad Q_c = m_c p^2 v(\xi_c), \quad (\text{XIV.1})$$

где M_c , Q_c — изгибающий момент и перерезывающая сила, действующие на лопатку от связей; H_c — поправочный коэффициент, зависящий от конструкции связей.

Обозначим решение уравнения (XI.12), соответствующее участку $0 \leq \xi < \xi_c$, через v_1 , а участку $\xi_c \leq \xi \leq 1$ — через v_2 .

Считая лопатку жестко заделанной в корневом сечении, получим следующие граничные условия при $\xi = 0$:

$$v = v_1' = 0; \quad v' = v_1' = 0. \quad (\text{XIV.2})$$

Аналогично изложенному в п. XI.8, в месте крепления связи ($\xi = \xi_c$) должны выполняться следующие условия:

$$v_1 = v_2 = v; \quad v_1' - v_2' = v'; \quad M_2 = M_1 + M_c; \quad Q_2 = Q_1 - Q_c, \quad (\text{XIV.3})$$

где M_1 и Q_1 , M_2 и Q_2 — изгибающие моменты и перерезывающие силы в сечениях лопатки, расположенных непосредственно ниже и выше места установки связи.

Так как

$$M_1 = \frac{EJ}{l^2} v_1''; \quad Q_1 = \frac{EJ}{l^3} (J v_1'''); \quad M_2 = \frac{EJ}{l^2} v_2''; \quad Q_2 = \frac{EJ}{l^3} (J v_2'''),$$

то, заменив в (XIV.3) M_1 , M_2 , M_c , Q_1 , Q_2 , Q_c их выражениями, получим следующие условия сопряжения в месте установки связей:

$$\left. \begin{aligned} v_1 = v_2 = v; \quad v_1' - v_2' = v', \\ J v_2'' = J v_1'' + J_0 k_c v'; \quad (J v_2''') - (J v_1''') - \frac{\gamma l^3 V_c p^2}{F g} v, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV.4})$$

где J_0 — минимальный момент инерции корневого сечения лопатки; V_c — объем шага связи; k_c — коэффициент, определяемый формулой

$$k_c = 12(m-1)H_c J_c l \cos^2 \beta (m J_0 l_c).$$

Поскольку рассматривается случай соединения лопаток одной связью, расположенной на расстоянии ξ_c от корня, то граничные условия на вершине лопатки ($\xi = 1$) имеют вид:

$$v'' = v_2'' = 0; \quad (J v'')' - (J v_2'')' = 0. \quad (\text{XIV.5})$$

Пусть $v_i(\xi)$ и $v_j(\xi)$ — функции, определяющие соответственно i -ю и j -ю собственные формы колебаний лопаток, удовлетворя-

ющие дифференциальному уравнению (XI.12), а p_i и p_j — собственные частоты колебаний. Тогда

$$(J v_i'')' - \frac{\gamma l^4 F}{g E} p_i^2 v_i; \quad (J v_j'')' = \frac{\gamma l^4 F}{g E} p_j^2 v_j. \quad (\text{XIV.6})$$

Умножим первое из уравнений (XIV.6) на v_j и проинтегрируем от нуля до единицы:

$$\int_0^1 v_j (J v_i'')'' d\xi = \frac{\gamma l^4}{g E} p_i^2 \int_0^1 F v_i v_j d\xi. \quad (\text{XIV.7})$$

Пронтегрируем левую часть равенства (XIV.7) по частям, учитывая, что в силу условий (XIV.4) функции $J v''$ и $(J v'')'$ имеют разрыв в точке $\xi = \xi_c$. В связи с этим представим интеграл в левой части равенства (XIV.7) в виде суммы двух интегралов, т. е. запишем следующее равенство:

$$\int_0^{\xi_c} v_j (J v_{i1}'')'' d\xi + \int_{\xi_c}^1 v_j (J v_{i2}'')'' d\xi = \frac{\gamma l^4}{g E} p_i^2 \int_0^1 F v_i v_j d\xi.$$

После четырехкратного интегрирования по частям получим:

$$\left\{ (J v_{i1}') v_{j1} - J v_{i1} v_{j1}' + J v_{i1} v_{j1}' - (J v_{j1}') v_{i1} \right\} \Big|_0^{\xi_c} + \left\{ (J v_{i2}') v_{j2} - J v_{i2} v_{j2}' + J v_{i2} v_{j2}' - (J v_{j2}') v_{i2} \right\} \Big|_{\xi_c}^1 + \int_0^1 v_i (J v_j'')'' d\xi = \frac{\gamma l^4}{g E} p_i^2 \int_0^1 F v_i v_j d\xi, \quad (\text{XIV.8})$$

причем

$$\int_0^1 v_i (J v_j'')' d\xi = \int_0^{\xi_c} v_{i1} (J v_{j1}'')'' d\xi + \int_{\xi_c}^1 v_{i2} (J v_{j2}'')'' d\xi.$$

Функции v_i и v_j удовлетворяют граничным условиям (XIV.2) и (XIV.5) и условиям (XIV.4) в месте установки связи. Воспользовавшись этими условиями, из уравнения (XIV.7) получим

$$(p_i^2 - p_j^2) \int_0^1 F v_i v_j d\xi + (p_i^2 - p_j^2) \frac{V_c}{l} v_i(\xi_c) v_j(\xi_c) = 0.$$

Так как $p_i \neq p_j$, то выполняется следующее равенство:

$$\int_0^1 F v_i v_j d\xi + \frac{V_c}{l} v_i(\xi_c) v_j(\xi_c) = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Разделив обе части равенства на площадь корневого сечения лопатки F_0 и введя обозначение $v_c = V_c/(lF_0)$, получим

$$\int_0^1 \frac{F}{F_0} v_i v_j d\zeta + v_c v_i(\zeta_c) v_j(\zeta_c) = 0 \quad \text{при } i \neq j. \quad (\text{XIV.9})$$

Формула (XIV.9) представляет собой условие ортогональности различных собственных форм — решений дифференциального уравнения (XI.12).

Если лопатки соединены n связями, то условие ортогональности примет вид

$$\int_0^1 \frac{F}{F_0} v_i v_j d\zeta + \sum_n v_{cn} v_i(\zeta_{cn}) v_j(\zeta_{cn}) = 0. \quad (\text{XIV.9a})$$

Наконец, для отдельной лопатки переменного сечения условие ортогональности собственных форм окажется следующим:

$$\int_0^1 \frac{F}{F_0} v_i v_j d\zeta = 0, \quad \text{или} \quad \int_0^l F v_i v_j dz = 0. \quad (\text{XIV.9б})$$

Найдем используемые в дальнейшем условия ортогональности кривизны упругой оси при различных собственных формах колебаний лопатки переменного сечения.

Ограничиваясь двукратным интегрированием по частям левой части уравнения (XIV.7), получим

$$\begin{aligned} & [(Jv_{i1}') v_{j1} - Jv_{i1}' v_{j1}] \Big|_0^{\zeta_c} + [(Jv_{i2}') v_{j2} - Jv_{i2}' v_{j2}] \Big|_{\zeta_c}^1 + \\ & + \int_0^1 J v_i'' v_j'' d\zeta = \frac{\gamma l^4}{gE} p_i^2 \int_0^1 F v_i v_j d\zeta. \end{aligned}$$

Воспользовавшись условиями (XIV.2), (XIV.4) и (XIV.5), найдем

$$\begin{aligned} J_0 k_c v_i'(\zeta_c) v_j'(\zeta_c) + \frac{\gamma l^3 V_c p_i^2}{gE} v_i(\zeta_c) v_j(\zeta_c) + \int_0^1 J v_i'' v_j'' d\zeta = \\ = \frac{\gamma l^4}{gE} p_i^2 \int_0^1 F v_i v_j d\zeta. \end{aligned} \quad (\text{XIV.10})$$

Используя условие ортогональности собственных форм (XIV.9), из уравнения (XIV.10) получим

$$\int_0^1 \frac{J}{J_0} v_i'' v_j'' d\zeta + k_c v_i'(\zeta_c) v_j'(\zeta_c) = 0. \quad (\text{XIV.11})$$

При наличии нескольких связей условие ортогональности примет вид

$$\int_0^1 \frac{J}{J_0} v_i'' v_j'' d\zeta + \sum_n k_{cn} v_i'(\zeta_{cn}) v_j'(\zeta_{cn}) = 0. \quad (\text{XIV.11a})$$

При колебаниях отдельной лопатки без связей условие ортогональности окажется следующим:

$$\int_0^1 \frac{J}{J_0} v_i'' v_j'' d\zeta = 0, \quad \text{или} \quad \int_0^l J v_i'' v_j'' dz = 0. \quad (\text{XIV.11б})$$

Так как изгибающий момент, действующий в поперечном сечении лопатки с координатой ζ при i -й собственной форме, равен $M_i(\zeta) = EJ v_i''(\zeta)/l^2$, то условие ортогональности изгибающих моментов, соответствующих различным собственным формам, окажется следующим:

$$\int_0^1 \frac{l^4}{E^2 J J_0} M_i M_j d\zeta + k_c v_i'(\zeta_c) v_j'(\zeta_c) = 0.$$

Введя обозначение

$$M_{i \text{ отн}} = M_i / M_i(0) = M_i l^2 / [v_i''(0) EJ_0],$$

запишем условие ортогональности моментов в виде

$$\int_0^1 \frac{J_0}{J} M_{i \text{ отн}} M_{j \text{ отн}} d\zeta + k_c \frac{v_i'(\zeta_c) v_j'(\zeta_c)}{v_i''(0) v_j''(0)} = 0. \quad (\text{XIV.12})$$

Аналогично полученным ранее соотношениям условия ортогональности при наличии n связей и при отсутствии связей соответственно имеют вид:

$$\int_0^1 \frac{J_0}{J} M_{i \text{ отн}} M_{j \text{ отн}} d\zeta + \sum_n k_{cn} \frac{v_i'(\zeta_{cn}) v_j'(\zeta_{cn})}{v_i''(0) v_j''(0)} = 0; \quad (\text{XIV.12a})$$

$$\int_0^1 \frac{J_0}{J} M_{i \text{ отн}} M_{j \text{ отн}} d\zeta = 0, \quad \text{или} \quad \int_0^l \frac{M_i M_j}{J} dz = 0. \quad (\text{XIV.12б})$$

Чтобы получить выражение для квадрата собственной частоты, умножим обе части уравнения (XI.12) на $v(\zeta)$ и проинтегрируем в пределах от нуля до единицы:

$$\int_0^1 v (Jv'')' d\zeta = \frac{\gamma l^4}{gE} p^2 \int_0^1 F v^2 d\zeta.$$

При наличии одной связи на расстоянии ξ_c от корня лопатки интеграл в левой части представим в виде суммы двух интегралов:

$$= \int_0^{\xi_c} v_1 (Jv_1)' d\xi + \int_{\xi_c}^1 v_2 (Jv_2)' d\xi = \frac{\gamma l^4}{gF} p^2 \int_0^1 F v^2 d\xi$$

После двукратного интегрирования левой части равенства по частям найдем

$$[(Jv_1)' v_1 - Jv_1'' v_1] \Big|_0^{\xi_c} + [(Jv_2)' v_2 - Jv_2'' v_2] \Big|_{\xi_c}^1 + \int_0^1 J (v'')^2 d\xi = \frac{\gamma l^4}{gF} p^2 \int_0^1 F v^2 d\xi$$

Воспользовавшись граничными условиями (XIV 2), (XIV 4) и (XIV 5), получим

$$- \frac{\gamma l^3 v_c}{gE} p^2 v^2(\xi_c) + k_c J_0 [v'(\xi_c)]^2 + \int_0^1 J (v'')^2 d\xi = \frac{\gamma l^4}{gF} p^2 \int_0^1 F v^2 d\xi \quad (\text{XIV.13})$$

Из равенства (XIV.13) находим выражение для собственной частоты p^2 синфазных колебаний пакета лопаток переменного сечения:

$$p^2 = \frac{E J_0 g}{F_0 l^4 \gamma} \frac{\int_0^1 \frac{J}{J_0} (v'')^2 d\xi + k_c [v'(\xi_c)]^2}{\int_0^1 \frac{F}{F_0} v^2 d\xi + v_c^2(\xi_c)} \quad (\text{XIV 14})$$

При наличии n связей уравнение (XIV 14) примет вид

$$p^2 = \frac{E J_0 g}{F_0 l^4 \gamma} \frac{\int_0^1 \frac{J}{J_0} (v'')^2 d\xi + \sum_n k_{cn} [v'(\xi_{cn})]^2}{\int_0^1 \frac{F}{F_0} v^2 d\xi + \sum_n v_{cn}^2(\xi_{cn})} \quad (\text{XIV 14a})$$

Наконец, уравнение для определения собственной частоты отдельной лопатки переменного сечения окажется следующим

$$p^2 = \frac{E J_0 g}{F_0 l^4 \gamma} \frac{\int_0^1 \frac{J}{J_0} (v'')^2 d\xi}{\int_0^1 \frac{F}{F_0} v^2 d\xi} \quad (\text{XIV 14б})$$

Таким образом собственная частота синфазных колебаний пакета лопаток переменного сечения или отдельной лопатки может быть найдена по формулам (XIV.14), (XIV 14a) или (XIV 14б) при условии, что известна собственная форма $v(\xi)$. В общем случае при произвольном законе изменения геометрических характеристик по высоте лопатки собственные формы колебаний не могут быть выражены через табулированные функции, и задача вычисления собственных частот сводится к задаче приближенного определения собственных форм. Последняя задача будет решена ниже (см. пп. XIV 2 и XIV 3), а в настоящем параграфе рассмотрим особенности спектра собственных частот для одного частного случая изменения геометрических характеристик по высоте лопатки.

В работе [53] показано, что собственные формы колебаний отдельных лопаток без связей могут быть выражены через функции Бесселя при условии, что площадь и момент инерции изменяются по высоте лопатки по следующим законам

$$F(\xi) = F_0 [1 - \xi(1 - \beta)]^q, \\ J(\xi) = J_0 [1 - \xi(1 - \beta)]^{q+2}, \quad (\text{XIV 15})$$

где β, q — параметры, характеризующие закон изменения геометрических характеристик по высоте лопатки, причем $0 \leq \beta \leq 1, q \geq 1$. Например, при $q = 1$ площадь поперечного сечения лопатки изменяется по линейному закону, при $q = 2$ — по квадратичному, случай $\beta = 1$ соответствует колебаниям лопатки постоянного сечения и т.д.

На рис. XIV 1 приведена зависимость коэффициентов α_i , определяющих собственные частоты лопаток переменного сечения, от параметров β и q [53]. Формула для определения i -й собственной частоты лопатки имеет вид

$$p_i = \frac{\alpha_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{E J_0 g}{F_0 \gamma}}, \quad (\text{XIV.16})$$

т.е. при $\beta = 1$, что соответствует колебаниям лопатки постоянного сечения, должно выполняться равенство $\alpha_i = \rho_i$, где величины ρ_i определяются по формуле (XI 24).

Как следует из рис. XIV 1, первая собственная частота клиновидной лопатки оказалась выше, чем лопатки постоянного

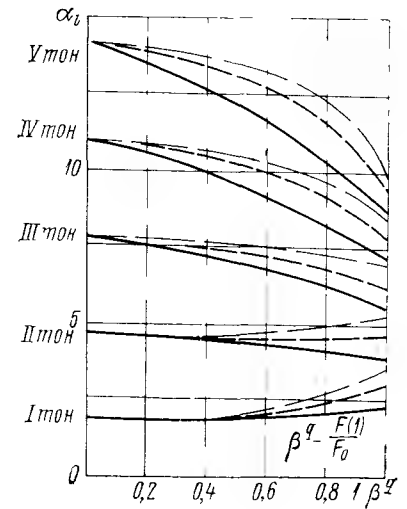


Рис. XIV 1 Зависимость коэффициентов α_i для первых пяти собственных частот лопатки переменного сечения от параметров β и q
— — — — — $q = 1$, — — — — — $q = 3$, - - - - - $q = 2$

поперечного сечения, вторая собственная частота может быть как выше, так и ниже, а третья, четвертая и пятая частоты — ниже соответствующих частот лопатки постоянного сечения при любом рассмотренном законе изменения геометрических характеристик по высоте лопатки. Таким образом, частотный спектр клиновидных лопаток оказывается более густым, чем спектр лопаток постоянного сечения. Например, в работе [53] приведены результаты расчета собственных частот лопатки со следующим законом изменения геометрических характеристик по высоте: $\beta = 0,564$; $q = 1,6$. На основании проведенных расчетов оказалось, что отношение первых пяти собственных частот указанной лопатки равняется $1 : 4,59 : 11,8 : 22,7 : 36,7$, в то время как из п. XI.3 следует, что для лопатки постоянного сечения это отношение было бы равно $1 : 6,27 : 17,6 : 34,4 : 56,8$.

Имеют место и некоторые другие различия: например, из глав XI и XIII следует, что для лопаток постоянного сечения максимальные динамические напряжения независимо от номера собственной формы колебаний возникают в корневом сечении, а одинаковым максимальным напряжениям соответствуют равные потенциальные энергии при всех собственных формах. В то же время для клиновидных лопаток максимальные относительные напряжения могут иметь место в различных поперечных сечениях в зависимости от номера собственной формы колебаний и закона изменения геометрических характеристик лопатки по высоте, причем при одинаковых максимальных напряжениях потенциальная энергия зависит от номера собственной формы и параметров β и q , определяющих закон изменения F и J по высоте лопатки.

Качественно такие же особенности имеют место и в общем случае изменения геометрических характеристик по высоте лопатки, отличным от описываемого формулами (XIV.15).

XIV.2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ЛОПАТОК ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Изложенные в настоящем параграфе приближенные методы определения собственных частот базируются на принципе наименьшего действия Остроградского—Гамильтона, который для рассматриваемых консервативных систем может быть сформулирован следующим образом [4]: из множества бесконечно близких движений, возможных для системы при заданных связях, переводящих ее из данного начального положения A в конечное положение B за один и тот же промежуток времени $t_B - t_A$, действительное движение обеспечивает минимальное значение функционала S :

$$S = \int_{t_A}^{t_B} (T - \Pi) dt, \quad (XIV.17)$$

где T и Π — соответственно кинетическая и потенциальная энергия системы.

Например, при изгибных колебаниях отдельной лопатки, как показано в п. XIV.1, кинетическая и потенциальная энергии соответственно равны:

$$T = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \int_0^l F \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 dz; \quad \Pi = \frac{1}{2} E \int_0^l J \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)^2 dz,$$

и значение функционала S оказывается следующим:

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_B} \int_0^l \left[\frac{\gamma}{g} F \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 - EJ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz dt. \quad (XIV.18)$$

В работе [4] показано, что условие экстремума функционала

$$S = \int_{t_A}^{t_B} \int_0^l L \left(t, z, V, \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial t}, \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) dz dt$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial b} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial c} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial L}{\partial r} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0, \end{aligned} \quad (XIV.19)$$

где

$$b = \frac{\partial V}{\partial t}; \quad c = \frac{\partial V}{\partial z}; \quad r = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}; \quad p = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial z}; \quad q = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Для функционала (XIV.18) уравнение (XIV.19) примет вид

$$F \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (XIV.20)$$

т. е. при отсутствии затухания совпадает с уравнением (XI.9), описывающим изгибные колебания лопатки переменного поперечного сечения.

Аналогично может быть получено и дифференциальное уравнение для свободных крутильных колебаний. Так как при крутильных колебаниях кинетическая и потенциальная энергия соответственно равны:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l J_p \frac{\gamma}{g} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} \right)^2 dz; \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l M_z \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) dz = \int_0^l GT_0 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 dz,$$

то выражение для функционала S в данном случае примет вид

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_B} \int_0^l \left[J_p \frac{\gamma}{g} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} \right)^2 - GT_0 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 \right] dz dt, \quad (XIV.21)$$

где J_p — полярный момент инерции поперечного сечения; T_0 — жесткость поперечного сечения на кручение.

Условие экстремума функционала

$$S = \int_{t_A}^{t_B} \int_0^l L \left(t, z, \Theta, \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) dz dt$$

имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial \Theta'} \right) = 0, \quad (\text{XIV.22})$$

где $b = \partial \Theta / \partial t$ и $c = \partial \Theta / \partial z$.

Для функционала (XIV.21) уравнение (XIV.22) примет вид

$$J_p \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} - G \frac{\partial}{\partial z} \left(T_0 \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = 0. \quad (\text{XIV.23})$$

Уравнение (XIV.23) совпадает с уравнением (XII.4), описывающим крутильные колебания лопатки переменного сечения при условии, что силами трения можно пренебречь.

Учитывая, что для различных собственных форм закон изменения амплитуд свободных колебаний во времени имеет вид:

$$V(z, t) = v(z) \sin(pt + \alpha); \quad \Theta(z, t) = \theta(z) \sin(pt + \alpha),$$

проинтегрируем, например, уравнение (XIV.18) для промежутка $t_B - t_A$, равного периоду колебаний $2\pi/p$. Отбрасывая несущественный для дальнейших преобразований постоянный множитель, получим

$$S = \int_0^l \left[F \frac{\gamma}{g} p^2 v^2(z) - EJ \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right] dz. \quad (\text{XIV.24})$$

Уравнение, определяющее экстремум функционала (XIV.24), будет следующим:

$$F \frac{\gamma}{g} p^2 v(z) - \frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{dv}{dz} \right) = 0. \quad (\text{XIV.25})$$

Переходя к относительной координате $\zeta = z/l$ и обозначая, как и ранее, дифференцирование по этой координате через знак $'$, получим

$$\frac{Fl^3 \gamma}{Eg} p^2 v - (Jv'')' = 0, \quad (\text{XIV.25a})$$

т. е. получим уравнение, тождественное уравнению (XI.12)

Аналогичным образом можно получить выражение для функционала и дифференциальное уравнение крутильных колебаний:

$$S = \int_0^l \left[J_p p^2 \Theta + GT_0 \left(\frac{d\Theta}{dz} \right)^2 \right] dz; \quad (\text{XIV.26})$$

$$J_p p^2 \Theta + \frac{d}{dz} \left(GT_0 \frac{d\Theta}{dz} \right) = 0. \quad (\text{XIV.27})$$

Переходя к безразмерной координате ζ , получим

$$(l^2 J_p / G) p^2 \Theta + (T_0 \Theta')' = 0. \quad (\text{XIV.27a})$$

Используя подстановку $V(z, t) = v(z) \sin(pt + \alpha)$ и выполняя интегрирование по времени в пределах одного периода, мы ограничиваем класс привлекаемых для сравнения движений гармоническими колебаниями одинакового периода, уравнение которых можно представить в виде

$$V + \delta V = (v + \delta v) \sin(pt + \alpha),$$

где δV и δv — вариации функций $V(z, t)$ и $v(z)$.

В функционалах (XIV.24) и (XIV.26) класс используемых для сравнения функций представляет собой формы колебаний

$$\bar{v} = v + \delta v = v + \varepsilon \eta, \quad (\text{XIV.28})$$

где ε — достаточно малый числовой параметр; η — непрерывная или кусочно-непрерывная функция.

Рассматриваемые функции должны удовлетворять граничным условиям исследуемой задачи. Вообще говоря, достаточно, чтобы функции удовлетворяли только так называемым геометрическим граничным условиям [граничным условиям типа (XIV.2)], поскольку выполнение граничных условий типа (XIV.5) — динамических граничных условий — будет автоматически следовать из принципа Остроградского—Гамильтона. Действительно, рассмотрим функционал (XIV.24) на совокупности форм (XIV.28):

$$S(v) = \int_0^l \left[F \frac{\gamma}{g} p^2 [v(z) + \varepsilon \eta(z)]^2 - EJ \left[\frac{dv}{dz} + \varepsilon \frac{d\eta}{dz} \right]^2 \right] dz. \quad (\text{XIV.29})$$

Необходимым условием экстремума S будет обращение в нуль первой производной $S(\bar{v})$ по ε для $\varepsilon = 0$. Но

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 2 \int_0^l \left[F \frac{\gamma}{g} p^2 v(z) \eta(z) - EJ \frac{dv(z)}{dz} \frac{d\eta(z)}{dz} \right] dz,$$

поэтому

$$\int_0^l \left[F \frac{\gamma}{g} p^2 v(z) \eta(z) - EJ \frac{dv(z)}{dz} \frac{d\eta(z)}{dz} \right] dz = 0. \quad (\text{XIV.30})$$

Дважды проинтегрировав второе слагаемое по частям, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[F \frac{\gamma}{g} p^2 v - \frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{dv}{dz} \right) \right] \eta dz + \\ & + \left[\frac{d}{dz} \left(EJ \frac{dv}{dz} \right) \eta - EJ \frac{dv}{dz} \frac{d\eta}{dz} \right] \Big|_0^l = 0, \end{aligned} \quad (\text{XIV.31})$$

элементы определителя (XIV.37), не расположенные на главной диагонали, обратились бы в нуль вследствие ортогональности различных собственных форм. Таким образом, вместо определителя (XIV.37) получился бы набор уравнений вида

$$T_{ii}p^2 - P_{ii} = 0; \quad i = 1; 2; \dots; n,$$

определяющих n различных собственных частот.

При вычислении собственных частот лопаток переменного поперечного сечения естественно за базисные функции принять собственные формы колебаний лопатки постоянного поперечного сечения. Однако в ряде случаев, особенно при определении высших собственных форм, указанный способ может оказаться малоэффективным. Причина этого заключается в том, что задавшись рядом

$$\psi(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i(z), \quad (\text{XIV.38})$$

где $v_i(z)$ — различные собственные формы колебаний консольной лопатки постоянного сечения, мы должны для вычисления величины P_{ii} по формуле (XIV.35) дважды дифференцировать ряд (XIV.38).

После дифференцирования получим

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\rho_i^2}{l^2} \frac{d^2 v_i}{du_i^2}, \quad \text{где } u_i = \frac{\rho_i z}{l}. \quad (\text{XIV.39})$$

Поскольку величины ρ_i^2 быстро возрастают с увеличением номера i , сходимость ряда (XIV.39) оказывается значительно более медленной, чем ряда (XIV.38), и для вычисления нескольких первых частот необходимо сохранить достаточно большое число слагаемых. Для уменьшения объема вычислений и повышения их точности целесообразно применить такую форму расчета, при которой используемые ряды следует не дифференцировать, а интегрировать [11]. Например, при вычислении частот изгибных колебаний момент можно представить в виде ряда

$$M(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i M_i(z), \quad (\text{XIV.40})$$

где α_i — числовые параметры; $M_i(z)$ — изгибающий момент, соответствующий i -й собственной форме колебаний лопатки постоянного сечения.

При использовании выражения (XIV.40) прогиб консольной лопатки переменного сечения может быть представлен в виде

$$v(z) = \int_0^z d\bar{z} \int_0^{\bar{z}} \frac{M}{EJ} d\bar{z} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{v}_i, \quad (\text{XIV.41})$$

где

$$\bar{v}_i = \int_0^z d\bar{z} \int_0^{\bar{z}} \frac{M_i}{EJ} d\bar{z}, \quad 0 \leq \bar{z} < z,$$

а выражения для потенциальной и кинетической энергии окажутся следующими:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} p^2 \int_0^l F \dot{v}^2 dz = \frac{1}{2} p^2 \sum_{i,j=1}^n T_{ij} \alpha_i \alpha_j; \\ P &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dz = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n P_{ij} \alpha_i \alpha_j, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV.42})$$

где

$$T_{ij} = \int_0^l F \frac{\gamma}{g} \bar{v}_i \bar{v}_j dz; \quad P_{ij} = \int_0^l \frac{M_i M_j}{EJ} dz.$$

Собственные частоты, как и ранее, могут быть получены из решения частотного определителя (XIV.37) с учетом выражений (XIV.42).

Наиболее простые результаты получаются, если базисные функции выбираются не только линейно-независимыми, но и ортогональными. На этом принципе основано рассмотренное в работе [56] видоизменение метода Ритца, названное методом моментов. Сущность метода состоит в том, что вместо функций M_i , входящих в формулу (XIV.40), выбираются функции $\bar{M}_i$ — изгибающие моменты, приблизительно соответствующие i -й собственной форме колебаний лопатки переменного поперечного сечения, собственные частоты которой разыскиваются

$$M(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{M}_i(z). \quad (\text{XIV.40a})$$

Для нахождения величин $\bar{M}_i(z)$ используется тот факт, что эпюра изгибающих моментов по высоте лопатки при первой собственной форме слабо зависит от изменения геометрических характеристик по высоте лопатки. Это и проиллюстрировано на рис. XIV.2 для следующих трех случаев: лопатки постоянного сечения; лопатки с относительно слабым изменением площади поперечного сечения по высоте [$F(1)/F_0 = 0,507$], расчет которой приведен в работе [142]; лопатки последней ступени мощной паровой турбины со значительным изменением площади поперечного сечения по высоте [$F(1)/F_0 = 0,152$]. На рис. XIV.2 приведены безразмерные величины, отнесенные к их максимальным значениям для каждого из рассмотренных случаев: $v_{\text{tot}}'' = (M_1/J)/(M_1/J)_{\text{max}}$ и $M_{1011} = M_1/M_{1\text{max}}$.

Как следует из рис. XIV.2, эпюра изгибающих моментов при первой собственной форме колебаний остается практически

неизменной, несмотря на значительные различия в законе изменения кривизны по высоте лопатки. Таким образом, с достаточной точностью можно принять, что $\bar{M}_1 = M_1$. Остальные моменты, входящие в формулу (XIV.40а), определяются из условия ортогональности изгибающих моментов при различных собственных

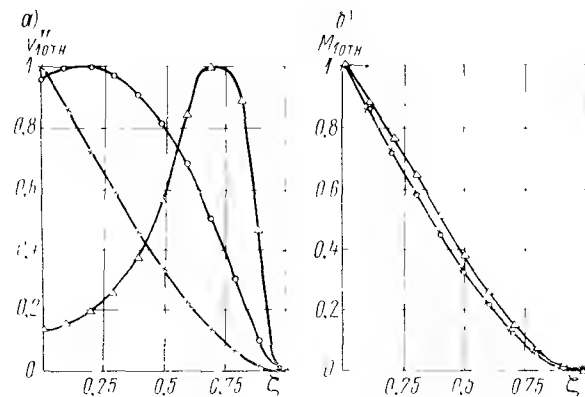


Рис. XIV.2 Изменение кривизны (а) и изгибающего момента (б) по высоте лопатки при первой собственной форме колебаний:

× — лопатка постоянного сечения; ○ — $F(1)/F_0 = 0,507$,
△ — $F(1)/F_0 = 0,152$

формах колебаний лопатки переменного сечения (см. п. XIV.1). С учетом формулы (XIV.12б) получим

$$\bar{M}_2 = M_2 + a_{21} \bar{M}_1,$$

где

$$a_{21} = - \frac{\int_0^l (M_2 M_1 J) dz}{\int_0^l (M_1^2 / J) dz}, \quad \text{так как} \quad \int_0^l (\bar{M}_1 \bar{M}_2 J) dz = 0.$$

Аналогично

$$\bar{M}_3 = M_3 + a_{31} M_1 + a_{32} M_2 \quad (\text{XIV.43})$$

где

$$a_{31} = - \frac{\int_0^l (M_3 M_1 J) dz}{\int_0^l (M_1^2 / J) dz}; \quad a_{32} = - \frac{\int_0^l (M_3 M_2 J) dz}{\int_0^l (M_2^2 / J) dz} \quad \text{и т. д.}$$

Дальнейшие вычисления могут быть выполнены по формулам (XIV.41) и (XIV.42), однако в рассматриваемом случае допустимы значительные упрощения. Так как изгибающие моменты $\bar{M}_i$,

вычисленные по формулам (XIV.43), весьма близки к их действительным значениям, то и прогибы $\bar{v}_i$, вычисленные по формулам (XIV.41) при подстановке в них значений $\bar{M}_i$, также окажутся весьма близкими к прогибам при соответствующих собственных формах колебаний лопатки переменного поперечного сечения. При этом будет приближенно выполняться равенство

$$T_{ij} = \int_0^l F \frac{\gamma}{g} \bar{v}_i \bar{v}_j dz \approx 0, \quad i \neq j,$$

поскольку для действительных собственных форм указанное равенство выполняется в точности — см. формулу (XIV.96).

Таким образом, $T_{ij} \approx 0$, а $\Pi_{ij} = 0$ при $i \neq j$ в соответствии с формулами (XIV.42) и (XIV.43). В результате в частотном определителе (XIV.37) окажутся близкими к нулю все члены, не расположенные на главной диагонали, и собственные частоты могут быть определены по приближенным формулам

$\rho = \sqrt{\Pi_{ii} / T_{ii}}$, достаточно точным для нескольких первых частот

В работе [56] по данному способу были определены три первые частоты лопатки, площадь периферийного сечения которой была в два раза меньше площади корневого сечения: оказалось, что значение первой собственной частоты совпало со значением, полученным с помощью точного решения, а вторая и третья частота отличались от точных значений всего на 1,6% и 0,85%.

Частным случаем метода Ритца является исторически предшествовавший ему метод Рэлея [164], используемый для приближенного определения первой собственной частоты. В соответствии с методом Рэлея, в выражении (XIV.33) сохраняется только одна функция Ψ_1 и собственная частота определяется по формуле

$$\rho^2 = \Pi_{11} / T_{11}. \quad (\text{XIV.44})$$

Нетрудно показать, что формула (XIV.44) дает завышенное значение первой собственной частоты. Действительно, функцию $\Psi_1(z)$ можно разложить по собственным формам $v_i(z)$, т. е. представить в виде

$$\Psi_1(z) = a_1 v_1(z) + a_2 v_2(z) + a_3 v_3(z) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i(z). \quad (\text{XIV.45})$$

Подставив выражение (XIV.45) в формулу (XIV.35) и учитывая, что в данном случае из-за ортогональности собственных форм $T_{ij} = \Pi_{ij} = 0$ при $i \neq j$, получим формулу

$$\rho^2 = \frac{a_1^2 \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 v_1}{dz^2} \right)^2 dz + a_2^2 \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 v_2}{dz^2} \right)^2 dz + \dots}{a_1^2 \int_0^l \frac{\gamma}{g} F v_1^2 dz + a_2^2 \int_0^l \frac{\gamma}{g} F v_2^2 dz + \dots}. \quad (\text{XIV.46})$$

Поскольку в соответствии с формулой (XIV.146)

$$a_i^2 \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 v_i}{dz^2} \right)^2 dz = p_i^2 a_i^2 \int_0^l \frac{\gamma}{g} F v_i^2 dz,$$

преобразуем выражение (XIV.46) к виду

$$p^2 = \frac{p_1^2 + p_2^2 b_2^2 + \dots}{1 + b_2^2 + b_3^2 + \dots} = p_1^2 \frac{1 + (p_2^2/p_1^2) b_2^2 + (p_3^2/p_1^2) b_3^2 + \dots}{1 + b_2^2 + b_3^2 + \dots}, \quad (\text{XIV.46a})$$

где

$$b_i^2 = \frac{a_i^2 \int_0^l (\gamma/g) F v_i^2 dz}{a_1^2 \int_0^l (\gamma/g) F v_1^2 dz}.$$

Так как $p_i^2/p_1^2 > 1$, то все члены числителя, начиная со второго, больше соответствующих членов знаменателя и $p^2 > p_1^2$. Если бы в выражении (XIV.45) было $a_2 = a_3 = \dots = 0$, то $p = p_1$; если бы $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0$, $a_2 \neq 0$, то $p = p_2$ и т. д.

Если выбранная функция ψ_1 будет достаточно близка к первой собственной форме, то $a_1 \gg a_i$ при $i \neq 1$ и значение частоты, определяемое формулой (XIV.44), будет близким к точному значению первой собственной частоты. Для консольной лопатки достаточная точность может быть получена, если считать лопатку нагруженной собственным весом или нагрузкой, равномерно распределенной по ее высоте.

Применим метод Рэлея для приближенного определения первой собственной частоты консольной лопатки постоянного поперечного сечения. Будем считать лопатку нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q . Прогиб по высоте лопатки в этом случае будет следующим:

$$\psi_1(z) = \frac{q}{24EJ} (z^4 - 4z^3l + 6z^2l^2); \quad \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} = \frac{q}{2EJ} (l - z)^2.$$

Подставив эти выражения в формулы (XIV.35) для T_{11} и P_{11} , получим:

$$P_{11} = \frac{q^2 l^7}{576 E J} 28,8; \quad T_{11} = \frac{F \gamma q^2 l^9}{576 g E^2 J^2} 2,311.$$

По формуле (XIV.44) найдем:

$$p_1^2 = 12,47 \frac{E J g}{F l^4 \gamma}; \quad p_1 = \frac{3,53}{l^2} \sqrt{\frac{E J g}{F \gamma}}.$$

Как видно, полученное значение всего на 0,4% отличается от точного, равного

$$p_1 = \frac{1,875^2}{l^2} \sqrt{\frac{E J g}{F \gamma}} = \frac{3,516}{l^2} \sqrt{\frac{E J g}{F \gamma}}.$$

Одним из широко используемых способов приближенного определения собственных частот является метод Бубнова—Галеркина. Его преимущества проявляются, когда составление выражений для потенциальной и кинетической энергии может вызвать определенные затруднения, а дифференциальные уравнения равновесия могут быть выведены достаточно легко.

Воспользуемся уравнением (XIV.31a) и будем, как и ранее, искать форму колебаний в виде (XIV.33). Потребуем, однако, чтобы функции ψ_i обязательно удовлетворяли как геометрическим, так и динамическим граничным условиям. В этом случае второе слагаемое в формуле (XIV.31a) обратится в нуль и выражение преобразуется к виду

$$\int_0^l \left[F \frac{\gamma}{g} p^2 \psi - \frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2 \psi}{dz^2} \right) \right] \sum_{i=1}^n \delta \alpha_i \psi_i dz = 0. \quad (\text{XIV.47})$$

Так как $\delta \alpha_i$ — произвольные вариации независимых числовых параметров α_i , то равенство (XIV.47) эквивалентно системе n уравнений

$$\int_0^l \left[F \frac{\gamma}{g} p^2 \psi - \frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2 \psi}{dz^2} \right) \right] \psi_i dz = 0, \quad i = 1; 2; \dots; n. \quad (\text{XIV.47a})$$

Уравнения (XIV.47a) имеют следующее физическое истолкование [142]: хотя функция ψ и не является точным решением дифференциального уравнения, т. е. не обращает в нуль выражение в квадратных скобках во всех точках, однако величина функции-ошибки

$$j(z) = \int_0^l \left[F \frac{\gamma}{g} p^2 \psi - \frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2 \psi}{dz^2} \right) \right] dz$$

может быть сделана достаточно малой, а приближенное решение будет достаточно близким к точному, если функция-ошибка будет ортогональна во всей области интегрирования различным базисным функциям ψ_i , т. е. если будут выполняться равенства (XIV.47a)

Подставив выражение (XIV.33) в уравнения (XIV.47a), получим

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \int_0^l \left[F \frac{\gamma}{g} p^2 \psi_j - \frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2 \psi_j}{dz^2} \right) \right] \psi_i dz = 0, \quad i = 1; 2; \dots; n. \quad (\text{XIV.48})$$

Введя обозначения

$$T_{ij} = \int_0^l F \frac{\gamma}{g} p^2 \psi_j \psi_i dz; \quad W_{ij} = \int_0^l \frac{d^2 (EJ \psi_j)}{dz^2} \psi_i dz,$$

Рассмотрим колебания отдельной жестко заделанной в корневом сечении лопатки. Последовательно проинтегрировав обе части уравнения (XIV.52), получим:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{J}{F_0} \lambda_1 \right)' &= \int_1^{\xi} \frac{F(\rho)}{F_0} X_0(\rho) d\rho; \quad \frac{J}{F_0} X_1' = \int_1^{\xi} d\rho \int_1^{\rho} \frac{F}{F_0} X_0 d\rho; \\ X_1' - \int_0^{\xi} \frac{J_0}{J} d\rho \int_1^{\rho} d\rho \int_1^{\rho} \frac{F}{F_0} X_0 d\rho, \quad X_1 &= \int_0^{\xi} d\rho \int_0^{\rho} \frac{J_0}{J} d\rho \int_1^{\rho} d\rho \int_1^{\rho} \frac{F}{F_0} \lambda_0 d\rho \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV.53})$$

Найденное значение $X_1(\xi)$ можно подставить в правую часть уравнения (XIV.52) вместо функции $X_0(\xi)$ и, произведя интегрирование по формулам (XIV.53), вычислить значение функции $X_2(\xi)$ и т. д.

Покажем, что независимо от вида функции $X_0(\xi)$ функция $X_n(\xi)$ будет стремиться (с точностью до произвольной постоянной) к функции $v_1(\xi)$ — собственной форме колебаний, соответствующей первой частоте отдельной жестко заделанной лопатки.

Действительно, пусть

$$\left. \begin{aligned} X_{0i}(\xi) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_{0i} v_i(\xi); \quad X_{1i}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{1i} v_i(\xi); \\ X_{ni}(\xi) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} v_i(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV.54})$$

где $a_{0i}, a_{1i}, \dots, a_{ni}$ — числовые коэффициенты; $v_i(\xi)$ — собственная форма колебаний, соответствующая i -й частоте жестко заделанной лопатки переменного поперечного сечения.

Для вычисления коэффициентов a_{0i} , (или a_{1i}, a_{2i} и т. д.) умножим обе части соответствующего уравнения (XIV.54) на $[F(\xi)/F_0] v_i(\xi)$ и проинтегрируем в пределах от нуля до единицы.

В соответствии с формулой (XIV.96) выполняется равенство

$$\int_0^1 \frac{F(\xi)}{F_0} v_i(\xi) v_j(\xi) d\xi = 0,$$

поэтому

$$\int_0^1 \frac{F}{F_0} X_{0i} v_i d\xi = a_{0i} \int_0^1 \frac{F}{F_0} v_i^2 d\xi,$$

откуда

$$a_{0i} = \frac{\int_0^1 \frac{F}{F_0} X_{0i} v_i d\xi}{\int_0^1 \frac{F}{F_0} v_i^2 d\xi}.$$

Аналогично

$$a_{1i} = \frac{\int_0^1 \frac{F}{F_0} X_{1i} v_i d\xi}{\int_0^1 \frac{F}{F_0} v_i^2 d\xi} \quad \text{и т. д.}$$

Так как функции v_i удовлетворяют дифференциальному уравнению (XI.12), то выполняется соотношение

$$\left(\frac{J}{F_0} v_i'' \right)' = \frac{F_0 l^4 \gamma}{F J_0 g} p_i^2 \frac{F}{F_0} v_i,$$

или

$$v_i = \frac{F_0 l^4 \gamma}{E J_0 g} p_i^2 \int_0^{\xi} d\rho \int_0^{\rho} \frac{J_0}{J} d\rho \int_1^{\rho} d\rho \int_1^{\rho} \frac{F}{F_0} v_i d\rho.$$

С другой стороны, в соответствии с формулами (XIV.53) и (XIV.54) имеет место равенство

$$a_{1i} v_i = a_{0i} \int_0^{\xi} d\rho \int_0^{\rho} \frac{J_0}{J} d\rho \int_1^{\rho} d\rho \int_1^{\rho} \frac{F}{F_0} v_i d\rho,$$

откуда следует, что

$$a_{1i} \frac{F_0 l^4 \gamma}{F J_0 g} p_i^2 = a_{0i}, \quad \text{или} \quad a_{1i} = \frac{E J_0 g}{F_0 l^4 \gamma p_i^2} a_{0i}$$

Обозначив $E J_0 g / (F_0 l^4 \gamma) = \alpha$, получим

$$a_{1i} = (\alpha / p_i^2) a_{0i}. \quad (\text{XIV.55})$$

Аналогичным образом для последующих приближений будут выполняться соотношения:

$$\left. \begin{aligned} X_{2i}(\xi) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i} v_i(\xi); \quad \dots; \quad X_{ni}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} v_i(\xi); \\ a_{2i} &= (\alpha / p_i^2) a_{1i} = (\alpha^2 / p_i^4) a_{0i}; \quad \dots; \quad a_{ni} = (\alpha^n / p_i^{2n}) a_{0i}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV.56})$$

Следовательно,

$$X_{ni}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha^n a_{0i}}{p_i^{2n}} v_i(\xi),$$

или

$$X_{ni}(\xi) = \frac{\alpha^n}{p_1^{2n}} \left[a_{01} v_1(\xi) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{p_1}{p_i} \right)^{2n} a_{0i} v_i(\xi) \right]. \quad (\text{XIV.57})$$

Так как $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$, то все слагаемые типа $(p_1/p_i)^{2n}$ стремятся к нулю по мере увеличения числа последовательных приближений n . В связи с этим при возрастании числа приближе-

ний $X_{n1}(\xi) \rightarrow (\alpha^n a_{01}/p_1^{2n}) v_1(\xi)$, т. е. величина $X_{n1}(\xi)$ оказывается пропорциональной первой собственной форме $v_1(\xi)$, а $X_{n1}(\xi)/X_{(n+1)1}(\xi) \approx p_1^2/\alpha$.

Для того чтобы функция $X_{n1}(\xi)$, определяемая формулой (XIV.57), стремилась не к первой, а ко второй собственной форме, должно выполняться условие $a_{01} = 0$, т. е. исходная функция $\bar{X}_{02}(\xi)$ должна удовлетворять следующему равенству:

$$\bar{X}_{02}(\xi) = X_{02}(\xi) - a_{01}v_1(\xi), \quad (\text{XIV.58})$$

где $X_{02}(\xi)$ — функция, удовлетворяющая граничным условиям при $\xi = 0$; $v_1(\xi)$ — функция, которая должна быть найдена заранее с помощью метода последовательных приближений; a_{02} — коэффициент, определяемый уравнением

$$a_{02} = \frac{\int_0^1 (F/F_0) X_{02} v_1 d\xi}{\int_0^1 (F/F_0) v_1^2 d\xi}.$$

Подставив в правую часть уравнения (XIV.52) выражение (XIV.58), найдем следующее приближение $X_{12}(\xi)$. Если бы функция $v_1(\xi)$ была найдена абсолютно точно и отсутствовали бы погрешности вычислений, то в разложении $X_{12}(\xi)$ коэффициент a_{11} был бы равен нулю. Фактически коэффициент a_{11} будет иметь хотя и малое, но отличное от нуля значение. Так как при выполнении последующих приближений коэффициент a_{n1} в соответствии с формулой (XIV.56) будет расти наиболее быстро, то для получения собственной формы колебаний, соответствующей второй частоте, в качестве первого приближения следует принять функцию $\bar{X}_{12}(\xi) = X_{12}(\xi) - a_{12}v_1(\xi)$, где

$$a_{12} = \frac{\int_0^1 (F/F_0) X_{12} v_1 d\xi}{\int_0^1 (F/F_0) v_1^2 d\xi}.$$

Повторяя указанную процедуру, можно найти с требуемой точностью собственную форму $v_2(\xi)$, соответствующую второй частоте, и значение второй частоты p_2 лопатки переменного поперечного сечения.

При определении третьей собственной частоты и соответствующей ей формы колебаний исходную функцию $X_{03}(\xi)$ следует представить в виде

$$\bar{X}_{03}(\xi) = X_{03}(\xi) - a_{02}v_1(\xi) - a_{03}v_2(\xi),$$

где коэффициент a_{03} определяется выражением

$$a_{03} = \frac{\int_0^1 (F/F_0) X_{03} v_2 d\xi}{\int_0^1 (F/F_0) v_2^2 d\xi},$$

а затем повторить процесс последовательных приближений.

Совершенно аналогично можно построить процесс последовательных приближений и при определении частот синфазных колебаний пакетов лопаток, если воспользоваться условиями ортогональности различных собственных форм, приведенными для этого случая в п. XIV.1. В работе [107] приведены примеры расчетов различных собственных форм колебаний пакетов лопаток, соединенных банджом или паяными проволоками. Результаты расчетов свидетельствуют о достаточно быстрой сходимости метода последовательных приближений при определении первой и второй собственных частот синфазных колебаний.

С внедрением ЭВМ в практику инженерных расчетов метод последовательных приближений в значительной мере утратил то значение, которое он имел раньше. Это объясняется как относительной сложностью программирования данного метода, так и необходимостью вычисления $i - 1$ первых собственных частот даже в том случае, когда требуется вычислить только i -ю частоту. Методы определения собственных частот лопаток при использовании ЭВМ кратко изложены в гл. XV, а более полно — в работах [9, 44, 61, 64, 65, 136, 186].

Метод последовательных приближений применяется для улучшения базисных функций, используемых в методах Рунге или Бунднова Галеркина [4]. Это может привести к существенному повышению точности расчетов без увеличения числа базисных функций и связанного с этим возрастания объема вычислений. Указанное достоинство метода последовательных приближений не утратило своего значения и при проведении вибрационных расчетов с помощью ЭВМ.

XIV.4. КОЛЕБАНИЯ ЗАКРУЧЕННЫХ ЛОПАТОК

В п. XIV.1 отмечалось, что закрутка лопаток слабо влияет на первую собственную частоту. В то же время влияние закрутки на высшие частоты оказывается весьма существенным. Особенно сильно изменяются собственные частоты при закрутке в том случае, когда какие-либо частоты тангенциальных и аксиальных колебаний незакрученной лопатки близки друг к другу (например, вторая частота тангенциальных колебаний близка к первой аксиальной частоте незакрученной лопатки). Для иллюстрации в табл. XIV.1 показано влияние полного угла закрутки $\Delta\beta$ на

Таблица XIV.1

b/a	$\Delta\beta, \dots^\circ$					b/a	$\Delta\beta, \dots^\circ$				
	0	10	20	30	40		0	10	20	30	40
4	1	1	1	1	1	8	1	1	1	1	1
	3,99	3,99	3,81	3,64	3,44		6,30	5,90	5,30	4,70	4,20
	6,30	6,32	6,50	6,85	7,30		7,45	7,90	8,80	9,80	10,80
6	17,50	17,50	17,20	16,70	16,20	12	17,50	17,40	17,10	16,50	16,00
	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1
	5,85	5,32	4,80	4,50	4,10		6,28	6,00	5,60	4,80	4,50
	6,34	6,90	7,50	8,30	9,10		11,00	11,20	12,20	13,30	14,10
	17,65	17,50	17,10	16,60	16,10		17,50	17,50	17,10	17,40	16,60

собственные частоты консольного стержня прямоугольного поперечного сечения с различными отношениями ширины стержня b к его толщине a . В таблице указаны относительные значения определенных экспериментально четырех первых собственных частот (за единичное принято значение первой собственной частоты незакрученной лопатки) [232]. Как видно, закрутка существенно влияет на высшие собственные частоты и должна учитываться при их вычислении.

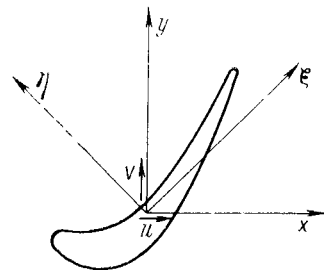


Рис. XIV.3. Система координатных осей, используемая при рассмотрении изгибных колебаний закрученных лопаток

Ниже будет показано, что в общем случае колебания закрученных лопаток являются совместными изгибно-крутильно-продольными, однако при некоторых упрощающих предположениях можно ограничиться рассмотрением чисто изгибных колебаний. При изучении чисто изгибных колебаний закрученных лопаток воспользуемся системой координат, изображенной на рис. XIV.3.

Пренебрежем несовпадением центров тяжести и изгиба, а также влиянием сил сопротивления и ограничимся рассмотрением колебаний отдельной жестко заделанной невращающейся лопатки. Перемещения в направлении осей x и y обозначим соответственно u и v . Изгибающие моменты M_x и M_y будем считать положительными в том случае, когда они вызывают поворот против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления координатных осей на начало координат; перерезывающие силы Q_x и Q_y будем считать положительными, если их направления совпадают с направлениями координатных осей.

Учитывая принятые правила знаков и считая положительными напряжения растяжения, можем записать следующие выражения для нормальных напряжений σ_z и изгибающих моментов M_x и M_y :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -Ex \frac{d^2 u}{dz^2} - Ey \frac{d^2 v}{dz^2}; \\ M_x &= E \int_F \sigma_z y dF = -EJ_y \frac{d^2 u}{dz^2} - EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2}; \\ M_y &= E \int_F \sigma_z x dF = EJ_y \frac{d^2 u}{dz^2} - EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV.59})$$

где

$$J_{xy} = \int_F xy dF; \quad J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF.$$

Из условия равенства нулю суммы сил и моментов, действующих на элемент лопатки длиной dz , следует:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dz} &= -q_x - \frac{\gamma}{g} F p^2 u; & \frac{dQ_y}{dz} &= -q_y - \frac{\gamma}{g} F p^2 v; \\ \frac{dM_y}{dz} &= -Q_x; & \frac{dM_x}{dz} &= Q_y, \end{aligned}$$

или

$$\frac{d^2 M_y}{dz^2} = \frac{\gamma}{g} F p^2 u; \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = -\frac{\gamma}{g} F p^2 v. \quad (\text{XIV.60})$$

Переходя к относительной координате $\xi = z/l$ и используя уравнения (XIV.59) и (XIV.60), получим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha p^2 \frac{F}{F_0} u - \left(\frac{J_y}{J_0} u'' \right)'' - \left(\frac{J_{xy}}{J_0} v'' \right)'' &= 0; \\ \alpha p^2 \frac{F}{F_0} v - \left(\frac{J_{xy}}{J_0} u'' \right)'' - \left(\frac{J_x}{J_0} v'' \right)'' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV.61})$$

где $\alpha = F_0 l^4 \gamma / (E J_0 g)$; J_0 — минимальный момент инерции корневого сечения лопатки.

Уравнения (XIV.59) могут быть преобразованы к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} u'' &= M_x \frac{J_{xy} l^2}{E (J_x J_y - J_{xy}^2)} + M_y \frac{J_x l^2}{E (J_x J_y - J_{xy}^2)}; \\ v'' &= -M_x \frac{J_y l^2}{E (J_x J_y - J_{xy}^2)} - M_y \frac{J_{xy} l^2}{E (J_x J_y - J_{xy}^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV.62})$$

Проинтегрировав уравнения (XIV 60), найдем:

$$\left. \begin{aligned} M_y(\xi) &= \frac{F_0 l^2 \gamma}{p} p^2 \int_{\xi}^1 \frac{F}{F_0} u(\rho) (\rho - \xi) d\rho, \\ M_x(\xi) &= -\frac{F_0 l^2 \gamma}{g} p^2 \int_{\xi}^1 \frac{F}{F_0} v(\rho) (\rho - \xi) d\rho, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV 63})$$

где $\rho = z/l$, $l \geq z \geq 0$

Подставив выражения (XIV 63) в уравнения (XIV 62), получим систему двух интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $u(\xi)$ и $v(\xi)$

$$\left. \begin{aligned} u''(\xi) &= -\frac{I_0 l^4 \gamma J_{xy}}{Lg(J_x J_y - J_{xy}^2)} p^2 \int_{\xi}^1 \frac{1}{F_0} v(\rho) (\rho - \xi) d\rho - \\ &\quad - \frac{F_0 l^4 \gamma I_x}{Lg(J_x J_y - J_{xy}^2)} p^2 \int_{\xi}^1 \frac{F}{F_0} u(\rho) (\rho - \xi) d\rho, \\ v'(\xi) &= \frac{I_0 l^4 \gamma J_{xy}}{Lg(J_x J_y - J_{xy}^2)} p^2 \int_{\xi}^1 \frac{1}{F_0} u(\rho) (\rho - \xi) d\rho - \\ &\quad - \frac{I_0 l^4 \gamma J_{xy}}{Lg(J_x J_y - J_{xy}^2)} p^2 \int_{\xi}^1 \frac{F}{F_0} u(\rho) (\rho - \xi) d\rho \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV 64})$$

Прежде чем переходить к решению системы (XIV 64), выведем условия ортогональности различных собственных форм изгибных колебаний предварительно закрученной лопатки. Запишем уравнения (XIV 61) для i -й собственной формы, а затем умножим первое уравнение на u_i , второе — на v_i , сложим их и проинтегрируем в пределах от нуля до единицы. В результате получим

$$\begin{aligned} \alpha p_i^2 \int_0^1 \frac{F}{F_0} (u_i u_i + v_i v_i) d\xi &= \int_0^1 \left[\left(\left(\frac{J_y}{J_0} u_i \right)' - \left(\frac{J_{xy}}{J_0} v_i \right) \right) u_i + \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{J_{xy}}{J_0} u_i \right) - \left(\frac{J_x}{J_0} v_i \right) \right) v_i \right] d\xi = \int_0^1 \left[\left(\left(\frac{J_y}{J_0} u_i \right)' - \left(\frac{J_{xy}}{J_0} v_i \right) \right) u_i + \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{J_{xy}}{J_0} u_i \right)' + \left(\frac{J_x}{J_0} v_i \right)' \right) v_i \right] d\xi = \alpha p_i^2 \int_0^1 \frac{F}{F_0} (u_i u_i + v_i v_i) d\xi. \end{aligned} \quad (\text{XIV 65})$$

Справедливость равенства (XIV 65) доказывается следующим образом. Произведем интегрирование по частям первого слагае-

мого в левой части равенства (XIV 65), в результате чего получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\left(\frac{J_y}{J_0} u_i \right)' - \left(\frac{J_{xy}}{J_0} v_i \right) \right) u_i d\xi &= \left[\left(\frac{J_y}{J_0} u_i \right)' u_i - \frac{J_y}{J_0} u_i' u_i + \frac{J_{xy}}{J_0} u_i' u_i - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{J_{xy}}{J_0} u_i \right)' u_i \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{J_y}{J_0} u_i \right) u_i d\xi \end{aligned}$$

Так как при $\xi = 0$ имеем $u_i = u_i' = v_i = v_i' = 0$, а при $\xi = 1$ $[(J_y/J_0) u_i]' = [(J_y/J_0) u_i]' = u_i - u_i' = 0$, то

$$\int_0^1 \left(\frac{J_y}{J_0} u_i \right) u_i d\xi = \int_0^1 \left(\frac{J_x}{J_0} u_i \right) u_i d\xi$$

Поскольку аналогичные равенства имеют место и для остальных слагаемых, входящих под знак интеграла, то справедливость формулы (XIV 65) доказана.

Так как $p_i \neq p_j$, то из формулы (XIV 65) вытекает следующее условие ортогональности различных собственных форм изгибных колебаний закрученных лопаток

$$\int_0^1 \frac{1}{F_0} (u_i u_j - v_i v_j) d\xi = 0. \quad (\text{XIV 66})$$

Используя условие (XIV 66), покажем, что собственные частоты и формы могут быть найдены с помощью метода последовательных приближений [109].

Зададимся известными функциями $X_{01}(\xi)$ и $Y_{01}(\xi)$, удовлетворяющими граничным условиям в корневом сечении лопатки. Определим функции $X_{11}(\xi)$ и $Y_{11}(\xi)$ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} X_{11}(\xi) &= -\frac{J_{xy} J_0}{J_x J_y - J_{xy}^2} \int_{\xi}^1 \frac{F}{F_0} Y_{01}(\rho) (\rho - \xi) d\rho + \\ &\quad - \frac{J_x J_y}{J_x J_y - J_{xy}^2} \int_{\xi}^1 \frac{F}{F_0} X_{01}(\rho) (\rho - \xi) d\rho, \\ Y_{11}(\xi) &= \frac{J_y J_0}{J_x J_y - J_{xy}^2} \int_{\xi}^1 \frac{F}{F_0} Y_{01}(\rho) (\rho - \xi) d\rho - \\ &\quad - \frac{J_{xy} J_0}{J_x J_y - J_{xy}^2} \int_{\xi}^1 \frac{F}{F_0} X_{01}(\rho) (\rho - \xi) d\rho, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV 67})$$

т. е. функции $X_{11}(\xi)$ и $Y_{11}(\xi)$ могут быть найдены после интегрирования уравнений (XIV 67).

Повторяя аналогичный процесс, можно получить функции $X_{21}(\xi)$, $Y_{21}(\xi)$, $X_{31}(\xi)$, $Y_{31}(\xi)$, ..., $X_{n1}(\xi)$, $Y_{n1}(\xi)$. Покажем, что при увеличении числа последовательных приближений функции $X_{n1}(\xi)$ и $Y_{n1}(\xi)$ будут пропорциональны функциям $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$, определяющим первую собственную форму колебаний

Представим функции $X_{01}(\xi)$ и $Y_{01}(\xi)$ в виде рядов:

$$X_{01}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{0i} u_i(\xi), \quad Y_{01}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{0i} v_i(\xi), \quad (\text{XIV } 68)$$

где a_{0i} — числовые коэффициенты, $u_i(\xi)$, $v_i(\xi)$ — функции, определяющие i -ю собственную форму колебаний закрученной лопатки.

Учитывая условия ортогональности (XIV 66), получим следующие формулы для определения коэффициентов a_{0i} :

$$a_{0i} = \frac{\int_0^1 \frac{F}{F_0} (X_{01} u_i + Y_{01} v_i) d\xi}{\int_0^1 \frac{F}{F_0} (u_i^2 + v_i^2) d\xi}. \quad (\text{XIV } 69)$$

Функции $X_{11}(\xi)$, $Y_{11}(\xi)$, ..., $X_{n1}(\xi)$, $Y_{n1}(\xi)$ также можно разложить в ряд по собственным формам:

$$X_{11}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{1i} u_i(\xi), \quad X_{n1}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} u_i(\xi),$$

$$Y_{11}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{1i} v_i(\xi), \quad Y_{n1}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} v_i(\xi),$$

где

$$a_{1i} = \frac{\int_0^1 \frac{F}{F_0} (X_{11} u_i + Y_{11} v_i) d\xi}{\int_0^1 \frac{F}{F_0} (u_i^2 + v_i^2) d\xi}; \quad \dots; \quad a_{ni} = \frac{\int_0^1 \frac{F}{F_0} (X_{n1} u_i + Y_{n1} v_i) d\xi}{\int_0^1 \frac{F}{F_0} (u_i^2 + v_i^2) d\xi}. \quad (\text{XIV } 70)$$

Учитывая уравнения (XIV.64), (XIV.67), (XIV.69) и (XIV.70), получим следующие соотношения между коэффициентами a_{ni}

$$a_{ni} = \alpha a_{(n-1)i} / p_i^2 = \alpha^2 a_{(n-2)i} / p_i^4 = \dots = \alpha^n a_{0i} / p_i^{2n}. \quad (\text{XIV } 71)$$

Так как $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$, то при увеличении числа последовательных приближений n имеем:

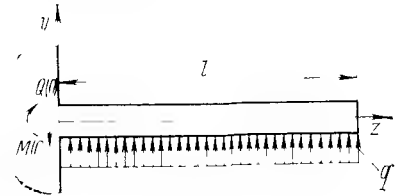
$$X_{n1}(\xi) \rightarrow (\alpha^n a_{01} / p_1^{2n}) u_1(\xi); \quad Y_{n1}(\xi) \rightarrow (\alpha^n a_{01} / p_1^{2n}) v_1(\xi);$$

$$X_{(n+1)1}(\xi) / X_{n1}(\xi) \rightarrow p_1^2 / \alpha; \quad Y_{(n+1)1}(\xi) / Y_{n1}(\xi) \rightarrow p_1^2 / \alpha$$

XIV.5. ВЛИЯНИЕ ПОДАТЛИВОСТИ ЗАДЕЛКИ И ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ЛОПАТОК ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

В п. XI.5 было рассмотрено влияние податливости заделки на собственные частоты изгибных колебаний лопаток постоянного сечения. В настоящем параграфе оценим влияние податливости заделки на первую собственную частоту незакрученной лопатки переменного поперечного сечения. Так как в п. XI.5 было показано, что наибольшее влияние на первую собственную частоту консольных лопаток оказывает коэффициент c_{22} , то будем считать, что в корневом сечении лопатки ($z = 0$) выполняются следующие граничные условия.

$$v(0) = 0; \quad \frac{dv(0)}{dz} = c_{22} M(0) = c_{22}^{\text{отн}} \frac{M(0) i_0}{E J_0}, \quad (\text{XIV } 72)$$



где i_0 и J_0 — радиус инерции и момент инерции корневого сечения лопатки.

Рис XIV 4. Используемая система координатных осей и нагрузки, действующие на лопатку

При определении первой собственной частоты лопатки с учетом податливости заделки воспользуемся методом Рэлея, т. е. будем считать, что собственная форма совпадает с кривой прогиба под действием равномерно распределенной нагрузки. Положительные направления координатных осей и действующие на лопатку нагрузки изображены на рис. XIV 4.

Первоначально определим с помощью метода Рэлея первую собственную частоту лопатки постоянного сечения. С учетом граничных условий (XIV.72) получим следующие выражения для изгибающих моментов, углов наклона и прогибов различных поперечных сечений, а также кинетической T и потенциальной Π энергии лопатки:

$$\left. \begin{aligned} M(z) &= EJ \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{ql^2}{2} - qlz + \frac{qz^2}{2}; \\ \frac{dv(z)}{dz} &= \frac{q}{2EJ} \left(l^2 z - lz^2 + \frac{z^3}{3} \right) + c_{22}^{\text{отн}} \frac{ql^2 i_0}{2EJ}; \\ v(z) &= \frac{q}{2EJ} \left(\frac{l^2 z^2}{2} - \frac{lz^3}{2} + \frac{z^4}{12} \right) + c_{22}^{\text{отн}} \frac{ql^2 lz}{2EJ}; \\ T &= \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} p^2 \int_0^l F v^2 dz; \quad \Pi = \frac{1}{2} E \int_0^l J \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \frac{dv(0)}{dz} M(0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV } 73)$$

В частном случае, при условии $c_{22} = 0$, приходим к полученному в п. XIV.2 приближенному значению первой собственной

частоты жестко заделанной консольной лопатки:

$$T_0 = \frac{1}{2} \rho^2 F \frac{\gamma}{g} \frac{q^2 l^9}{576 E^2 J^2} 2,311; \quad \Pi_0 = \frac{q^2 l^5}{40 E J};$$

$$\rho_0^2 = 12,47 E J g / (F l^4 \gamma); \quad \rho_0 = 3,53 \sqrt{E J g / (F l^4 \gamma)},$$

где индекс нуль указывает на то, что податливостью заделки пренебрегают.

При учете податливости заделки представим кинетическую и потенциальную энергию лопатки в виде:

$$T = T_0 + \Delta T; \quad \Pi = \Pi_0 + \Delta \Pi,$$

где ΔT и $\Delta \Pi$ — дополнительная кинетическая и потенциальная энергия лопатки, связанная с податливостью заделки.

Так как на практике выполняется условие $l/i \gg 1$, то ограничимся приближенным выражением для величины v^2 :

$$v^2 \approx \frac{q^2}{4 F^2 J^2} \left(\frac{l^2 z^2}{2} - \frac{l z^3}{3} + \frac{z^4}{12} \right)^2 + \frac{q^2 l^2 z}{2 F^2 J^2} \left(\frac{l^2 z^2}{2} - \frac{l z^3}{3} + \frac{z^4}{12} \right) c_{22}^{\text{отн}}. \quad (\text{XIV.74})$$

Используя формулу (XIV.74), получим:

$$\left. \begin{aligned} T &= T_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) = \frac{1}{2} \rho^2 F \frac{q^2 l^9}{576 E^2 J^2} 2,311 \left(1 + 9 c_{22}^{\text{отн}} \frac{i}{l} \right); \\ \Pi &= \Pi_0 \left(1 + \frac{\Delta \Pi}{\Pi_0} \right) = \frac{q^2 l^5}{40 E J} \left(1 + 5 c_{22}^{\text{отн}} \frac{i}{l} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV.75})$$

Так как собственная частота лопатки с учетом податливости заделки определяется формулой $\rho^2 = \Pi/T$, то введя, как и в п. XI.5, величину $\psi = \rho/\rho_0$, получим

$$\psi = \sqrt{\frac{1 + (\Delta \Pi/\Pi_0)}{1 + (\Delta T/T_0)}}. \quad (\text{XIV.76})$$

Поскольку в соответствии с формулами (XIV.75) $\Delta \Pi/\Pi_0 < \Delta T/T_0$, а при $l \ll 1/\Delta T/T_0 \ll 1$, то преобразуем выражение (XIV.76) к следующему виду:

$$\psi \approx \frac{1}{\sqrt{1 + (\Delta T/T_0) - (\Delta \Pi/\Pi_0)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (4 c_{22}^{\text{отн}} i/l)}}. \quad (\text{XIV.76a})$$

На рис. XIV.5 приведено сравнение точной зависимости ψ от l/i , полученной в п. XI.5 при использовании граничных условий (XIV.72), и приближенной зависимости ψ от l/i в соответствии с формулой (XIV.76a). Как видно, использование приближенной зависимости (XIV.76a) обеспечивает достаточную точность в широком диапазоне изменения отношения l/i .

Для лопатки переменного поперечного сечения коэффициент ψ также может быть определен по формуле (XIV.76). Естественно, что в этом случае величины T_0 , T , ΔT , Π_0 , Π , $\Delta \Pi$ должны быть вычислены с учетом изменения геометрических характеристик

по высоте лопатки. При проведении оценочных расчетов можно приближенно принять, что хорда по высоте лопатки сохраняется неизменной. При этих условиях выполняются приближенные зависимости:

$$F(z) = F_0 [1 - (z/l)\beta]; \quad J(z) = J_0 [1 - (z/l)\beta]^3, \quad (\text{XIV.77})$$

где $\beta = [F_0 - F(l)]/F_0$.

При выполнении условий (XIV.77) можно найти зависимость ψ от l/i , аналогичную (XIV.76a). Разница, однако, заключается в том, что числовой коэффициент в знаменателе формулы (XIV.76a)

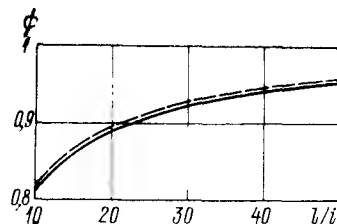


Рис. XIV.5. Зависимость коэффициента ψ от отношения l/i :
— точное решение;
--- приближенное решение по формуле (XIV.76a)

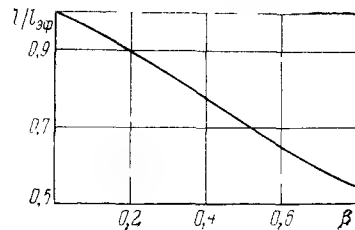


Рис. XIV.6. Зависимость «эффективной» длины лопатки от ее клиновидности

будет зависеть от величины β . Расчеты показывают, что, например, при $\beta = 0,2$ подкоренное выражение в формуле (XIV.76a) будет равняться $1 + 3,54 c_{22}^{\text{отн}} i/l$, а при $\beta = 0,6$ получим $1 + 2,61 c_{22}^{\text{отн}} i/l$ и т. д.

Формулу (XIV.76a) для лопатки переменного поперечного сечения можно представить в виде

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (4 c_{22}^{\text{отн}} i/l_{\text{эф}})}} \quad (\text{XIV.78})$$

где $l_{\text{эф}}$ — «эффективная» длина лопатки постоянного сечения, у которой $F(z) = F_0 = \text{const}$, $J(z) = J_0 = \text{const}$, а снижение первой собственной частоты из-за податливости заделки будет таким же, как для клиновидной лопатки длиной l . Например, в соответствии со сказанным выше при $\beta = 0,2$ получим $3,54 i/l = 4 i/l_{\text{эф}}$, или $l/l_{\text{эф}} = 0,885$, а при $\beta = 0,6$ имеем $2,62 i/l = 4 i/l_{\text{эф}}$, или $l/l_{\text{эф}} = 0,652$ и т. д.

График зависимости $l/l_{\text{эф}}$ от β приведен на рис. XIV.6 [33]. Как видно, влияние податливости заделки на собственные частоты клиновидных лопаток оказывается меньшим, чем для лопаток постоянного сечения. Действительно, $l/l_{\text{эф}} < 1$ при $\beta > 0$, т. е. одинаковое в процентном отношении снижение собственных частот имеет место для клиновидной лопатки меньшей длины,

чем длина лопатки постоянного поперечного сечения, совпадающего с корневым сечением клиновидной лопатки.

При использовании рис. II.25 для оценки влияния податливости заделки на первую собственную частоту клиновидной лопатки по оси абсцисс следует откладывать отношение $l_{эф}/i_0$, где величина $l_{эф}$ зависит от клиновидности лопатки β и может быть определена по рис. XIV.6, а $i_0 = \sqrt{J_0/F_0}$.

Рассмотрим влияние центробежных сил на собственные частоты колебаний лопаток. Способ вычисления собственных частот изгибно-крутильных колебаний закрученных лопаток переменного сечения в поле центробежных сил будет изложен в гл. XV,

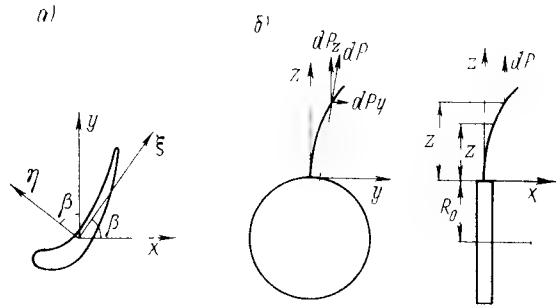


Рис. XIV.7 Принятая система координатных осей и центробежные силы, действующие на элемент лопатки

а в настоящем параграфе получим приближенные, но более общие формулы для оценки влияния центробежных сил на собственные частоты изгибных колебаний незакрученных лопаток постоянного и переменного поперечного сечения.

Будем считать, что лопатка совершает колебания относительно минимальной оси инерции поперечного сечения, составляющего угол β с осью турбины (рис. XIV.7, а), и пренебрежем изгибом относительно максимальной оси инерции. Как и обычно, прогиб лопатки при колебаниях обозначим $v(z)$. Центробежные силы, действующие на элемент лопатки длиной dz , изображены на рис. XIV.7, б.

Значения центробежных сил, действующих на рассматриваемый элемент, определяются следующими формулами:

$$dP_z \approx dP = (\gamma/g) \omega^2 F(z) (R_0 + z) dz; \quad dP_y = (\gamma/g) \omega^2 F(z) v(z) \cos \beta dz; \\ dP_\eta = (\gamma/g) \omega^2 F(z) v(z) \cos^2 \beta dz.$$

Работы составляющих dP и dP_η при изгибе лопатки определяются выражениями:

$$dA_1 = -dP_z w(z); \quad dA_2 = dP_\eta v(z)/2,$$

где $w(z)$ — радиальное перемещение сечения с координатой z при деформации лопатки:

$$w(z) = \int_0^z \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2} dz \approx z + \frac{1}{2} \int_0^z \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 dz.$$

Учитывая эти соотношения, получим следующие формулы для определения работы центробежных сил, распределенных по всей длине лопатки:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \int_0^l F(z) (R_0 + z) \int_0^z \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 dz dz; \\ A_2 &= \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \cos^2 \beta \int_0^l F(z) v^2(z) dz \end{aligned} \right\} \quad (XIV.79)$$

Как и ранее, кинетическая и потенциальная энергия лопатки определяются формулами:

$$T = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} p^2 \int_0^l F(z) v^2(z) dz, \quad \Pi = \frac{1}{2} E \int_0^l J(z) \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)^2 dz.$$

По закону сохранения энергии должно выполняться равенство

$$\Pi - A_1 - A_2 = T. \quad (XIV.80)$$

Перейдем к относительной координате, обозначив $\xi = z/l$; $\rho = \bar{z} l$, $v' =$ производную по координате ξ . Используя формулы (XIV.79) и (XIV.80), получим

$$p^2 = \frac{E J_0 g}{F_0 l^4 \gamma} \frac{\int_0^1 \frac{J}{J_0} (v')^2 d\xi}{\int_0^1 \frac{F}{F_0} v^2 d\xi} + B \omega^2, \quad (XIV.81)$$

где

$$B = \frac{\int_0^1 \frac{F}{F_0} \left(\frac{R_0}{l} + \xi\right) \int_0^\xi \left(\frac{dv}{d\rho}\right)^2 d\rho d\xi}{\int_0^1 \frac{F}{F_0} v^2 d\xi} - \cos^2 \beta. \quad (XIV.82)$$

Аналогичная, хотя и несколько более сложная формула может быть получена при вычислении частот синфазных колебаний пакета лопаток, поскольку в этом случае необходимо будет учесть также кинетическую и потенциальную энергию соединяющих лопатки связей [107].

В формулы (XIV.81) и (XIV.82) входит неизвестная собственная форма колебаний вращающейся лопатки $v(z)$. В качестве первого приближения можно использовать собственную форму колебаний невращающейся лопатки, полученную, например, с помощью метода последовательных приближений. При этом предположении коэффициент B не будет зависеть от скорости вращения, т. е. динамическая частота лопатки будет определяться формулой

$$p_{\text{дин}}^2 = p_{\text{ст}}^2 + B\omega^2 \quad \text{или} \quad f_{\text{дин}}^2 = f_{\text{ст}}^2 + Bn^2,$$

где n — частота вращения ротора, с^{-1} .

В п. II.5 приведены значения коэффициента B , подсчитанные указанным выше способом для различных собственных форм колебаний лопаток постоянного сечения и клиновидных лопаток [10, 136, 204]. Указанные формулы могут быть использованы для приближенной оценки влияния центробежных сил на собственные частоты изгибных колебаний лопаток.

Центробежные силы влияют, хотя и в меньшей степени, и на крутильные колебания лопаток. При кручении лопатки, растянутой центробежными силами, геометрическая жесткость поперечного сечения на кручение T_0 возрастает даже в том случае, если лопатка не обладает предварительной закруткой [220, 221]. Действительно, при закручивании лопатки на угол θ составляющие лопатку волокна отклоняются от радиального положения, в связи с чем появляются составляющие нормальных напряжений σ_x и σ_y в направлении осей x и y , вызывающие дополнительный крутящий момент.

Напряжения σ_x и σ_y в точке поперечного сечения с координатами r, α определяются следующими формулами:

$$\sigma_x = -\sigma_z r \frac{d\theta}{dz} \sin(\alpha + \theta) \approx -\sigma_z r \frac{d\theta}{dz} \sin \alpha;$$

$$\sigma_y = \sigma_z r \frac{d\theta}{dz} \cos(\alpha + \theta) \approx \sigma_z r \frac{d\theta}{dz} \cos \alpha.$$

Так как в соответствии с принятым правилом знаков крутящий момент считается положительным, если вызывает поворот против часовой стрелки, то величина момента, создаваемого нормальными напряжениями σ_x и σ_y , будет равна

$$\begin{aligned} M_z(\sigma) &= \int_F (-\sigma_x y + \sigma_y x) dF = \sigma_z \frac{d\theta}{dz} \int_F (ry \sin \alpha + rx \cos \alpha) dF = \\ &= \sigma_z \frac{d\theta}{dz} J_p, \end{aligned} \quad (\text{XIV.83})$$

где $J_p = \int (x^2 + y^2) dF$ — полярный момент инерции.

Так как часть крутящего момента создается касательными напряжениями (см. п. XII.1):

$$M_z(\tau) = GT_0 \frac{d\theta}{dz},$$

то связь полного крутящего момента с производной от угла закручивания $d\theta/dz$ для растянутой лопатки будет определяться формулой

$$M_z = M_z(\sigma) + M_z(\tau) = (GT_0 + \sigma_z J_p) \frac{d\theta}{dz} = GT \frac{d\theta}{dz}, \quad (\text{XIV.84})$$

где $GT = GT_0 + \sigma_z J_p$.

Как видно, жесткость лопатки на кручение в поле центробежных сил в соответствии с формулой (XIV.84) несколько возрастает, что приводит к некоторому, хотя и незначительному повышению ее собственных частот. Более подробно влияние центробежных сил на собственные частоты изгибно-крутильных колебаний рассмотрено в гл. XV.

Глава XV

ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОТДЕЛЬНОЙ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОЙ ЛОПАТКИ

ХV.1. ВЫВОД СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ОТДЕЛЬНОЙ ЛОПАТКИ

В гл. II отмечалось, что существуют различные методы определения собственных частот колебаний лопаток. Наиболее часто рабочие лопатки турбомашин схематизируются в виде тонкостенных естественно-закрученных стержней, совершающих изгибно-крутильно-продольные или изгибно-крутильные колебания [41, 44, 61, 62, 64, 186, 207, 208]. В тех случаях, когда необходимо определить «пластиночные» формы колебаний или учесть «косую» заделку лопатки, последнюю рассматривают в виде тонкой пластины или оболочки [6, 57, 119]. Наконец, в последние годы для определения собственных частот лопаток все более широкое распространение получает метод конечных элементов [68, 219, 229], позволяющий одновременно вычислить коэффициенты концентрации динамических напряжений, учесть влияние податливости заделки и т. д. В настоящей главе, посвященной в основном определению собственных частот лопаток цилиндра низкого давления паровых турбин, лопатки представляются в виде тонкостенных закрученных стержней. Указанная схематизация позволяет выявить некоторые общие закономерности частотного спектра и оценить допустимые границы использования упрощенных расчетных схем.

Применение указанной схематизации оправдывается тем, что для рассматриваемого класса лопаток, как правило, хорда лопатки b много меньше ее длины l , а максимальная толщина поперечного сечения c , в свою очередь, много меньше хорды. Таким образом, выполняются следующие соотношения:

$$b/l \ll 1; \quad c/b \ll 1. \quad (\text{XV.1})$$

Схематическое изображение лопатки и используемые системы координатных осей приведены на рис. V.1 и XV.1.

В настоящей главе введены следующие системы координат: XYZ — проходит через центр тяжести корневого сечения (ось X параллельна оси вращения и направлена в сторону выходной кромки; ось Y расположена в плоскости вращения; ось Z направлена по радиусу от корня к вершине лопатки; положительное направление оси Y выберем таким образом, чтобы принятая система координат была правой); xyz — проходит через центр тяжести O текущего поперечного сечения (рис. XV.1), а оси x , y и z параллельны соответственно осям X , Y и Z ; $x_1y_1z_1$ — проходит через центр изгиба O_1 текущего сечения. Кроме того, ξ и η — главные оси инерции текущего сечения, проходящие через центр тяжести

(рис. XV.1); ξ_1 и η_1 — оси, параллельные главным осям инерции, но проходящие через центр изгиба; α — угол между осью x_1 и радиус-вектором r_1 , соединяющим центр изгиба с произвольной точкой поперечного сечения $\mathfrak{z}$ с координатами x_1 , y_1 ; β — угол между осями x и ξ ; угол β может быть, вообще говоря, произвольным, однако для рассматриваемых лопаток выполняется следующее соотношение

$$\tau_0 b \ll 1, \quad (\text{XV.2})$$

где $\tau_0 = d\beta/dz$.

Из рис. XV.1 следует, что при принятом положительном направлении осей имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \cos \beta + y \sin \beta; & \eta &= -x \sin \beta + y \cos \beta; \\ x &= \xi \cos \beta - \eta \sin \beta; & y &= \xi \sin \beta + \eta \cos \beta; \\ x_1 &= r_1 \cos \alpha; & y_1 &= r_1 \sin \alpha; \\ x_1 &= x + x_1; & y_1 &= y + y_1, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.3})$$

где x_1 , y_1 — координаты центра тяжести в системе $x_1O_1y_1$.

Из неравенств (XV.1) следует, что, по крайней мере, при низших собственных формах должны выполняться соотношения: $\sigma_c \gg \sigma_x$; $\sigma_c \gg \sigma_y$; $\tau_{zx} \gg \tau_{xy}$; $\tau_{xy} \gg \tau_{xz}$ (расчеты, проведенные

с помощью метода конечных элементов, подтверждают эти соотношения).

В дальнейшем будем считать, что приближенно выполняются следующие равенства:

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0. \quad (\text{XV.4})$$

Из равенств (XV.4) следует, что

$$\sigma_z = E\epsilon_z. \quad (\text{XV.5})$$

Введем следующие дополнительные упрощающие предположения, приближенно выполняющиеся для рассматриваемого класса лопаток.

1. Форма и размеры поперечных сечений медленно и непрерывно изменяются вдоль оси лопатки. Это дает возможность, как и в гл. V, ввести понятие (хотя и не строгое) винтового волокна как элемента лопатки, соединяющего сходственные точки соседних поперечных сечений. Ранее было показано, что угол, составляемый винтовым волокном с осью z_1 , равен $\tau_0 r_1$. Учитывая соотношение (XV.2), будем считать, что нормальные напряжения, действующие вдоль винтового волокна, совпадают по величине с напряжениями σ_z . Для закрученной лопатки переменного сечения понятие центра изгиба имеет ограниченное практическое значение, так как отсутствие поворота какого-либо поперечного сечения при приложении перерезывающей силы не означает отсутствия поворота других сечений [191]. Учитывая, однако, медленное изменение формы и размеров поперечных сечений лопатки, будем считать, что в каждом сечении существует центр изгиба, совпадающий с центром изгиба для цилиндрической балки с тем же поперечным сечением, причем линия, соединяющая центры изгиба различных поперечных сечений лопатки, мало отклоняется от радиальной прямой.

2. Линия, соединяющая центры тяжести различных поперечных сечений, так же как и линия, соединяющая центры изгиба, мало отклоняется от радиальной прямой. Приближенно можно считать, что эти линии совпадают соответственно с осями Oz и O_1z_1 .

3. Так как рассматриваются малые колебания, то принимается, что динамические нагрузки и перемещения значительно меньше статических, вызванных центробежными силами. При изучении колебаний в первом приближении будем считать, что под действием центробежных сил лопатка раскручивается на угол $\theta_c(z)$, являющийся функцией координаты z , и растягивается, причем деформация в направлении оси z волокна, соединяющего центры тяжести различных поперечных сечений, составляет $\epsilon_0(z)$; воздействием статических напряжений изгиба на колебания лопатки будем пренебрегать. Учитывая результаты, полученные при статических расчетах лопаток, считаем, что выполняются соотношения

$$0 \ll \theta_{c1} \ll 1, \quad (\text{XV.6})$$

где θ — амплитудное значение угла поворота поперечного сечения при колебаниях.

4. Принимая во внимание соотношения (XV.1), пренебрегаем влиянием перерезывающих сил на прогиб лопатки, а также не будем учитывать стесненность кручения лопатки и податливость заделки.

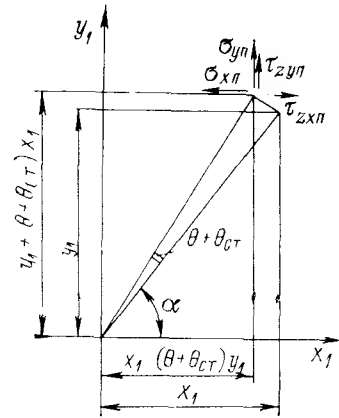


Рис XV.2 Касательные и нормальные напряжения, создающие крутящий момент в поперечном сечении лопатки

Рассматривая лопатку как закрученный тонкостенный стержень, будем считать, что поперечное сечение лопатки поступательно перемещается в направлении осей x , y и z , поворачивается относительно осей x и y и закручивается относительно центра изгиба O_1 ; кроме того, имеют место радиальные перемещения различных точек сечения за счет его деформации при кручении.

С учетом принятых предположений и указанных на рис. V.1 и XV.1 положительных направлений осей, перемещения произвольной точки поперечного сечения с координатами x , y , z будут определяться следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} U_{II}(x, y, z, t) &= U(x, y, z, t) + U_{CT}(x, y, z) = \\ &= u(z, t) - \theta(z, t)y_1 - \theta_{CT}(z)y_1, \\ V_{II}(x, y, z, t) &= V(x, y, z, t) + V_{CT}(x, y, z) = \\ &= v(z, t) + \theta(z, t)x_1 + \theta_{CT}(z)x_1, \\ W_{II}(x, y, z, t) &= W(x, y, z, t) + W_{CT}(x, y, z) = \\ &= w(z, t) - \lambda u' - yv' + \theta'\varphi + w_{CT}(z) + \theta_{CT}'\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (XV.7)$$

где U_{II} , V_{II} , W_{II} — полные перемещения в направлении осей x , y и z , состоящие из динамических перемещений U , V и W и статических перемещений U_{CT} , V_{CT} , W_{CT} ; u , v , w — поступательные перемещения сечения в направлении осей x , y и z ; u' , v' , θ' — частные производные по координате z ($u' = du/dz$ и т. д.); $\theta_{CT}' = d\theta_{CT}/dz$ — производная по координате z ; $\varphi(x, y, z)$ — функция кручения Сен-Венана, зависящая от формы поперечного сечения.

Учитывая предположение 1, будем считать, что выполняется приближенное равенство $\varphi' = 0$. При проведении дальнейших преобразований в соответствии с предположением 3 будем считать, что $w_{CT} \gg w$.

Используя формулы (XV.5) и (XV.7), найдем значения деформаций ϵ_{zII} и нормальных напряжений σ_{zII} :

$$\epsilon_{zII} = W_{II}' = w' - \lambda u'' - yv'' + \theta'\tau_0 r_1^2 + w_{CT}' + \theta_{CT}'\tau_0 r_1^2, \quad (XV.8)$$

$$\sigma_{zII} = \sigma_z + \sigma_{zCT} = Ew' - E\lambda u'' - Eyv'' + E\theta'\tau_0 r_1^2 + E\epsilon_0 + E\theta_{CT}'\tau_0 r_1^2, \quad (XV.9)$$

где σ_z и σ_{zCT} — соответственно динамические и статические напряжения в точке с координатами x , y , z .

Кроме того, при выводе формул (XV.8) и (XV.9) учтено, что

$$\varphi' = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z};$$

последнее выражение, как показано в гл. V, равно следующей величине.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \tau_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \eta - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \xi \right) \approx \tau_0 r_1^2.$$

Учтено также, что в соответствии с предположениями 1 и 4 следует пренебречь членами $E\varphi\theta''$ и $E\varphi\theta_{CT}''$, характеризующими стесненность кручения.

Используя формулы (XV.7), найдем значения сдвигов и пропорциональных им касательных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{zxII} &= \frac{\partial U_{II}}{\partial z_1} + \frac{\partial W_{II}}{\partial x_1} = u' - y_1(\theta - \theta_{CT})' - u' - (\theta + \theta_{CT})' \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \\ &= (\theta + \theta_{CT})' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - y_1 \right); \\ \gamma_{zyII} &= \frac{\partial V_{II}}{\partial z_1} + \frac{\partial W_{II}}{\partial y_1} = (\theta + \theta_{CT})' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + x_1 \right); \end{aligned} \right\} \quad (XV.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zxII} &= \tau_{zx} + \tau_{zxCT} = G\theta' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - y_1 \right) + G\theta_{CT}' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - y_1 \right); \\ \tau_{zyII} &= \tau_{zy} + \tau_{zyCT} = G\theta' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + x_1 \right) + G\theta_{CT}' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + x_1 \right), \end{aligned} \right\} \quad (XV.11)$$

где τ_{zx} и τ_{zxCT} — соответственно динамические и статические касательные напряжения в точке с координатами x_1 , y_1 .

Так как в соответствии с предположением 1 нормальные напряжения направлены вдоль винтовых волокон, составляющих в деформированном состоянии угол $(\tau_0 + \theta_{CT}' + \theta')$ с осью z , то проекции нормальных напряжений на оси x_1 и y_1 окажутся следующими (рис. XV.2):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xII} &= -\sigma_{zII} r_1 (\tau_0 + \theta_{CT}' + \theta') \sin(\alpha + \theta_{CT} + \theta); \\ \sigma_{yII} &= \sigma_{zII} r_1 (\tau_0 + \theta_{CT}' + \theta') \cos(\alpha + \theta_{CT} + \theta). \end{aligned} \right\} \quad (XV.12)$$

Крутящий момент, создаваемый относительно центра изгиба O_1 напряжениями, определяемыми по формулам (XV.11) и (XV.12),

в соответствии с принятым правилом знаков выражается формулой (см. рис. XV.2)

$$\begin{aligned} M_{z\Pi} = M_z + M_{z\text{CT}} = \int_F \{ & (-\tau_{z\Pi} - \sigma_{\Pi\Pi}) [y_1 + (\theta + \theta_{\text{CT}}) x_1] + \\ & + (\tau_{z\Pi} + \sigma_{\Pi\Pi}) [x_1 - (\theta + \theta_{\text{CT}}) y_1] \} dF = \\ = \int_F \{ & [-G(\theta' + \theta'_{\text{CT}}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - y_1 \right) + \\ & + (\sigma_z + \sigma_{z\text{CT}}) r_1 (\tau_0 + \theta'_{\text{CT}} + \theta') \sin(\alpha + \theta_{\text{CT}} + \theta)] y_1 + (\theta + \theta_{\text{CT}}) x_1] + \\ & + [G(\theta' + \theta'_{\text{CT}}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + x_1 \right) + \\ & + (\sigma_z - \sigma_{z\text{CT}}) r_1 (\tau_0 + \theta'_{\text{CT}} + \theta') \cos(\alpha + \theta_{\text{CT}} + \theta)] x_1 - (\theta + \theta_{\text{CT}}) y_1 \} dF, \end{aligned} \quad (\text{XV.13})$$

где M_z и $M_{z\text{CT}}$ — соответственно динамический и статический крутящие моменты.

Учитывая соотношения $\theta \ll \theta_{\text{CT}} \ll 1$; $\sigma_z \ll \sigma_{z\text{CT}}$; $r_1 \sin \alpha = y_1$; $r_1 \cos \alpha = x_1$; $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$, пренебрегая членами $\theta'_{\text{CT}}\theta_{\text{CT}}$, $(\theta'_{\text{CT}})^2$ и т.п. и введя обозначение

$$T_0 = \int_F \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + x_1 \right) x_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - y_1 \right) y_1 \right] dF,$$

из формулы (XV.13) получим

$$M_{z\text{CT}} = G\theta'_{\text{CT}}T_0 + \int_F \sigma_{z\text{CT}}\tau_0 r_1^2 dF + \int_F \sigma_{z\text{CT}}\theta'_{\text{CT}} r_1^2 dF. \quad (\text{XV.14})$$

Используя выражение (XV.9) для величины $\sigma_{z\text{CT}}$ и пренебрегая членами $(\theta'_{\text{CT}})^2$, преобразуем формулу (XV.14) к виду

$$\begin{aligned} M_{z\text{CT}} = G\theta'_{\text{CT}}T_0 + \tau_0 E \int_F (\varepsilon_0 + \theta'_{\text{CT}}\tau_0 r_1^2) r_1^2 dF + E\theta'_{\text{CT}} \int_F \varepsilon_0 r_1^2 dF = \\ = G\theta'_{\text{CT}}T_0 + E\varepsilon_0\tau_0 J_p + E\tau_0^2\theta'_{\text{CT}}J_{4p} + E\theta'_{\text{CT}}\varepsilon_0 J_p, \end{aligned} \quad (\text{XV.14a})$$

где

$$J_p = \int_F r_1^2 dF; \quad J_{4p} = \int_F r_1^4 dF.$$

Можно получить еще одну формулу для $M_{z\text{CT}}$, если использовать выражение для центробежной силы

$$\int_F \sigma_{z\text{CT}} dF = \mu C. \quad (\text{XV.15})$$

Здесь

$$\mu = (\gamma g) \omega^2; \quad C = \int_z^l F(z) (R_0 + z) dz,$$

где ω — угловая скорость вращения ротора турбины.

Подставив выражение (XV.9) для $\sigma_{z\text{CT}}$ в формулу (XV.15), найдем:

$$E\tau_0 F + E\theta'_{\text{CT}}\tau_0 J_p = \mu C, \quad \text{или} \quad E\varepsilon_0 = (\mu C - E\theta'_{\text{CT}}\tau_0 J_p)/F.$$

Используя это выражение и пренебрегая членами $(\theta'_{\text{CT}})^2$, преобразуем формулу (XV.14) к виду

$$M_{z\text{CT}} = (\mu C F) \tau_0 J_p + GT_{\text{CT}}', \quad (\text{XV.14б})$$

где

$$GT_{\text{CT}} = GT_0 + E\tau_0^2 J_{4p} - (\mu C F) J_p - E\tau_0^2 J_p^2/F. \quad (\text{XV.16})$$

Проведя аналогичные преобразования и учитывая, что $\sigma_{z\text{CT}} \gg \sigma_z$ и $\theta_{\text{CT}} \gg \theta$, получим выражение для динамического крутящего момента

$$M_z = GT_0\theta' + \int_F \sigma_z \tau_0 r_1^2 dF + \int_F \sigma_{z\text{CT}} \theta' r_1^2 dF. \quad (\text{XV.17})$$

Используя выражение (XV.9) для σ_z и $\sigma_{z\text{CT}}$ и пренебрегая членами типа $\theta'\theta'_{\text{CT}}$, найдем

$$\begin{aligned} M_z = GT_0\theta' + \tau_0 E \int_F (\omega' - xu'' - yv'') \cdot (\tau_0 r_1^2) r_1^2 dF + \theta' E\varepsilon_0 J_p = \\ = GT_0\theta' + \tau_0 E J_p \omega' - \tau_0 E J_{py} u'' - \tau_0 E J_{px} v'' - \theta' \tau_0^2 E J_{4p} - \theta' E\varepsilon_0 J_p, \end{aligned} \quad (\text{XV.17a})$$

где

$$J_{py} = \int_F r_1^2 x dF; \quad J_{px} = \int_F r_1^2 y dF.$$

Наконец, принимая во внимание приближенное равенство $\theta' E\varepsilon_0 J_p \approx \theta' (\mu C F) J_p$ и введя обозначение

$$GT = GT_0 + (\mu C F) J_p + \tau_0^2 E J_{4p}, \quad (\text{XV.18})$$

получим окончательное выражение для M_z :

$$M_z = GT\theta' + \tau_0 E J_p \omega' - \tau_0 E J_{py} u'' - \tau_0 E J_{px} v''. \quad (\text{XV.17б})$$

Используя формулу (XV.9) для $\sigma_{z\Pi}$, найдем выражения для изгибающих моментов $M_{\Pi\Pi}$ и $M_{\Pi\Pi}$ и продольной силы $Q_{z\Pi}$ (моменты считаются положительными при условии, что вызывают поворот

против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси на начало координат). Так,

$$M_{\text{хл}} = M_{\text{хст}} + M_{\text{д}} = \int_F \sigma_{\text{хл}} y dF,$$

где $M_{\text{хст}}$ и $M_{\text{д}}$ — соответственно статический и динамический изгибающие моменты:

$$M_{\text{хст}} = E \tau_0 J_{\text{рх}} \theta'_{\text{ст}}; \quad (\text{XV } 19)$$

$$\begin{aligned} M_{\text{д}} &= E \int_F (\omega' - \chi u'' - y v'' + \theta' \tau_0 r_1^2) y dF = \\ &= -E J_{\text{хл}} u'' - E J_{\text{хл}} v'' + E \tau_0 J_{\text{рх}} \theta', \end{aligned} \quad (\text{XV } 20)$$

где

$$J_{\text{хл}} = \int_F xy dF; \quad J_{\text{х}} = \int_F y^2 dF.$$

При выводе формулы (XV.19) учтено, что $\int_F y dF = 0$, так как оси x и y проходят через центр тяжести поперечного сечения.

С помощью аналогичных вычислений, учитывая, что $M_{\text{ул}} = - \int_F \sigma_{\text{ул}} x dF$, найдем:

$$M_{\text{уст}} = -E \tau_0 J_{\text{ру}} \theta'_{\text{ст}}; \quad (\text{XV } 21)$$

$$M_{\text{д}} = E J_{\text{ул}} u'' + E J_{\text{ул}} v'' - E \tau_0 J_{\text{ру}} \theta', \quad (\text{XV } 22)$$

где $J_{\text{у}} = \int_F x^2 dF$

Наконец,

$$Q_{\text{зл}} = Q_{\text{з}} + Q_{\text{зст}} = \int_F \sigma_{\text{зл}} dF,$$

где $Q_{\text{зст}}$ и $Q_{\text{д}}$ — статическая и динамическая продольные силы:

$$Q_{\text{зст}} = \int_F \sigma_{\text{зст}} dF = \mu C,$$

$$Q_{\text{д}} = \int_F \sigma_{\text{зд}} dF = E \int_F (\omega' - \chi u'' - y v'' + \theta' \tau_0 r_1^2) dF = E F \omega' - E \tau_0 J_{\text{р}} \theta'. \quad (\text{XV } 23)$$

Для получения системы дифференциальных уравнений, описывающих колебания лопатки, обычно используют принцип Остроградского—Гамильтона [44, 62, 186], однако в настоящем параграфе для большей наглядности выведем систему дифференциальных уравнений из условий равновесия элемента лопатки. Составим уравнения равновесия элемента лопатки длиной dz (рис. XV.3), используя полученные выше выражения для крутящего и изгибающих моментов и продольной силы. При промежуточных преобразованиях учтем, что $\sigma_{\text{зст}} \gg \sigma_{\text{д}}$, в связи с чем слагаемые типа

$Q_{\text{зст}} u'$ или $Q_{\text{д}}$ являются величинами одного порядка малости. В окончательных выражениях сохраним только зависящие от времени члены первого порядка малости, которые и определяют колебания лопатки. Члены, зависящие не от времени, а только от частоты вращения, определяют статические деформации лопатки в поле центробежных сил.

При составлении уравнений равновесия учтем, что по принципу Даламбера при колебаниях внешними нагрузками являются инерционные силы и моменты. Кроме того, учтем дополнительные силы и моменты, создаваемые центробежными силами при колебаниях лопатки. Уравнения равновесия для сил и изгибающих моментов

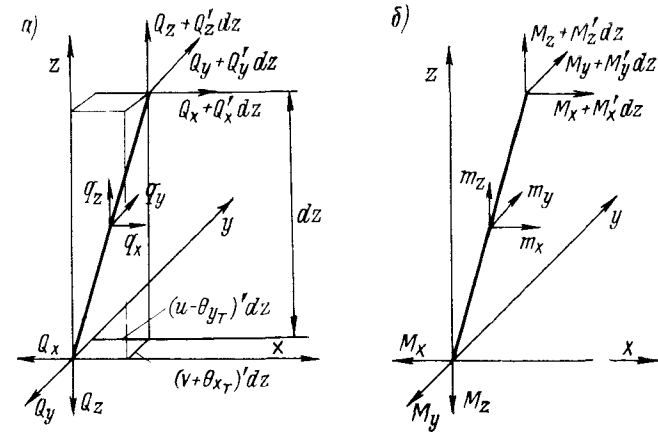


Рис. XV.3 Нагрузки (а) и моменты (б), действующие на элемент лопатки при колебаниях

составляются относительно центра тяжести поперечного сечения лопатки, а для крутящего момента — относительно центра изгиба. При составлении последнего уравнения необходимо учесть следующее. При колебаниях линия, соединяющая центры тяжести соседних поперечных сечений, получит в соответствии с формулой (XV.7) перемещения в направлении осей x и y , равные соответственно $u - \theta y_T$ и $v + \theta x_T$. В результате проекции центробежной силы, проходящей через центр тяжести сечения, на оси x и y окажутся равными:

$$P_x = \mu C (u - \theta y_T)'; \quad P_y = \mu C (v + \theta x_T)'. \quad (\text{XV } 24)$$

На элемент лопатки длиной dz в направлении осей x и y при колебаниях будут действовать результирующие усилия:

$$P'_x dz = \mu [C (u - \theta y_T)']' dz; \quad P'_y = \mu [C (v + \theta x_T)']' dz$$

Усилия P'_x и P'_y вызовут относительно центра изгиба крутящий момент

$$M_{\text{зр}} dz = \mu [-C (u - \theta y_T)' y_T + C (v + \theta x_T)' x_T] dz \quad (\text{XV } 24)$$

Таким образом, уравнения равновесия элемента лопатки длиной dz примут следующий вид (рис. XV.3):

$$\left. \begin{aligned} q_x + Q'_x &= 0; \quad q_y + Q'_y = 0; \quad q_z + Q'_z = 0; \\ m_x + M'_x - Q_y + Q_{z \text{ ст}}(v + \theta x_T)' &= 0; \\ m_y + M'_y + Q_x - Q_{z \text{ ст}}(u - \theta y_T)' &= 0; \\ m_z + M'_z + M'_{zP} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.25})$$

где q и m — распределенные нагрузки и моменты, действующие на единицу длины лопатки и представляющие собой сумму инерционных составляющих q^I и m^I и зависящих от времени нагрузок и моментов, вызванных центробежными силами.

Инерционные нагрузки и моменты, действующие на единицу длины лопатки, определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} dq_x^I &= -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dF; \quad dq_y^I = -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} dF; \\ dq_z^I &= -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dF; \quad dm_x^I = y dq_z^I; \\ dm_y^I &= -x dq_z^I; \quad dm_z^I = -x_1 dq_y^I - y_1 dq_x^I, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.26})$$

причем в выражениях (XV.26) отброшены величины более высоких порядков и учтено, что $\theta_{\text{ст}} \ll 1$.

Используя формулы (XV.7), отбрасывая величины второго порядка малости и учитывая, что

$$\int_F y_1 dF = \int_F (y + y_1) dF = y_T F,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} q_x^I &= -\frac{\gamma}{g} \int_F \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} y_1 \right) dF = \\ &= -\frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{g} F y_T \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}; \\ q_y^I &= -\frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{g} F x_T \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}; \\ q_z^I &= -\frac{\gamma}{g} \int_F \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - x \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - y \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + \varphi \frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2} \right) dF = \\ &= -\frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{g} S_q \frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2}; \\ m_x^I &= \frac{\gamma}{g} J_{xy} \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{g} J_x \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{g} J_{qx} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2}; \\ m_y^I &= -\frac{\gamma}{g} J_y \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{g} J_{xy} \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{g} J_{qy} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2}; \\ m_z^I &= -\frac{\gamma}{g} J_p \frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{g} x_T F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{g} y_1 F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.27})$$

где

$$S_\varphi = \int_F \varphi dF; \quad J_{qx} = \int_F \varphi y dF; \quad J_{qy} = \int_F \varphi x dF.$$

Так как в соответствии с предположением 4 не учитывается стесненность кручения, то в дальнейшем будем пренебрегать членами, содержащими величины S_φ , J_{qx} и J_{qy} .

Полные (статические и динамические) элементарные нагрузки, вызванные центробежными силами, определяются выражениями:

$$\begin{aligned} dq_{xп}^0 &= 0; \quad dq_{yп}^0 = \mu (y + v + \theta x_1 + \theta_{\text{ст}} x_1) dF; \\ dq_{zп}^0 &= \mu (R_0 + z + W_{п}) dF. \end{aligned}$$

Проинтегрировав нагрузки по площади поперечного сечения и сохранив только члены, зависящие от времени, получим:

$$q_x^0 = 0; \quad q_y^0 = \mu F (v + \theta x_T); \quad q_z^0 = \mu F w. \quad (\text{XV.28})$$

Распределенные крутящий и изгибающие моменты, вызванные центробежными силами, определяются следующими формулами (при составлении выражений учтено, что $\theta_{\text{ст}} \ll 1$):

$$\begin{aligned} dm_{xп}^0 &= (y + \theta x_1) dq_{zп}^0 + (y v' + x u') dq_{yп}^0; \\ dm_{yп}^0 &= -(x - \theta y_1) dq_{zп}^0; \quad dm_{zп}^0 = (x - \theta y_1) dq_{yп}^0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем моменты по площади поперечного сечения, представив полученные выражения в виде двух слагаемых, одно из которых зависит, а другое не зависит от времени: например, $m_{xп}^0 = m_x^0 + m_{x0}$, где m_{x0} — распределенный момент, не зависящий от времени. В результате интегрирования получим:

$$\left. \begin{aligned} m_{xп}^0 &= \mu \int_F [(y + \theta x_1) (R_0 + z + w + x u' - y v' + \\ &+ \theta' \varphi + \omega_{\text{ст}} + \theta'_{\text{ст}} \varphi) + (y v' + x u') (y + v + \theta x_1)] dF = \\ &= \mu (R_0 + z) x_T F \theta + m_{x0}; \\ m_{yп}^0 &= m_y^0 + m_{y0} = -\mu \int_F (x_1 - \theta y_1) \times \\ &\times (R_0 + z + w - x u' - y v' + \varphi \theta' + \omega_{\text{ст}} + \theta'_{\text{ст}} \varphi) dF = \\ &= \mu (R_0 + z) y_T F \theta + \mu J_y u' + \mu J_{xy} v' + m_{y0}; \\ m_{zп}^0 &= m_z^0 + m_{z0} = \mu \int_F (x_1 - \theta y_1) (y + v + \theta x_1) dF = \\ &= \mu [\theta (J_y - J_x) + x_T F (v + x_T \theta)] + m_{z0}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.29})$$

где $m_{z0} = \mu J_{xy}$.

Так как $q_y = q_y^I + q_y^0$; $q_z = q_z^I + q_z^0$; $m_x = m_x^I + m_x^0$ и т. д., то окончательные выражения для распределенных моментов и нагрузок примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -\frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{g} F y_T \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}; \\ q_y &= -\frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{g} F x_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \mu F v + \mu F x_T \theta; \\ q_z &= -\frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu F w; \\ m_x &= \frac{\gamma}{g} J_{xy} \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{g} J_x \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + \mu (R_0 + z) x_1 F \theta; \\ m_y &= -\frac{\gamma}{g} J_y \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{g} J_{xy} \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + \\ &+ \mu [(R_0 + z) y_1 F \theta + J_y u' + J_{xy} v']; \\ m_z &= -\frac{\gamma}{g} J_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{g} x_1 F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{g} y_T F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ &+ \mu [\theta (J_y - J_x) + F x_1 (v + x_T \theta)]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.30})$$

Кроме инерционных и центробежных сил на вращающуюся колеблющуюся лопатку действуют также кориолисовы силы. Как показано в [186], проекции на оси y и z элементарной кориолисовой силы, действующей на элемент dF единичной высоты, определяются выражениями:

$$dq_y^k = 2\omega \frac{\gamma}{g} \frac{\partial W}{\partial t} dF; \quad dq_z^k = -2\omega \frac{\gamma}{g} \frac{\partial V}{\partial t} dF.$$

Из сопоставления с выражениями (XV.27) видно, что кориолисовы силы пропорциональны скорости колебаний, в то время как силы инерции пропорциональны ускорению. В связи с тем что кориолисовы силы сдвинуты на 1/4 периода по отношению к силам инерции, будем пренебрегать влиянием кориолисовых сил на собственные частоты аналогично тому, как пренебрегали влиянием сил демпфирования при определении собственных частот лопаток постоянного сечения (см. п. XI.3).

Так как при вычислении собственных частот пренебрегаем влиянием кориолисовых сил и сил демпфирования, можно считать, что все поперечные сечения лопатки колеблются синфазно, т. е. зависимость перемещений от времени имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z, t) &= U(x, y, z) \sin pt; \\ V(x, y, z, t) &= V(x, y, z) \sin pt \text{ и т. д.,} \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.31})$$

где p — круговая собственная частота.

При выполнении условия (XV.31) распределенные нагрузки и моменты, определяемые формулами (XV.30), окажутся следующими:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \lambda F (u - y_T \theta); \quad q_y = (\lambda + \mu) F (v + x_T \theta); \\ q_z &= (\lambda + \mu) F w; \\ m_x &= \lambda (-J_{xy} u' - J_x v') + \mu (R_0 + z) x_1 F \theta; \\ m_y &= (\lambda + \mu) (J_y u' + J_{xy} v') + \mu (R_0 + z) y_1 F \theta; \\ m_z &= \lambda J_p \theta + \lambda F (x_T v - y_1 u) + \\ &+ \mu [\theta (J_y - J_x) + F x_1 (v + x_T \theta)], \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.32})$$

где $\lambda = (\gamma g) p^2$.

Прежде чем подставить выражения (XV.32) в уравнения (XV.25), примем во внимание следующее соображение: из уравнений (XV.25) следует, что Q_x , Q_y , Q_z являются величинами порядка $q_x l$, $q_y l$, $q_z l$, в то время как из уравнений (XV.26) вытекает, что m_x и m_y являются величинами порядка $q_z b$. Так как рассматриваются колебания лопаток, для которых $b/l \ll 1$, то величинами m_x и m_y в уравнениях (XV.25) будем пренебрегать. Это допущение — неучет инерции вращения при колебаниях — вносит ошибку такого же порядка [171], как и неучет влияния перерезывающих сил на прогиб лопатки (предположение 4), и при определении низших частот лопаток рассматриваемого класса является оправданным (см. п. II.4).

Из четвертого и пятого уравнений системы (XV.25), положив $m_x = m_y = 0$ и учитывая равенство (XV.15), найдем:

$$Q_x = \mu C (u - \theta y_T)' - M_y'; \quad Q_y = \mu C (v + \theta x_T)' + M_x'. \quad (\text{XV.33})$$

Подставив выражения (XV.176), (XV.20), (XV.22)—(XV.24), (XV.32), (XV.33) в уравнения (XV.25), получим следующую систему четырех дифференциальных уравнений, описывающих изгибно-крутильно-продольные колебания закрученной лопатки:

$$\left. \begin{aligned} \lambda F (u - y_T \theta) - (E J_y u'' + E J_{xy} v'' - E \tau_0 J_{py} \theta')'' + \\ + \mu [C (u - \theta y_T)']' &= 0; \\ (\lambda + \mu) F (v + x_T \theta) - \\ - (E J_{xy} u'' + E J_x v'' - E \tau_0 J_{px} \theta')'' + \\ + \mu [C (v + \theta x_T)']' &= 0; \\ (\lambda + \mu) F w + (E F w' + E \tau_0 J_p \theta')' &= 0; \\ \lambda J_p \theta + \lambda F (x_T v - y_1 u) + \mu [\theta (J_y - J_x) + \\ + F x_T (v + x_T \theta)] + (G T \theta' + \tau_0 E J_p w' - \\ - \tau_0 E J_{py} u'' - \tau_0 E J_{px} v'')' + \mu [C (v + \theta x_T)' x_T - \\ - C (u - \theta y_T)' y_T]' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.34})$$

где $G T = G T_0 + (\mu C / F) J_t + \tau_0^2 E J_{4p}$.

Несколько более полные системы уравнений, учитывающие, например, стесненность кручения, приведены в РТМ 24.026.05—74, а учитывающие стесненность кручения и прогибы, вызванные касательными напряжениями, — в работах [44, 186].

В некоторых практически важных случаях система уравнений (XV.34) допускает более или менее значительные упрощения. Например, если пренебречь несовпадением центра тяжести и центра изгиба, то система уравнений окажется следующей:

$$\left. \begin{aligned} \lambda F u - (E J_y u'' + E J_{xy} v'' - E J_{py} \tau_0 \theta')'' + \mu (C u')' &= 0; \\ (\lambda + \mu) F v - (E J_{xy} u'' + E J_x v'' - E J_{px} \tau_0 \theta')'' + \mu (C v')' &= 0; \\ (\lambda + \mu) F \omega + (E F \omega' + E J_p \tau_0 \theta')' &= 0; \\ \lambda J_p \theta + \mu \theta (J_y - J_x) + \\ + (E J_p \tau_0 \omega' - E J_{py} \tau_0 u'' - E J_{px} \tau_0 v'' + G T \theta')' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.35})$$

Если бы поперечные сечения лопатки обладали двумя осями симметрии, то, как показано в работе [186], при этом выполнялись бы условия: $x_1 = y_1 = 0$; $J_{px} = J_{py} = 0$. При соблюдении этих условий система (XV.35) распадается на две независимые системы:

$$\left. \begin{aligned} \lambda F u - (E J_y u'' + E J_{xy} v'')'' + \mu (C u')' &= 0; \\ (\lambda + \mu) F v - (E J_{xy} u' + E J_x v'')'' + \mu (C v')' &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.36})$$

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) F \omega + (E F \omega' + E J_p \tau_0 \theta')' &= 0; \\ \lambda J_p \theta + \mu \theta (J_y - J_x) + (E J_p \tau_0 \omega' + G T \theta')' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.37})$$

Система (XV.36) определяет изгибные колебания лопатки, а система (XV.37) — крутильно-продольные.

Дальнейшие упрощения можно выполнить, если лопатка является незакрученной, т. е. имеет место условие $\beta = \text{const}$, или $\tau_0 = d\beta/dz = 0$. В этом случае система (XV.37) распадается на два независимых уравнения, описывающих чисто продольные и чисто крутильные колебания:

$$(\lambda + \mu) F \omega + (E F \omega')' = 0; \quad \lambda J_p \theta + \mu \theta (J_y - J_x) + (G T \theta')' = 0, \quad (\text{XV.38})$$

где $G T = G T_0 + (\mu C / F) J_p$.

Система уравнений (XV.36), описывающих изгибные колебания незакрученной лопатки, упрощается, если уравнения записать относительно главных осей ξ и η . Используя выражения (XV.3), получим:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= (J_\eta - J_\xi) \sin \beta \cos \beta; \quad J_x = J_\eta \sin^2 \beta + J_\xi \cos^2 \beta; \\ J_y &= J_\eta \cos^2 \beta + J_\xi \sin^2 \beta, \end{aligned}$$

где $J_\eta = \int_F \xi^2 dF$, $J_\xi = \int_F \eta^2 dF$ — соответственно максимальный и минимальный моменты инерции.

Введем перемещения u_ξ и v_η вдоль осей ξ и η , связанные с перемещениями u и v зависимостями:

$$u = u_\xi \cos \beta - v_\eta \sin \beta; \quad v = u_\xi \sin \beta + v_\eta \cos \beta.$$

Выразив в системе (XV.36) u , v , J_x , J_y , J_{xy} через u_ξ , v_η , J_ξ , J_η , $\sin \beta$, $\cos \beta$ и учитывая, что в данном случае $\beta = \text{const}$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \lambda F (u_\xi \cos \beta - v_\eta \sin \beta) - (E J_\eta u_\xi'' \cos \beta - E J_\xi v_\eta'' \sin \beta)'' + \\ + \mu [C (u_\xi' \cos \beta - v_\eta' \sin \beta)]' &= 0; \\ (\lambda + \mu) F (u_\xi \sin \beta + v_\eta \cos \beta) - \\ - (E J_\eta u_\xi'' \sin \beta + E J_\xi v_\eta'' \cos \beta)'' + \\ + \mu [C (u_\xi' \sin \beta + v_\eta' \cos \beta)]' &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Если первое уравнение умножить на $\cos \beta$, а второе на $\sin \beta$ и сложить, а затем первое уравнение умножить на $-\sin \beta$, а второе на $\cos \beta$ и также сложить, то получим следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} \lambda F u_\xi - (E J_\eta u_\xi'')'' + \mu F (u_\xi \sin^2 \beta + v_\eta \cos \beta \sin \beta) + \\ + \mu (C u_\xi')' &= 0; \\ \lambda F v_\eta - (E J_\xi v_\eta'')'' + \mu F (u_\xi \sin \beta \cos \beta + v_\eta \cos^2 \beta) + \\ + \mu (C v_\eta')' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.36a})$$

Как видно, даже для незакрученной лопатки изгибные колебания относительно главных осей являются связанными из-за влияния центробежных сил. Связанность исчезает, если $\beta = 0$ или отсутствует вращение.

В последнем случае система (XV.36a) распадается на два независимых уравнения, описывающих колебания относительно минимальной и максимальной осей инерции:

$$\lambda F u_\xi - (E J_\eta u_\xi'')'' = 0; \quad \lambda F v_\eta - (E J_\xi v_\eta'')'' = 0. \quad (\text{XV.39})$$

Наконец, если рассматривать колебания лопатки постоянного поперечного сечения, то приходим к линейным дифференциальным уравнениям четвертого порядка с постоянными коэффициентами, подробно изученным в гл. XI:

$$\lambda F u_\xi - E J_\eta u_\xi^{IV} = 0; \quad \lambda F v_\eta - E J_\xi v_\eta^{IV} = 0. \quad (\text{XV.40})$$

Аналогичные упрощения допускают и уравнения, описывающие продольные и крутильные колебания лопатки. При отсутствии вращения вместо уравнений (XV.38) имеют место следующие уравнения:

$$\lambda G \omega + (E F \omega')' = 0; \quad \lambda J_p \theta + (G T \theta')' = 0. \quad (\text{XV.41})$$

Для лопатки постоянного поперечного сечения приходим к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с

постоянными коэффициентами, имеющим одинаковые аналитические решения. Крутильные колебания лопатки постоянного поперечного сечения подробно рассмотрены в гл. XII. Вместо уравнений (XV.41) будут иметь место следующие:

$$\lambda w + Ew'' = 0; \quad \lambda J_p \theta + GT_0 \theta'' = 0. \quad (\text{XV.42})$$

XV.2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. СОПОСТАВЛЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ И РАСЧЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Аналитическое решение системы дифференциальных уравнений, описывающих изгибно-крутильно-продольные колебания закрученной лопатки переменного сечения, отсутствует, в связи с чем для получения численных результатов, как правило, оказывается необходимым применение ЭВМ. Так как стандартные программы ЭВМ рассчитаны на решение систем дифференциальных уравнений первого порядка, то необходимо систему (XV.34) или системы (XV.35)–(XV.37) преобразовать к подобному виду. Поскольку ход преобразований не зависит от конкретного вида системы, то рассмотрим последовательность решения для случая вычисления собственных частот чисто изгибных колебаний закрученной вращающейся лопатки, описываемых системой (XV.36). Предполагается, что лопатка жестко заделана по корневому сечению и, как и в п. XV.1, принимается, что по высоте лопатки не размещены какие-либо связи.

Как показано в п. XV.1, уравнения равновесия в рассматриваемом случае принимают вид:

$$\lambda F u - M_y'' + \mu (C u')' = 0; \quad (\lambda + \mu) F v + M_x'' + \mu (C v')' = 0, \quad (\text{XV.43})$$

а выражения для изгибающих моментов и перерезывающих сил оказываются следующими:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -E J_{xy} u'' - E J_x v''; & M_y &= E J_y u'' + E J_{xy} v''; \\ Q_x &= -M_y' + \mu C u'; & Q_y &= M_x' + \mu C v'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.44})$$

Сведем систему двух дифференциальных уравнений четвертого порядка (XV.43) к системе восьми дифференциальных уравнений первого порядка, введя новые переменные:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= u; & y_2 &= v; & y_3 &= u'; & y_4 &= v'; \\ y_5 &= Q_x; & y_6 &= Q_y; & y_7 &= M_y; & y_8 &= M_x. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.45})$$

Из уравнений (XV.43)–(XV.45) получим

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_3; & y_2' &= y_4; & y_3' &= -y_7' + \mu C y_3; & y_4' &= y_8' + \mu C y_4; \\ y_5' &= E J_y y_3' + E J_{xy} y_4'; & y_6' &= -E J_{xy} y_3' - E J_x y_4'; \\ \lambda F y_1 + y_5' &= 0; & (\lambda + \mu) F y_2 + y_6' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.46})$$

причем при составлении седьмого и восьмого уравнений учтено, что

$$M_y' = \mu C y_3 - y_5; \quad M_x' = -\mu C y_4 + y_6,$$

т. е.

$$M_y'' = \mu (C y_3)' - y_5', \quad M_x'' = -\mu (C y_4)' + y_6'.$$

Из третьего и четвертого уравнений найдем, что

$$y_7' = \mu C y_3 - y_5; \quad y_8' = -\mu C y_4 + y_6,$$

а из пятого и шестого уравнений получим:

$$\begin{aligned} y_3' &= y_7 \frac{J_x}{E (J_x J_y - J_{xy}^2)} + y_8 \frac{J_{xy}}{E (J_x J_y - J_{xy}^2)}; \\ y_4' &= -y_7 \frac{J_{xy}}{E (J_x J_y - J_{xy}^2)} - y_8 \frac{J_y}{E (J_x J_y - J_{xy}^2)}. \end{aligned}$$

Введя обозначение $B = 1/[E (J_x J_y - J_{xy}^2)]$, запишем систему уравнений (XV.46) в окончательном виде:

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_3; & y_2' &= y_4; & y_3' &= J_x B y_7 + J_{xy} B y_8; \\ y_4' &= J_{xy} B y_7 - J_y B y_8; & y_5' &= -\lambda F y_1; \\ y_6' &= (\lambda + \mu) F y_2; & y_7' &= \mu C y_3 - y_5; & y_8' &= -\mu C y_4 + y_6. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.46a})$$

Система (XV.46a) более компактно может быть записана в матричной форме [185]:

$$y' = A y, \quad (\text{XV.47})$$

где y — вектор-столбец; A — квадратная матрица, элементы которой являются функциями z .

Для получения численных результатов необходимо использовать граничные условия, которые в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} y_1(0) &= y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = 0; \\ y_5(l) &= y_6(l) = y_7(l) = y_8(l) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.48})$$

При численном интегрировании системы (XV.46a) необходимо преобразовать рассматриваемую краевую задачу (с граничными условиями, заданными в точках $z = 0$ и $z = l$) в задачу Коши, для которой граничные условия заданы в одной точке [9].

Для преобразования краевой задачи к задаче Коши используем свойства линейных дифференциальных уравнений. Известно, что общее решение системы (XV.46a) имеет вид [159]

$$y(z) = C_1 y^{(1)}(z) + C_2 y^{(2)}(z) + C_3 y^{(3)}(z) + \dots = \sum_{i=1}^8 C_i y^{(i)}(z), \quad (\text{XV.49})$$

где C_i — произвольные постоянные; $y^{(i)}(z)$ — линейно-независимые решения системы (XV.46a).

Уравнение (XV.49) фактически имеет вид:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_8 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 C_i \begin{pmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \dots \\ y_{8i} \end{pmatrix}, \quad (\text{XV.49a})$$

или

$$y(z) = Y(z)C, \quad (\text{XV.49b})$$

где

$$Y(z) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{18} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{28} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{81} & y_{82} & \dots & y_{88} \end{pmatrix}; \quad (\text{XV.50})$$

$$C^T = \{C_1, C_2, \dots, C_8\}.$$

Обеспечить линейную независимость решений $y^{(i)}$ можно, например, принимая матрицу решений $Y(0)$ единичной, т. е.

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{XV.51})$$

Коэффициенты C_i определяются из граничных условий (XV.48), причем с учетом выражения (XV.51) коэффициенты C_i являются просто составляющими вектора $y(0)$. В рассматриваемом случае

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0, \quad (\text{XV.52})$$

а для определения произвольных постоянных C_5 — C_8 необходимо использовать граничные условия при $z = l$. Положив $C_5 = 1$; $C_6 = C_7 = C_8 = 0$ производят численное интегрирование системы (XV.46a) от $z = 0$ до $z = l$, например с помощью метода Рунге-Кутты [8], а затем повторяют вычисления еще три раза при условиях $C_6 = 1$; $C_5 = C_7 = C_8 = 0$ и т. д.

В общем случае система (XV.49) при выполнении условия (XV.51) имеет при $z = l$ следующий вид:

$$\begin{pmatrix} y_1(l) \\ y_2(l) \\ \dots \\ y_8(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{18} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{28} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{81} & y_{82} & \dots & y_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \dots \\ y_8(0) \end{pmatrix}. \quad (\text{XV.53})$$

В рассматриваемом частном случае, учитывая граничные условия (XV.48), вместо системы (XV.53) при $z = l$ получим

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{55} & y_{56} & y_{57} & y_{58} \\ y_{65} & y_{66} & y_{67} & y_{68} \\ y_{75} & y_{76} & y_{77} & y_{78} \\ y_{85} & y_{86} & y_{87} & y_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_5(0) \\ y_6(0) \\ y_7(0) \\ y_8(0) \end{pmatrix}. \quad (\text{XV.54})$$

Условие совместности системы (XV.54) приобретает вид

$$\Delta(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} y_{55} & y_{56} & y_{57} & y_{58} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{85} & y_{86} & y_{87} & y_{88} \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{XV.55})$$

Для заданной величины μ корни определителя (XV.55) соответствуют различным собственным частотам вращающейся лопатки. Для каждой собственной частоты система (XV.54) имеет решение, вычисляемое с точностью до произвольной постоянной, которое определяет соответствующую собственную форму колебаний.

Практически процесс нахождения собственных частот и форм колебаний может быть осуществлен следующим образом: при определенном значении μ выбирают пробное значение λ и вычисляют определитель (XV.55). Затем значение λ изменяют на определенный шаг и вычисления повторяют таким образом, чтобы получить зависимость величины Δ от λ . При изменении знака определителя шаг поиска частоты автоматически уменьшается с тем, чтобы значение определителя не превосходило заранее заданной малой величины ε . Когда значение $\lambda = \lambda_i$, соответствующее собственной частоте p_i , вычислено с достаточной точностью, для одной из величин $y_i(0)$ ($i = 5 \div 8$) задаются произвольным (например, единичным) значением и определяют три другие величины с помощью зависимости (XV.54). При известных значениях $y_i(0)$ производится численное интегрирование системы (XV.46a) и находятся функции $y_1, \dots, y_8$ в достаточно большом числе точек разбиения интервала $0 \leq z \leq l$ с тем, чтобы провести построение собственной формы колебаний, соответствующей частоте p_i .

Необходимо иметь в виду, что при численном интегрировании системы типа (XV.46a) [например, более сложной системы, эквивалентной уравнениям (XV.34)] возможна потеря точности вычислений, вызванная тем, что среди решений могут быть как возрастающие с увеличением независимой переменной, так и убывающие [9]. При этом решения с одинаковой возрастающей частью, но с разной убывающей при достаточно большом аргументе становятся линейно-зависимыми, а это приводит к тому, что система для определения постоянных интегрирования оказывается плохо обусловленной, т. е. ее определитель представляет собой малую разность больших чисел. Кроме того, при наличии быстро возрастающих по модулю и часто меняющих свой знак функций

снижается точность самого численного интегрирования. Для преодоления этих трудностей был предложен метод ортогонализации, при котором весь интервал интегрирования разбивается на участки так, чтобы в пределах одного участка решения оставались линейно-независимыми. При переходе от участка к участку матрица решений подвергается линейному преобразованию таким образом, чтобы решения оказывались ортогональными [48].

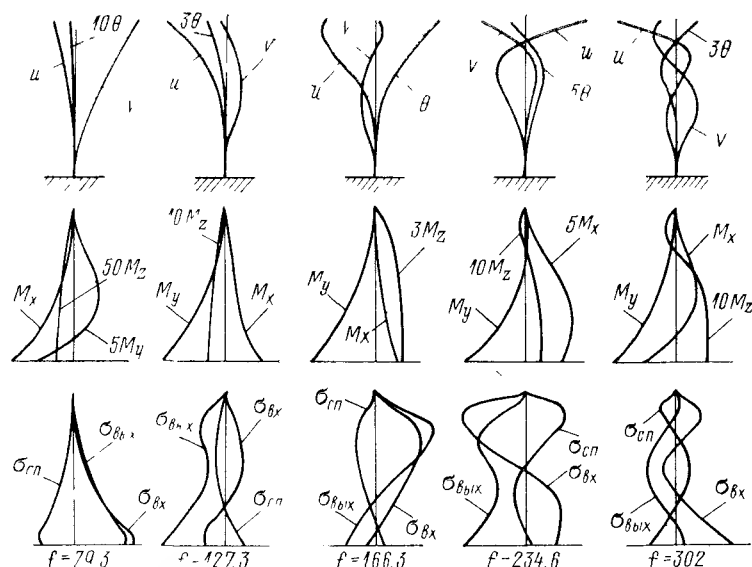


Рис. XV.4. Собственные частоты и формы изгибно-крутильных колебаний отдельной лопатки ($D_{cp}/l = 2,58$, $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$)

При использовании метода ортогонализации [48] была составлена программа расчета собственных частот, позволявшая с достаточной точностью определить собственные частоты и формы изгибно-крутильных колебаний закрученных лопаток переменного сечения. В программе учитываются переменность геометрических характеристик лопатки по высоте, предварительная закрутка лопатки, несовпадение центра тяжести и центра изгиба, стесненность кручения и влияние центробежных сил. При вычислении низших собственных частот лопаток последних ступеней ЦНД по причинам, отмеченным в п. XV.1, пренебрегают влиянием сдвига и инерцией вращения и податливостью заделки; кроме того, не учитывают продольные колебания лопатки.

Результаты вычислений собственных частот и форм колебаний лопатки последней ступени мощной паровой турбины с $D_{cp}/l = 2,58$ приведены на рис. XV.4 и XV.5 и в табл. XV.1 (на рис. XV.5 и в табл. XV.1 данная программа названа программой № 1). На рис. XV.5 приведены также экспериментальные

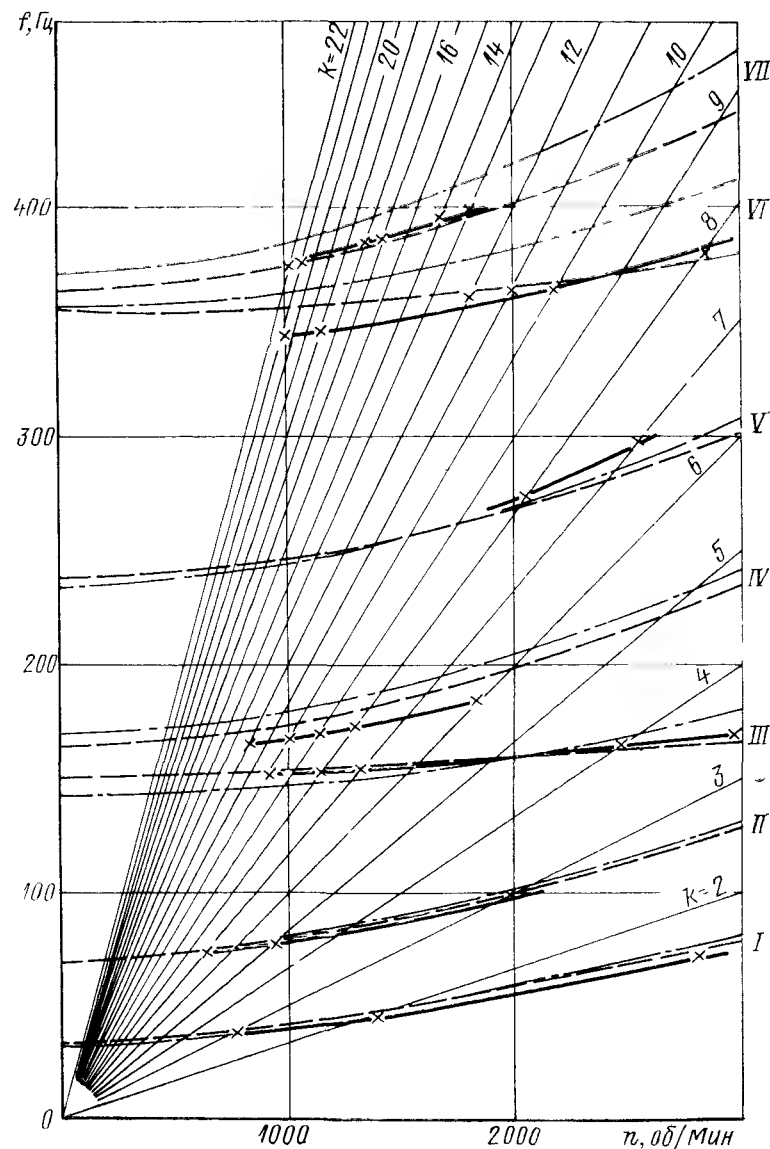


Рис. XV.5 Сопоставление экспериментальных и расчетных значений частот отдельной лопатки ($D_{cp}/l = 2,58$):
— эксперимент, --- расчет по программе № 1; -.-.- расчет по программе № 2

Таблица XV.1

Программа	$\omega, \text{с}^{-1}$	Собственная частота, Гц						
		I	II	III	IV	V	VI	VII
№ 1	0 314	33,6 79,3	69,9 127,3	151,4 166,3	163,5 234,6	237,3 302,0	354,0 379,6	364,5 441,5
№ 2	0 314	32,8 79,6	69,0 131,7	141,5 180,4	169,3 241,1	234,0 306,4	356,0 411,6	370,0 469,6
№ 3	0	34,1	72,1	154,4	165,9	242,2	366,4	415,7

частоты, полученные при испытаниях этой лопатки в Кемпбелл-машине в условиях вращения: собственные частоты регистрировались с помощью тензорезисторов, сигналы которых через токо-съемное устройство подавались на усилительную и регистрирующую аппаратуру (подробнее методика замеров описана в п. XVI.4). Как следует из сопоставления экспериментальных и расчетных данных, разработанная программа обеспечивает достаточную точность при вычислении собственных частот изгибно-крутильных колебаний лопаток последних ступеней мощных турбин.

В ряде случаев значительную экономию машинного времени можно обеспечить, если вычислять собственные частоты с помощью вариационного метода [44, 186].

В работах [41, 44] описана система дифференциальных уравнений и изложен способ определения собственных частот изгибно-крутильно-продольных колебаний лопаток. Помимо перечисленных выше факторов в расчете учтено также влияние сдвига, инерции вращения и податливости заделки. Решение задачи основано на использовании принципа Остроградского—Гамильтона (см. п. XIV.2), согласно которому действительное движение исследуемой механической системы доставляет минимум функционалу S :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi + A_\omega - A_3) dt, \quad (\text{XV.56})$$

где в рассматриваемом случае T и Π — кинетическая и потенциальная энергия лопатки; A_ω и A_3 — работа центробежных сил и работа сил и моментов на перемещениях, допускаемых податливостью заделки.

Таким образом, при подстановке в формулы для T , Π , A_ω и A_3 выражений, соответствующих собственной форме колебаний ло-

патки, должна обращаться в нуль вариация функционала (XV.56), т. е. должно выполняться равенство

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi + A_\omega - A_3) dt = 0. \quad (\text{XV.57})$$

В п. XIV.2 рассматривались приближенные способы вычисления собственных частот, при которых собственная форма колебаний лопатки аппроксимировалась с помощью набора базисных функций, удовлетворяющих, по крайней мере, геометрическим граничным условиям. Подобные способы, однако могут не обеспечить требуемой точности при определении частот сильно закрученных лопаток. Это объясняется тем, что для закрученной лопатки с существенно различными главными моментами инерции кривизна может иметь резкие колебания даже при плавном изменении прогибов и моментов, т. е. оказывается необходимым аппроксимировать функции с резким изменением вторых производных. При этом точность вариационного метода может резко ухудшиться даже при использовании достаточно большого числа базисных функций [176]. Значительно лучшие результаты могут быть получены, если аппроксимировать не перемещения, а изгибающие и крутящие моменты [10, 44, 56].

При рассмотрении изгибно-крутильно-продольных колебаний лопаток изгибающие и крутящие моменты, а также поперечные и продольные силы аппроксимируются в виде рядов:

$$\left. \begin{aligned} M_\xi(z, t) &= \sum_{k=1}^m M_{\xi k}(z) f_{k1}(t); & M_\eta(z, t) &= \sum_{k=1}^n M_{\eta k}(z) f_{k2}(t); \\ M_z(z, t) &= \sum_{k=1}^p M_{zk}(z) f_{k3}(t); & Q_\xi(z, t) &= \sum_{k=1}^q Q_{\xi k}(z) f_{k4}(t); \\ Q_\eta(z, t) &= \sum_{k=1}^r Q_{\eta k}(z) f_{k5}(t); & Q_z(z, t) &= \sum_{k=1}^s Q_{zk}(z) f_{k6}(t). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XV.58})$$

где M_ξ и M_η — изгибающие моменты относительно главных осей; M_z — крутящий момент; Q_ξ , Q_η , Q_z — перерезывающие силы, действующие в направлении главных осей, и продольная сила; $M_{\xi k}$, $M_{\eta k}$, M_{zk} , $Q_{\xi k}$, $Q_{\eta k}$, Q_{zk} — заданные базисные функции, зависящие только от координаты z ; f_{ki} — варьируемые функции, зависящие только от времени; $N = m + n + p + q + r + s$ — общее число базисных функций.

Система базисных функций должна быть полна, функции должны быть линейно-независимыми и удовлетворять геометрическим граничным условиям. В работе [44] рассмотрены различные системы базисных функций и показано, что лучшая сходимость обеспечивается в случае, когда базисные функции удовлетворяют динамическим граничным условиям (геометрические граничные

условия удовлетворяются автоматически). Число базисных функций N зависит от числа подлежащих определению собственных частот, причем результаты вычислений показывают, что число членов в каждом из аппроксимирующих рядов (т. е., m, n, p и т. д.) должно на два превышать число парциальных частот (соответствующих, например, изгибу относительно минимальной оси инерции, кручению и т. д.), заключенных в рассматриваемом участке частотного спектра [44]

Потенциальная и кинетическая энергия, а также работа центробежных сил и работа моментов и сил на перемещениях, допускаемых податливостью заделки, могут быть представлены как квадратичные формы изгибающих и крутящих моментов, а также поперечных и продольной сил. С учетом формул (XV 58) выражение (XV.57) может быть преобразовано к виду

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T(\dot{f}_{kl}) - P(f_{kl}) + A_{\omega}(\dot{f}_{kl}) - A_s(f_{kl})] dt = 0. \quad (XV.57a)$$

Применяя при вычислении вариаций интегрирование по частям [186], из (XV 57a) получим систему однородных линейных дифференциальных уравнений для определения функций f_k :

$$\sum_{k=1}^N (A_{lj} f_k + C_{kj} f_k) = 0, \quad j = 1; 2; \dots, N. \quad (XV.59)$$

Система (XV.59) может быть записана в матричной форме:

$$Af + Cf = 0, \quad (XV.59a)$$

где A, C — вещественные и симметричные матрицы, элементами которых являются коэффициенты A_{kj} и C_{kj} ; f — столбец функций f_k

Решение системы (XV.59a) имеет вид $f_k = a_k \exp(vt)$, т. е.

$$(Av^2 + C)a = 0,$$

где a — вектор-столбец коэффициентов a_k .

Так как матрица A является положительно определенной [44], то $v = ip_i$, где p_i — собственная частота колебаний лопатки, и, таким образом, колебания являются гармоническими.

Определив вектор a , вычисляют моменты и усилия, а также перемещения и распределение динамических напряжений в лопатке при собственной форме колебаний, соответствующей частоте p_i .

Результаты расчетов собственных частот жестко заделанной лопатки с $D_{cp}/l = 2,58$, полученные с помощью описанного вариационного метода, приведены на рис. XV.5 и в табл. XV.1 (программа № 2). Сравнивая расчетные и экспериментальные частоты, приведенные на рис. XV.5, и учитывая, что различия в экспериментальных частотах лопаток могут достигать 8%, следует признать вполне удовлетворительной точность вычислений

как по программе № 1, так и по программе № 2. Программа № 2, требующая меньших затрат машинного времени, широко используется при проведении вибрационных расчетов.

При вычислении собственных частот вращающихся лопаток, строго говоря, следует учитывать изменение геометрических характеристик лопатки из-за ее раскрутки в поле центробежных сил, поскольку малые колебания происходят относительно деформированного состояния. Например, для лопатки с $D_{cp}/l = 2,58$, являющейся одной из наиболее «гибких», раскрутка в поле центробежных сил составляет почти 10° [23]. Расчеты по программе № 1 с учетом и без учета изменения геометрических характеристик лопатки при вращении показали, что изменение собственных частот преимущественно изгибных колебаний не превосходит 2%, изменение частот преимущественно крутильных колебаний (III и VI частоты при $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ в табл. XV.1) может достигать 5—7%. Для более коротких лопаток изменение геометрических характеристик при раскрутке практически не оказывает влияния на спектр собственных частот.

В табл. XV.1 приведены также результаты расчетов с использованием метода конечных элементов — программа № 3¹ (см. п. V 5) [68, 158, 219, 229]. Как видно, результаты вычислений по стержневой теории и по методу конечных элементов достаточно близки друг к другу.

Глава XVI

ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЕСТЕСТВЕННО-ЗАКРУЧЕННЫХ ЛОПАТОК, СОЕДИНЕННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ ПО КОНСТРУКЦИИ СВЯЗЯМИ

XVI.1. КОНСТРУКТИВНОЕ ВЫПОЛНЕНИЕ СВЯЗЕЙ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В МЕСТЕ СОЕДИНЕНИЯ ЛОПАТОК СВЯЗЯМИ

Примеры различного конструктивного выполнения связей приведены на рис. XVI.1. На рис. XVI.1, а изображены паяные проволочные или трубчатые связи (l — место пайки), соединяющие лопатки по пакетам; на рис. XVI.1, б — демпферные проволоки, свободно вставляемые в отверстия в лопатках и прижимающиеся к лопаткам под действием центробежных сил; разъемы на половинах демпферных проволок сдвинуты по окружности таким образом, чтобы обеспечить замыкание всех лопаток ступени. На рис. XVI.1, в, г изображены лопатки, выполненные заодно с бандажными полками: на рис. XVI.1, в замыкание лопаток

¹ Расчеты выполнены по программе Киевского инженерно-строительного института [158] инж. Д. Х. Гаджиевой.

на круг осуществляется за счет усилий, возникающих по контактным поверхностям 2 при сборке или из-за раскрутки лопаток в поле центробежных сил; на рис. XVI.1, *г* — за счет прижатия к полкам различных по конструкции связей 3, расположенных

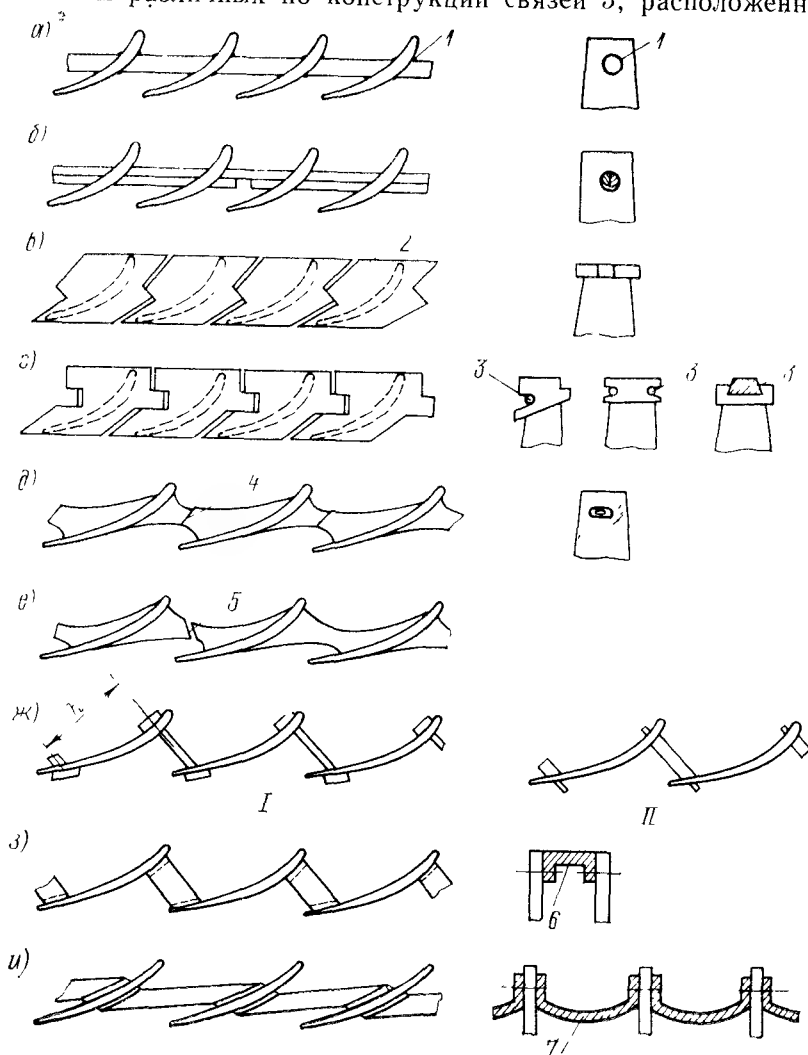


Рис. XVI.1. Примеры конструктивного выполнения связей

в пределах полков. На рис. XVI.1, *д* изображены лопатки, выполненные заодно с приливами, которые свариваются по торцам 4, обеспечивая соединение лопаток по пакетам. На рис. XVI.1, *е* показана модификация конструкции XVI.1, *д*, в которой между пакетами устанавливается зазор 5, выбирающийся при подъеме

оборотов из-за раскрутки лопаток; при этом обеспечиваются как замыкание лопаток на круг, так и увеличение рассеяния энергии при колебаниях. На рис. XVI.1, *ж* изображены так называемые Z-образные связи, соединяющие соседние лопатки по примерному кратчайшему расстоянию: связи могут как устранять упругую раскрутку (связи типа I), так и не препятствовать ей (связи типа II), но сводить к минимуму термические напряжения в лопатках. На рис. XVI.1, *з* показаны фигурные бандажы 6, устраняющие упругую раскрутку и соединяющие все лопатки ступени; на рис. XVI.1, *и* — арочные бандажы 7, толщина которых может быть выполнена значительно меньшей, чем диаметр проволочных связей, расположенных на этом же радиусе.

Как следует из рис. XVI.1, далеко не исчерпывающего всего разнообразия применяемых конструкций, связи могут обеспечивать упругое (рис. XVI.1, *а*, *д*, *з*, *и*) или упругофрикционное (рис. XVI.1, *б*—*г*, *е*, *ж*) соединение лопаток, при котором в случае достижения определенной амплитуды колебаний начнется проскальзывание по всей контактной поверхности. Связи могут соединять как одинаковые, сходственные точки поперечных сечений соседних лопаток (рис. XVI.1, *а*, *б*), так и различные точки (рис. XVI.1, *ж*, *з*). Связи могут объединять как несколько соседних лопаток (рис. XVI.1, *а*, *д*), так и все лопатки ступени (рис. XVI.1, *б*—*г*, *ж*—*и*). Так как различные типы связей могут одновременно устанавливаться в различных по высоте поперечных сечениях лопаток одной и той же ступени, строгая классификация во многих конкретных случаях оказывается невозможной.

Качественные особенности колебаний, появляющиеся при соединении лопаток связями, рассмотрим на примере связей, соединяющих сходственные точки поперечных сечений (например, типа изображенных на рис. XVI.1, *а*, *б*). Введем дополнительно следующие упрощающие предположения.

1. Воздействие на связь можно рассматривать как статическое: в п. XI.7 было показано, что собственные частоты шага связи обычно на порядок выше представляющих практический интерес частот колебаний облопачивания, что и оправдывает сделанное предположение.

2. Связь имеет постоянное поперечное сечение, обладающее двумя осями симметрии, параллельными осям x и z .

3. Пренебрегаем изогнутостью связи, считая ее ось прямолинейной и совпадающей с осью y , что допустимо при большом числе лопаток на колесе.

4. Место установки связи совпадает с центром тяжести поперечного сечения лопатки, который, в свою очередь, совпадает с центром изгиба (естественно, что это предположение может быть достаточно справедливым только при условии, что размеры поперечного сечения связи малы по сравнению с хордой лопатки).

5. Первоначально будем считать, что связь жестко соединена с лопаткой, т. е. углы поворота и прогибы лопатки и связи совпа-

дают. В дальнейшем для ряда конструкций связей будут оценены коэффициенты «совершенства связей» H_i , учитывающие податливость контактного соединения лопатки и связи.

Предположения 1—3 позволяют независимо рассматривать деформации растяжения, кручения и изгиба связи как в плоскости диска, так и в перпендикулярном направлении.

1. Растяжение связи. Как показано в п. XI.9, сила Q_{yn}^c , действующая в плоскости диска от связи на n -ю лопатку, определяется формулой

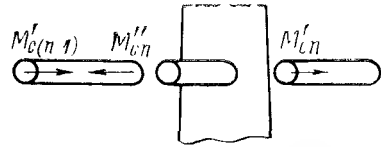


Рис. XVI.2. Изгибающий момент, действующий на лопатку вследствие закручивания связи

$$Q_{yn}^c = (EF_c t) (v_{n+1} - v_{n-1} - 2v_n), \quad (XVI.1)$$

где F_c , t — площадь поперечного сечения и длина шага связи; v_{n-1} , v_n , v_{n+1} — перемещения в плоскости диска сечения, где установлена связь, соответственно $n-1$, n и $n+1$ -й лопаток.

Как и ранее, через u , v и w будем обозначать перемещения в направлении осей x , y и z .

2. Кручение связи. Кручение связи возникает из-за различия в углах наклона лопаток при изгибе в осевом направлении. Для получения соотношения между изгибающим моментом M_{yn}^c , действующим от связи на n -ю лопатку, и углами поворота соседних лопаток u'_{n-1} , u'_n , u'_{n+1} воспользуемся следующими уравнениями (обозначения понятны из рис. XVI.2):

$$\left. \begin{aligned} u'_{n-1} - \Delta\varphi_n &= u'_n; & M_{nn}^c &= M'_{cn} - M''_{cn}; \\ \Delta\varphi_n &= \frac{M'_{cn}(n-1)t}{GT_c} = \frac{M''_{cn}t}{GT_c}; & \Delta\varphi_{n+1} &= \frac{M'_{cn}t}{GT_c}, \end{aligned} \right\} \quad (XVI.2)$$

где T_c — жесткость шага связи на кручение; G — модуль упругости II рода.

Из уравнений (XVI.2) получим:

$$M''_{cn} = \frac{\Delta\varphi_n GT_c}{t} = \frac{(u'_n - u'_{n-1}) GT_c}{t};$$

$$M'_{cn} = \frac{\Delta\varphi_{n+1} GT_c}{t} = \frac{(u'_{n+1} - u'_n) GT_c}{t},$$

откуда

$$M_{yn}^c = (GT_c/t) (u'_{n+1} + u'_{n-1} - 2u'_n), \quad (XVI.3)$$

т. е. уравнение (XVI.3) по форме в точности совпадает с уравнением (XVI.1).

3. Изгиб связи в плоскости xOy (перпендикулярно плоскости диска). В п. XII.3 получены формулы, определяющие зависимость между силой и моментом, действующими от связи на n -ю лопатку, с углами закручивания и прогибами трех соседних лопаток:

$$\left. \begin{aligned} Q_{xn}^c &= \frac{6EJ_{cz}}{t^2} (\theta_{n+1} - \theta_{n-1}) + \frac{12EJ_{cz}}{t^3} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n); \\ M_{zn}^c &= -\frac{2EJ_{cz}}{t} (\theta_{n-1} + 4\theta_n + \theta_{n+1}) + \frac{6EJ_{cz}}{t^2} (u_{n-1} - u_{n+1}), \end{aligned} \right\} \quad (XVI.4)$$

где J_{cz} — момент инерции поперечного сечения связи при изгибе из плоскости диска.

4. Изгиб связи в плоскости yOz (в плоскости диска). Соотношения между силой и моментом, действующими от связи на n -ю лопатку, и прогибами и углами поворота трех соседних лопаток могут быть получены из формул (XVI.4), если заменить величины Q_{xn}^c , M_{zn}^c , θ_n , u_n , J_{cz} соответственно величинами Q_{zn}^c , M_{xn}^c , φ'_n , w_n и J_{cx} , где J_{cx} — момент инерции поперечного сечения связи при изгибе в плоскости диска, и отбросить слагаемые, содержащие w_n .

$$Q_{zn}^c = \frac{6EJ_{cx}}{t^2} (v'_{n+1} - v'_{n-1}); \quad M_{xn}^c = -\frac{2EJ_{cx}}{t} (v'_{n+1} + 4v'_n + v'_{n-1}). \quad (XVI.5)$$

Силой Q_{zn}^c в дальнейшем пренебрегаем, так как производимая ею при колебаниях работа оказывается величиной более высокого порядка малости.

Для того чтобы учесть податливость контактного соединения, а также отличия в распределении напряжений в поперечном сечении связи от принятых выше упрощенных схем, следует ввести коэффициенты совершенства связи H_i , приближенно определяемые расчетным путем (см. п. XVI.3), а затем уточняемые экспериментально.

Таким образом, силы и моменты, действующие на лопатку от связи, можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} M_{xn}^c &= -\frac{2EJ_{cx}}{t} H_1 (v'_{n+1} + 4v'_n + v'_{n-1}); \\ M_{yn}^c &= -\frac{GT_c}{t} H_2 (-u'_{n+1} - u'_{n-1} + 2u'_n); \\ M_{zn}^c &= -\frac{2EJ_{cz}}{t} H'_3 (\theta_{n-1} + 4\theta_n + \theta_{n+1}) + \\ &\quad + \frac{6EJ_{cz}}{t^2} H''_3 (u_{n-1} - u_{n+1}); \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{xn} &= -\frac{12EJ_{cz}}{l^3} H_4' (2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) + \\ &+ \frac{6EJ_{cz}}{l^3} H_4'' (\theta_{n+1} - \theta_{n-1}); \\ Q_{yn} &= -\frac{EF_c}{l} H_5 (2v_n - v_{n-1} - v_{n+1}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVI.6})$$

Оценка коэффициентов H_i для некоторых типов связей приведена в п. XVI.3.

XVI.2. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ СОЕДИНЕННЫХ СВЯЗЯМИ ЛОПАТОК

При колебаниях лопаток, соединенных различными по конструкции связями, усилия, действующие на каждую из лопаток, в соответствии с формулами (XVI.6) зависят от прогибов и углов поворота не только данной лопатки, но и двух соседних, вследствие чего колебания всех соединенных связями лопаток оказываются совместными.

В работе [61] показано, что решение задачи об определении собственных частот изгибно-крутильных колебаний пакета из m лопаток сводится к нахождению нулей частотного определителя, порядок которого в m раз больше порядка частотного определителя отдельной лопатки без связей. В РТМ 108.020.06—75 разработан более рациональный (особенно для сравнительно большого числа лопаток в пакете) метод определения частот изгибно-крутильных колебаний пакета лопаток, соединенных n связями, при котором порядок частотного определителя всего в n раз превышает порядок частотного определителя для отдельной лопатки независимо от числа лопаток в пакете. В работах [43, 44] рассмотрен вариационный метод определения собственных частот пакета лопаток, при котором изгибающие и крутящие моменты аппроксимируются с помощью набора базисных функций, часть из которых изменяется по длине лопатки, а другая часть — по длине пакета.

Так как в последних ступенях ЦНД отечественных турбин наибольшее распространение получили различные по конструкции связи, обеспечивающие соединение всех лопаток на круг, то рассмотрим этот случай более подробно.

В работе [73] рассмотрены некоторые общие свойства тел с циклической симметрией, у которых геометрические, упругие и инерционные характеристики в окружном направлении изменяются периодически с периодом $2\pi/s$, где s — целое число. Показано, что усилия и перемещения при колебаниях подобных тел изменяются по окружности по гармоническому закону, хотя различные компоненты усилий и перемещений могут иметь различ-

ный фазовый сдвиг по отношению к началу отсчета в выбранной системе координат. Лопаточный венец, соединенный замкнутыми на круг связями, представляет собой частный случай циклически симметричной системы, для которой $s = z_1$, где z_1 — число лопаток в ступени.

В связи с этим при колебаниях перемещения, углы поворота, моменты и силы для n -й лопатки могут быть записаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} u_n &= u_1 \sin \frac{2m\pi n}{z_1} + u_2 \cos \frac{2m\pi n}{z_1}; \\ v_n &= v_1 \sin \frac{2m\pi n}{z_1} + v_2 \cos \frac{2m\pi n}{z_1}; \\ \omega_n &= \omega_1 \sin \frac{2m\pi n}{z_1} + \omega_2 \cos \frac{2m\pi n}{z_1}; \\ u_n' &= u_1' \sin \frac{2m\pi n}{z_1} + u_2' \cos \frac{2m\pi n}{z_1}; \\ v_n' &= v_1' \sin \frac{2m\pi n}{z_1} + v_2' \cos \frac{2m\pi n}{z_1}; \\ \theta_n &= \theta_1 \sin \frac{2m\pi n}{z_1} + \theta_2 \cos \frac{2m\pi n}{z_1}; \\ M_{xn} &= M_{x1} \sin \frac{2m\pi n}{z_1} + M_{x2} \cos \frac{2m\pi n}{z_1}; \\ M_{yn} &= M_{y1} \sin \frac{2m\pi n}{z_1} + M_{y2} \cos \frac{2m\pi n}{z_1}; \\ M_{zn} &= M_{z1} \sin \frac{2m\pi n}{z_1} + M_{z2} \cos \frac{2m\pi n}{z_1}; \\ Q_{xn} &= Q_{x1} \sin \frac{2m\pi n}{z_1} + Q_{x2} \cos \frac{2m\pi n}{z_1}; \\ Q_{yn} &= Q_{y1} \sin \frac{2m\pi n}{z_1} + Q_{y2} \cos \frac{2m\pi n}{z_1}; \\ Q_{zn} &= Q_{z1} \sin \frac{2m\pi n}{z_1} + Q_{z2} \cos \frac{2m\pi n}{z_1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVI.7})$$

где $u_1, v_1, \omega_1, \dots$ и $u_2, v_2, \omega_2, \dots$ — амплитудные значения составляющих перемещений и усилий, изменяющихся соответственно по синусоидальному и косинусоидальному закону; величины $u_1, v_1, \dots, Q_{y2}, Q_{z2}$ являются функциями координаты z , но не зависят от номера лопатки n ; z_1 — число лопаток в ступени; m — число узловых диаметров: $m = 0; 1; \dots; z_1/2$ при четном значении z_1 ; $m = 0; 1; 2; \dots; (z_1 - 1)/2$ при нечетном значении z_1 .

Если, как указывалось выше, пренебречь продольными перемещениями лопатки и силой Q_{zn} и воспользоваться выражениями (XVI.7) для углов поворота и перемещений лопаток, то можно найти реакции, действующие при колебаниях на лопатки от

замкнутых на круг связей. Подставляя выражения (XVI.7) в формулы (XVI.6), получим:

$$\left. \begin{aligned} M_{x1}^c &= -\frac{EJ_{cx}}{t} H_1 v_1' \left(12 - 8 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} \right); \\ M_{y1}^c &= -\frac{4GT_c}{t} H_2 u_1' \sin^2 \frac{m\pi}{z_1}; \\ M_{z1}^c &= -\frac{EJ_{cz}}{t} H_3 \theta_1' \left(12 - 8 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} \right) - \\ &\quad - \frac{12EJ_{cz}}{t^2} H_3'' u_2 \sin \frac{2m\pi}{z_1}; \\ Q_{x1}^c &= -\frac{48EJ_{cz}}{t^3} H_1' u_1 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} - \\ &\quad - \frac{12EJ_c}{t^2} H_4'' \theta_2 \sin \frac{2m\pi}{z_1}; \\ Q_{y1}^c &= -\frac{4EF_c}{t} H_5 v_1 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1}; \\ M_{x2}^c &= -\frac{EJ_{cx}}{t} H_1 v_2' \left(12 - 8 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} \right); \\ M_{y2}^c &= -\frac{4GT_c}{t} H_2 u_2' \sin^2 \frac{m\pi}{z_1}; \\ M_{z2}^c &= -\frac{EJ_{cz}}{t} H_3 \theta_2' \left(12 - 8 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} \right) - \\ &\quad - \frac{12EJ_{cz}}{t^2} H_3'' u_1 \sin \frac{2m\pi}{z_1}; \\ Q_{x2}^c &= -\frac{48EJ_{cz}}{t^3} H_4' u_2 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} - \\ &\quad - \frac{12EJ_{cz}}{t^2} H_4'' \theta_1 \sin \frac{2m\pi}{z_1}; \\ Q_{y2}^c &= -\frac{4EF_c}{t} H_5 v_2 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1}. \end{aligned} \right\} \quad (XVI.8a)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{x2}^c &= -\frac{EJ_{cx}}{t} H_1 v_2' \left(12 - 8 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} \right); \\ M_{y2}^c &= -\frac{4GT_c}{t} H_2 u_2' \sin^2 \frac{m\pi}{z_1}; \\ M_{z2}^c &= -\frac{EJ_{cz}}{t} H_3 \theta_2' \left(12 - 8 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} \right) - \\ &\quad - \frac{12EJ_{cz}}{t^2} H_3'' u_1 \sin \frac{2m\pi}{z_1}; \\ Q_{x2}^c &= -\frac{48EJ_{cz}}{t^3} H_4' u_2 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} - \\ &\quad - \frac{12EJ_{cz}}{t^2} H_4'' \theta_1 \sin \frac{2m\pi}{z_1}; \\ Q_{y2}^c &= -\frac{4EF_c}{t} H_5 v_2 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1}. \end{aligned} \right\} \quad (XVI.8b)$$

Кроме сил и моментов, определяемых формулами (XVI.8a) и (XVI.8b), необходимо учесть и инерционное воздействие связей. Как и при выводе системы дифференциальных уравнений, описывающих колебания отдельной естественно-закрученной лопатки (см. п. XV.1), будем пренебрегать моментами, вызванными инерцией вращения шага связи. Так как одновременно пренебрегаем и продольными деформациями лопатки, то влияние массы шага связи сведется только к силам инерции в направлении осей x и y . Силы инерции шага связи, действующие на n -ю лопатку в направлении осей x и y , приближенно можно определить по формулам:

$$\left. \begin{aligned} Q_{xn}^I &\approx m_c p^2 \frac{1}{2} \left(\frac{u_n + u_{n+1}}{2} + \frac{u_n + u_{n-1}}{2} \right); \\ Q_{yn}^I &\approx m_c p^2 \frac{1}{2} \left(\frac{v_n + v_{n+1}}{2} + \frac{v_n + v_{n-1}}{2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (XVI.9)$$

где m_c — масса шага связи; p — круговая частота собственных колебаний.

Используя выражения (XVI.7) и (XVI.9), окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} Q_{x1}^c &= -\frac{48EJ_{cz}}{t^3} H_4' u_1 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} - \frac{12EJ_{cz}}{t^2} H_4'' \theta_2 \sin \frac{2m\pi}{z_1} + \\ &\quad + m_c p^2 u_1 \left(1 - \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} \right); \\ Q_{y1}^c &= -\frac{4EF_c}{t} H_5 v_1 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} + m_c p^2 v_1 \left(1 - \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} \right); \\ Q_{x2}^c &= -\frac{48EJ_{cz}}{t^3} H_1' u_2 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} + \frac{12EJ_{cz}}{t^2} H_4'' \theta_1 \sin \frac{2m\pi}{z_1} + \\ &\quad + m_c p^2 u_2 \left(1 - \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} \right); \\ Q_{y2}^c &= -\frac{4EF_c}{t} H_5 v_2 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} + m_c p^2 v_2 \left(1 - \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (XVI.10)$$

Как следует из формул (XVI.8a), (XVI.8b) и (XVI.10), усилия и перемещения, изменяющиеся по закону $\sin(2m\pi/z_1)$ и по закону $\cos(2m\pi/z_1)$, оказываются связанными друг с другом: величина M_{z1}^c зависит от u_2 , а Q_{x1}^c от θ_2 , величина M_{z2}^c зависит от u_1 , а Q_{x2}^c — от θ_1 .

Так как в местах установки связей выполняются соотношения:

$$\left. \begin{aligned} M_{x1}(z_c - 0) + M_{x1}^c &= M_{x1}(z_c + 0); \\ M_{y1}(z_c - 0) + M_{y1}^c &= M_{y1}(z_c + 0); \quad \dots; \\ Q_{y2}(z_c - 0) + Q_{y2}^c &= Q_{y2}(z_c + 0), \end{aligned} \right\} \quad (XVI.11)$$

где z_c — координата поперечного сечения лопатки, в котором установлена связь, то все 20 величин ($u_1, v_1, \dots, Q_{y1}, u_2, v_2, \dots, Q_{y2}$) оказываются зависящими друг от друга.

Таким образом, для определения собственных частот колебаний лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, приходится решать систему из 20 линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Для лопаток, жестко заделанных в корневом сечении и соединенных одной или несколькими связями в промежуточных по высоте сечениях, граничные условия окажутся следующими:

$$\left. \begin{aligned} u_1(0) = v_1(0) = u_1'(0) = v_1'(0) = \theta_1(0) = u_2(0) = \\ = v_2(0) = u_2'(0) = v_2'(0) = \theta_2(0) = 0; \\ M_{x1}(l) = M_{y1}(l) = M_{z1}(l) = Q_{x1}(l) = Q_{y1}(l) = \\ = M_{x2}(l) = M_{y2}(l) = M_{z2}(l) = Q_{x2}(l) = Q_{y2}(l) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (XVI.12)$$

причем в местах установки связей моменты и перерезывающие силы имеют скачки, определяемые формулами (XVI.11).

Проинтегрировав численно систему 20 линейных дифференциальных уравнений с учетом условий (XVI.11), получим следующие соотношения между переменными:

$$\begin{pmatrix} u_1(l) \\ u_2(l) \\ v_1(l) \\ \dots \\ \theta_2(l) \\ Q_{x1}(l) \\ Q_{x2}(l) \\ \dots \\ M_{z2}(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \dots & y_{1,20} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & \dots & y_{2,20} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & \dots & y_{3,20} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{10,1} & y_{10,2} & \dots & y_{10,20} \\ y_{11,1} & y_{11,2} & \dots & y_{11,20} \\ y_{12,1} & y_{12,2} & \dots & y_{12,20} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{20,1} & y_{20,2} & \dots & y_{20,20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ v_1(0) \\ \dots \\ \theta_2(0) \\ Q_{x1}(0) \\ Q_{x2}(0) \\ \dots \\ M_{z2}(0) \end{pmatrix}, \quad (\text{XVI.13})$$

где y_{ij} — коэффициенты, зависящие от геометрических характеристик лопаток и связей, числа узловых диаметров m , а также от $\mu = (\gamma/g) \omega^2$ и $\lambda = (\gamma/g) p^2$.

Используя граничные условия (XVI.12), получим, что на вершине лопатки должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11,11} & y_{11,12} & \dots & y_{11,20} \\ y_{12,11} & y_{12,12} & \dots & y_{12,20} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{19,11} & y_{19,12} & \dots & y_{19,20} \\ y_{20,11} & y_{20,12} & \dots & y_{20,20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{v1}(0) \\ Q_{x2}(0) \\ \dots \\ M_{z1}(0) \\ M_{z2}(0) \end{pmatrix}. \quad (\text{XVI.14})$$

Условие совместности системы (XVI.14) приобретает вид

$$\Delta(m, \lambda, \mu) = \begin{vmatrix} y_{11,11} & y_{11,12} & \dots & y_{11,20} \\ y_{12,11} & y_{12,12} & \dots & y_{12,20} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{19,11} & y_{19,12} & \dots & y_{19,20} \\ y_{20,11} & y_{20,12} & \dots & y_{20,20} \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{XVI.15})$$

Как и при вычислении частот отдельных естественно-закрученных лопаток, при заданных значениях m и μ собственные частоты колебаний лопаток со связями определяются теми значениями λ_i , которые обращают в нуль определитель (XVI.15). Последовательным изменением λ_i соответствуют различные собственные формы с одинаковым числом узловых диаметров m .

В п. XIII.6 было показано, что наибольший практический интерес представляют колебания с малым числом узловых диаметров.

В этом случае, когда $m \ll z_1$, система уравнений для определения собственных частот лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, допускает определенные упрощения. Например, имея в виду, что $\sin(2m\pi/z_1) \ll 1$ и $\sin^2(m\pi/z_1) \ll 1$, можно приближенно принять $1 - \sin^2(m\pi/z_1) \approx 1$ и пренебречь членами типа $J_c \sin^2(m\pi/z_1)$ и $J_c \sin(2m\pi/z_1)$. Граничные условия (XVI.8a) и (XVI.10) примут в этом случае вид:

$$\left. \begin{aligned} M_{x1}^c &= - \frac{12EJ_{cx}}{t} H_1 v_1'; & M_{y1}^c &= 0; \\ M_{z1}^c &= - \frac{12EJ_{cz}}{t} H_3 \theta_1; \\ Q_{x1}^c &= m_c p^2 u_1; \\ Q_{y1}^c &= - \frac{4EF_c}{t} H_5 v_1 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} + m_c p^2 v_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVI.16})$$

Аналогичные выражения могут быть получены для $M_{x2}^c, M_{y2}^c, \dots, Q_{y2}^c$, причем из формул (XVI.16) следует, что величины $M_{x1}^c, \dots, Q_{y1}^c$ связаны только с величинами $u_1, v_1, \dots, \theta_1$, а $M_{x2}^c, \dots, Q_{x2}^c$ — только с величинами $u_2, v_2, \dots, \theta_2$. Таким образом, в данном случае для нахождения собственных частот имеются две независимые эквивалентные системы 10 линейных дифференциальных уравнений первого порядка, т. е. порядок частотного определителя оказывается равным порядку частотного определителя для отдельной лопатки без связей. Фактически задача определения собственных частот лопаток с замкнутыми на круг связями в этом случае может быть сведена к задаче определения собственных частот отдельной лопатки со специфическими граничными условиями (XVI.16) в местах установки связей.

Из формул (XVI.16) следует, что в выражении для Q_{y1}^c сохранен член, имеющий множителем $\sin^2(m\pi/z_1)$. Это объясняется тем, что при соединении лопаток связями, размеры поперечного сечения которых значительно меньше длины шага связи, изгибная жесткость связи оказывается намного меньше жесткости связи на растяжение, т. е. величины типа $J_c t^3$ оказываются малыми по сравнению с величиной $F_c t$. Действительно, $J_c = F_c i_c^2$, где $i_c = \sqrt{J_c/F_c}$ — радиус инерции поперечного сечения связи, а $(J_c t^3) : (F_c t) = i_c^2 t^2$, т. е. $F_c t \gg J_c t^3$.

Замена граничных условий (XVI.8a), (XVI.8b) и (XVI.10) упрощенными граничными условиями (XVI.16) оправдывается в ряде случаев также и тем, что из-за податливости контактного соединения коэффициенты совершенства связи H_i в формулах (XVI.8a), (XVI.8b) и (XVI.10) оказываются значительно меньше единицы (см. п. XVI.3) и пренебрежение изгибной жесткостью связей не приводит к существенной ошибке при определении собственных частот колебаний с малым числом узловых диаметров.

ХVI.3. УТОЧНЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КОНСТРУКЦИЙ СВЯЗЕЙ

Усилия и моменты, определяемые по формулам (ХVI.8а), (ХVI.8б), (ХVI.10) или (ХVI.16), пропорциональны коэффициентам совершенства связи H_1 , зависящим от особенностей конструктивного выполнения связей. Уточним численные значения H_1 для некоторых широко используемых в стационарном турбостроении конструкций.

Демпферные проволоочные связи. Демпферные проволоки являются частным случаем упругофрикционных связей, допускающих проскальзывание по всей поверхности контакта при достижении амплитудой колебаний определенного значения. Так как при достаточно малых амплитудах колебаний проскальзывание по всей зоне контакта отсутствует, граничные условия определяются в предположении упругого соединения лопаток и демпферных проволок. При колебаниях с различными числами узловых диаметров в демпферных проволоках возникают динамические напряжения—сжатия, приводящие при определенных амплитудах колебаний к взаимному проскальзыванию лопаток и проволок и резкому возрастанию энергии, рассеиваемой в зоне контакта (см. п. ХIII.10). Так как зона контакта составляет сравнительно небольшую часть шага связи, то в соответствии с принципом Сен-Венана [138] можно считать, что напряжения растяжения распределены неравномерно в поперечном сечении проволоки только на участках длиной порядка размеров зоны контакта или, что то же самое, порядка размеров поперечного сечения проволоки. Поскольку при колебаниях с малым числом узловых диаметров напряжения растяжения в проволоках суммируются от воздействия нескольких последовательно расположенных лопаток (см. п. XI.10), то можно достаточно обоснованно считать, что напряжения растяжения распределены в поперечном сечении проволоки равномерно. Экспериментальные исследования (см. п. ХVI.5) также подтверждают это соображение.

В связи с равномерным распределением динамических напряжений растяжения—сжатия в поперечном сечении проволоки в последней из формул (ХVI.16) можно принять, что $H_5 = 1$, и считать, что сила, действующая от проволоки на лопатку в гангенциальном направлении, при малом числе узловых диаметров определяется выражением

$$Q_{y1}^c = -\frac{4EF_c}{l} v_1 \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} + m_c p^2 v_1. \quad (\text{ХVI.17})$$

При определении изгибной жесткости демпферных проволок, т. е. при вычислении коэффициента H_1 в первой из формул (ХVI.16), оценим податливость контактного соединения лопатки и проволоки, рассматривая его как внутренний контакт двух цилиндров [32]. Схематически размеры зоны контакта и действующие на демпферную проволоку силы изображены на

рис. ХVI.3, где q — распределенная нагрузка, вызванная центробежными силами.

Фактическое распределение давлений в зоне контакта может существенно отличаться от принятой расчетной схемы: с одной стороны, давление по краям зоны контакта должно превышать среднее значение, однако, с другой стороны, давление на этих участках может и уменьшиться из-за наличия галтели на лопатке; ось отверстия в лопатке

из-за ее раскрутки в поле центробежных сил может в точности не совпадать с осью проволоки; «эффективный» диаметр проволоки в зоне контакта отличается от величины $d_{пр}$ из-за наличия вертикального разъема, необходимого для замыкания всех лопаток ступени (см. рис. ХVI.1, б); в связи с технологическими отклонениями при изготовлении и сборке лопаток и демпферных проволок контактные давления q_k для разных лопаток могут несколько отличаться друг от друга и т. д. Тем не менее для оценки податливости контактного соединения, как показывает сопоставление экспериментальных и расчетных данных, принятая схема оказывается вполне удовлетворительной [32].

В первом приближении будем считать, что при изгибе проволоки в плоскости диска в каждой точке по длине зоны контакта справедливы такие же соотношения между контактными давлениями (q_k) и сближением соприкасающихся тел (e), как и при внутреннем контакте цилиндров с параллельными осями. Как известно, в этом случае выполняются следующие соотношения [142]:

$$\left. \begin{aligned} c &= 1,128 \sqrt{\eta q_k \frac{d_{пр} d_{л}}{2(d_{л} - d_{пр})}}; \\ e &= \frac{2q_k}{\pi} \left[\frac{1 - \nu_{л}^2}{E_{л}} \left(\ln \frac{d_{л}}{c} + 0,407 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \nu_{пр}^2}{E_{пр}} \left(\ln \frac{d_{пр}}{c} + 0,407 \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (\text{ХVI.18})$$

где c — полуширина площадки контакта (рис. ХVI.3); $d_{пр}$, $d_{л}$ соответственно диаметр проволоки и отверстия в лопатке;

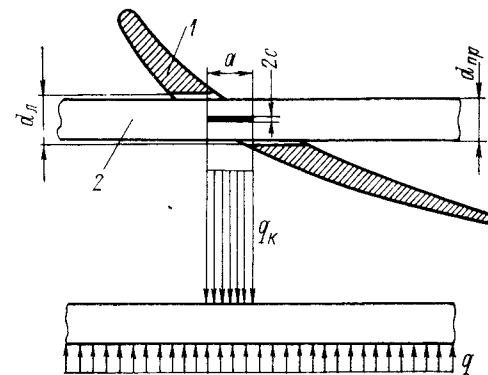


Рис. ХVI.3. Поперечное сечение лопатки в месте установки демпферной проволоки и действующие на проволоку силы:
1 — лопатка; 2 — проволока

$\eta = (1 - \nu_{\text{л}}^2)/E_{\text{л}} + (1 - \nu_{\text{пр}}^2)/E_{\text{пр}}$; $\nu_{\text{л}}$, $\nu_{\text{пр}}$, $E_{\text{л}}$, $E_{\text{пр}}$ — соответственно коэффициенты Пуассона и модули упругости лопатки и проволоки.

Учитывая, что $d_{\text{л}} \gg c$ и $d_{\text{пр}} \gg c$ и ограничиваясь случаем малых изменений величин $q_{\text{к}}$ и e , поскольку рассматриваются колебания с малыми амплитудами, получим соотношение

$$\Delta e \approx (e/q_{\text{к}}) \Delta q_{\text{к}}, \quad (\text{XVI.19})$$

где $\Delta q_{\text{к}}$, Δe — приращения контактного давления и сближения соприкасающихся тел.

При колебаниях вследствие изменения углов поворота лопатки v' и проволоки $v'_{\text{пр}}$ сближение соприкасающихся тел по длине контактной зоны изменится на величину

$$\Delta e(y) = (v' - v'_{\text{пр}}) y, \quad (\text{XVI.20})$$

причем принято, что по длине контактной зоны a (рис. XVI.3) $v'_{\text{пр}} = \text{const}$, так как $a \ll l$.

С изменением сближения соприкасающихся тел изменится давление по длине контактной зоны в соответствии с формулой (XVI.19), что приведет к появлению реактивного изгибающего момента

$$\begin{aligned} M_{\text{в}}^c &= - \int_{-a/2}^{a/2} \Delta q_{\text{к}}(y) y dy = - \int_{-a/2}^{a/2} (v' - v'_{\text{пр}}) \frac{q_{\text{к}}}{e} y^2 dy = \\ &= - (v' - v'_{\text{пр}}) \frac{q_{\text{к}}}{e} \frac{a^3}{12}. \end{aligned} \quad (\text{XVI.21})$$

В соответствии с (XVI.5)

$$M_{x_n}^c = - (2EJ_{\text{сх}}/t) [v'_{\text{пр}(n+1)} + 4v'_{\text{пр}n} + v'_{\text{пр}(n-1)}]$$

или

$$M_x^c = - \frac{EJ_{\text{сх}} v'_{\text{пр}}}{t} \left(12 - 8 \sin^2 \frac{\pi \pi}{z_1} \right). \quad (\text{XVI.22})$$

При колебаниях с малым числом узловых диаметров имеют место приближенные равенства:

$$M_{\text{в}}^c = - \frac{12EJ_{\text{сх}}}{t} v'_{\text{пр}}, \quad \text{или} \quad v'_{\text{пр}} = - \frac{M_{\text{в}}^c t}{12EJ_{\text{сх}}}. \quad (\text{XVI.22a})$$

Уравнения (XVI.21) и (XVI.22) дают возможность связать угол поворота лопатки с действующим на нее от проволоки изгибающим моментом.

Рассматривая представляющие наибольший практический интерес колебания с малым числом узловых диаметров и обозначив

$$c_{\text{к}} = (q_{\text{к}}/e) (a^3/12); \quad c_{\text{пр}} = 12EJ_{\text{сх}}/t, \quad (\text{XVI.23})$$

где $c_{\text{к}}$ — жесткость контактного соединения, а $c_{\text{пр}}$ — изгибная жесткость собственно шага проволоки, получим

$$(v' - v'_{\text{пр}}) c_{\text{к}} = v'_{\text{пр}} c_{\text{пр}}, \quad \text{или} \quad v'_{\text{пр}} = v' c_{\text{к}} / (c_{\text{к}} + c_{\text{пр}}). \quad (\text{XVI.24})$$

Из (XVI.21) и (XVI.24), обозначив через $c_{\text{общ}}$ изгибную жесткость демпферной связи, найдем

$$c_{\text{общ}} = - \frac{M_{\text{в}}^c}{v'} = c_{\text{к}} \left(1 - \frac{c_{\text{к}}}{c_{\text{к}} + c_{\text{пр}}} \right) = \frac{c_{\text{к}} c_{\text{пр}}}{c_{\text{к}} + c_{\text{пр}}}. \quad (\text{XVI.25})$$

Полученное соотношение, естественно, является приближенным, однако оно позволяет оценить влияние геометрических размеров контактной зоны на изгибную жесткость демпферной связи.

Расчеты показывают, что величина $q_{\text{к}}/e$ весьма слабо зависит от нагрузки (т. е. от частоты вращения турбины), в связи с чем приближенно выполняется соотношение $c_{\text{к}} \sim a^3$. При выполнении условия $c_{\text{к}} \ll c_{\text{пр}}$ жесткость демпферной связи $c_{\text{общ}}$ в соответствии с формулой (XVI.25) также оказывается пропорциональной величине a^3 . При очень малой частоте вращения турбины, если не учитывать усилий, возникающих в зоне контакта при сборке, изгибная жесткость демпферной связи стремится к нулю, так как в соответствии с формулой (XVI.18) $\lim_{q_{\text{к}} \rightarrow 0} (q_{\text{к}}/e) = 0$.

Расчеты, проведенные для лопаток последней ступени мощной паровой турбины с $D_{\text{ср}}/l = 2,58$, соединенных тремя демпферными проволоками, показали, что при принятых предположениях величина $c_{\text{общ}}$ составляет от 25 до 50% от $c_{\text{пр}}$ для различных проволок при номинальной частоте вращения. При уменьшении длины площадки контакта происходит быстрое уменьшение величины $c_{\text{к}}$, и связанной с ней формулой (XVI.25) величины $c_{\text{общ}}$.

Полученные соотношения подтверждают обнаруженный ранее экспериментально факт близости к шарнирному соединению лопатки с демпферной проволокой при изгибе лопатки в плоскости диска [24, 202]. Об этом же свидетельствуют и приведенные в п. XVI.4 результаты испытаний вращающихся лопаток, соединенных демпферными проволоками.

Таким образом, в соответствии с выражениями (XVI.16), (XVI.22) и (XVI.24) коэффициент H_1 для демпферной проволоки может быть вычислен по формуле

$$H_1 = \frac{v'_{\text{пр}}}{v'} = \frac{c_{\text{к}}}{c_{\text{к}} + c_{\text{пр}}} = \frac{1}{1 + (c_{\text{пр}}/c_{\text{к}})}. \quad (\text{XVI.26})$$

Наконец, следуя работе [32], определим крутильную жесткость демпферных проволок при колебаниях, т. е. определим коэффициент H_3 в системе (XVI.16).

Используем следующие предположения: центр контактной зоны совпадает с центром тяжести поперечного сечения лопатки;

давление равномерно распределено по длине площадки контакта; сила трения в зоне контакта равна предельному значению $q_{\kappa}v$ (v — коэффициент трения) везде, где имеется взаимное смещение лопатки и проволоки, и равна нулю там, где взаимное смещение отсутствует.

При принятых предположениях крутящий момент, действующий от проволоки на лопатку при колебаниях, может достигнуть следующего максимального значения:

$$M_z^c = 2 \int_0^{a/2} q_{\kappa} v y dy = q_{\kappa} v \frac{a^2}{4}. \quad (\text{XVI.27})$$

Так как рассматриваются малые колебания, то до определенной амплитуды следует считать, что проскальзывание по всей зоне контакта отсутствует и при повороте поперечного сечения лопатки на угол θ на нее будет действовать реактивный крутящий момент от демпферной проволоки, определяемый третьей из формул (XVI.16) при условии, что $H'_3 \approx 1$. В работе [32] показано, что с ростом мощности турбины уровень динамических напряжений в лопатках, при котором проскальзывание по всей зоне контакта еще будет отсутствовать, как правило, возрастает. В п. XVI.4 будут приведены экспериментальные данные, свидетельствующие о том, что до определенной амплитуды колебаний необходимо учитывать крутильную жесткость демпферных проволок.

Таким образом, при малых амплитудах колебаний лопаток, соединенных замкнутыми на круг демпферными проволоками, приближенно выполняются следующие граничные условия ($m \ll z_1$):

$$\left. \begin{aligned} M_x^c &= -\frac{12EJ_{cx}}{l} v' \frac{1}{1 + (c_{\text{пр}}/c_{\kappa})}; & M_y^c &= 0; \\ M_z^c &= -\frac{12EJ_{cz}}{l} \theta; & Q_x^c &= m_c p^2 u; \\ Q_y^c &= -\frac{4EF_c}{l} v \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} + m_c p^2 v. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVI.28})$$

Естественно, что при увеличении числа узловых диаметров вместо приближенных формул (XVI.16) следует использовать более общие формулы (XVI.8а), (XVI.8б) и (XVI.10).

При возрастании амплитуды колебаний лопаток, соединенных демпферными проволоками, возможны проскальзывание по всей зоне контактной поверхности и связанные с этим увеличение рассеяния энергии и изменение собственных частот. Особенности, возникающие при «больших» амплитудах колебаний, рассмотрены в п. XVI.5.

Паяные проволоки. Паяные проволоки используют только для соединения лопаток в пакеты, так как при замыкании с их помощью всех лопаток ступени на круг могли бы возникнуть зна-

чительные статические напряжения в проволоках (а при наличии одного разъема по окружности, предназначенного для тепловых расширений, могли бы появиться и значительные напряжения изгиба в лопатках вблизи разъема — см. п. IV.3). В связи с этим наибольший практический интерес представляют синфазные колебания лопаток и необходимые для их определения коэффициенты H_1 и H_3 .

Как и при изучении колебаний лопаток с демпферными проволоками, при определении коэффициента H_1 будем отдельно рассматривать жесткость собственно шага проволоки $c_{\text{пр}} = 12EJ_{\text{пр}}/t$ и жесткость контактного соединения паяной проволоки с лопаткой c'_κ :

$$c'_\kappa = M'_x/\gamma, \quad (\text{XVI.29})$$

где γ — деформация первоначально прямого угла между лопаткой и паяной проволокой под действием момента M'_x , т. е. $\gamma = v' - v'_{\text{пр}}$.

Учитывая соотношения $v'_{\text{пр}} = M'_x/c_{\text{пр}}$ и $v' - v'_{\text{пр}} = M'_x/c'_\kappa$, найдем коэффициент H'_1 , который определяется в данном случае формулой типа (XVI.26):

$$H'_1 = \frac{v'_{\text{пр}}}{v'} = \frac{c'_\kappa}{c'_\kappa + c_{\text{пр}}} = \frac{1}{1 + (c_{\text{пр}}/c'_\kappa)}. \quad (\text{XVI.26a})$$

При определении изгибающего момента, действующего на лопатку от паяной проволоки, необходимо использовать выражение $[12EJ_{cx}/(t - c)] v' H'_1$, (где c — толщина лопатки в месте установки проволоки), а в первой из формул (XVI.16) используется общее выражение $(12EJ_{cx}/t) v' H'_1$, не зависящее от конструкции соединяющих лопатки связей. В связи с этим $H_1 = H'_1 t/(t - c)$, т. е. коэффициент H_1 для паяных проволок может оказаться и больше единицы. Найденная для паяной проволоки диаметра d экспериментальная зависимость коэффициента H_1 от c/d и t/d показана на рис. IV.3 [202].

Аналогичные кривые могут быть получены и для коэффициента H'_3 , определяющего жесткость паяной проволоки при кручении лопаток.

Уменьшение жесткости паяных проволок из-за конечного числа лопаток в пакете, как указывалось выше, может быть учтено введением поправочного множителя $(m - 1)/m$, где m — число лопаток в пакете.

Бандажные полки. На рис. XVI.4 изображены лопатки, выполненные заодно с бандажными полками. Как видно, контактная зона в рассматриваемом случае занимает сравнительно небольшую часть поперечного сечения полки. Так как на торцевых участках бандажных полок, не находящихся в контакте друг с другом, напряжения отсутствуют, то как изгибная жесткость, так и жесткость пояса бандажных полок на растяжение оказы-

ваются меньше, чем жесткость эквивалентного сплошного кольца без разрезов по стыкам полок.

Ограничиваясь рассмотрением колебаний с малыми амплитудами, будем пренебрегать проскальзыванием по контактным поверхностям полок. При определении жесткости пояса бандажных полок на растяжение наличие зазоров по стыкам полок приближенно может быть учтено уменьшением площади поперечного сечения связи в отношении d/D (рис. XVI.4), т. е. выбором коэффициента H_3 в соответствующей формуле (XVI.16) равным d/D . Оказывается, однако, что подобное уменьшение площади поперечного сечения полок почти не влияет на собственные частоты колебаний, так как жесткость шага связей на растяжение значительно больше жесткости лопатки на изгиб. Например, на основании

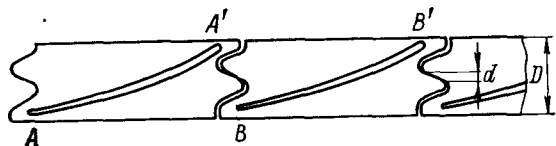


Рис. XVI.4. Соединение лопаток, выполненных заодно с бандажными полками

сопоставления экспериментальных и расчетных данных в работе [18] вообще предлагается пренебрегать растяжимостью пояса бандажных полок.

Аналогичное явление имеет место и при определении крутильной жесткости бандажных полок: хотя величина H_3' в третьей из формул (XVI.16) из-за наличия зазоров по стыкам полок должна быть меньше единицы, жесткость шага связи при изгибе в аксиальном направлении обычно много больше крутильной жесткости лопатки, относительная величина угла θ в периферийном сечении колеблющейся лопатки близка к нулю и влияние изменения коэффициента H_3' на собственные частоты сравнительно мало.

При определении коэффициента H_1 необходимо учитывать два фактора, действующих в противоположных направлениях: наличие зазоров по торцам бандажных полок уменьшает коэффициент H_1 , а наличие сравнительно небольшого угла между хордой периферийного сечения и плоскостью диска увеличивает его, так как изгибная жесткость косоугольной пластинки $AA'B'B$, заделанной вдоль сторон AA' и BB' (рис. XVI.4), может быть много больше жесткости прямоугольной пластинки тех же длины и ширины.

Из сказанного выше ясно, что наличие зазоров по стыкам полок может и не привести к существенному снижению частот колебаний с малым числом узловых диаметров: например, в п. XVI.4 приведены экспериментальные данные, свидетель-

ствующие о том, что заварка стыков бандажных полок слабо сказалась на собственных частотах этих колебаний.

Что касается частот колебаний с относительно большим числом узловых диаметров, то наличие зазоров по стыкам полок приводит к резкому уменьшению коэффициентов H_2 , H_4' и H_4'' в формулах (XVI.8a), (XVI.8б) и (XVI.10), существенно влияющих на эти частоты. Кроме того, при изгибе пояса бандажей в осевом направлении и его кручении необходимо учитывать не только зазоры по стыкам полок, но и податливость контактного соединения полок — аналогично тому, как это было выполнено при рассмотрении изгиба демпферных проволок в плоскости диска. Именно малостью коэффициентов H_2 , H_4' и H_4'' объясняется резкое повышение частот колебаний с относительно большим числом узловых диаметров после заварки бандажных полок лопаток исследовавшейся ступени (см. п. XVI.4).

Арочные бандажи. Арочные бандажи (см. рис. XVI.1, и) не получили распространения в отечественном паротурбостроении¹ из-за присущих этой конструкции определенных недостатков. Тем не менее арочные бандажи рассмотрены для того, чтобы на их примере выявить особенности, возникающие и при использовании связей, соединяющих несходственные точки поперечных сечений соседних лопаток (см. рис. XVI.1, ж, з).

При определении жесткости арочного бандажа на растяжение будем в первом приближении рассматривать его как кривой брус, причем при определении низших частот колебаний облачивания во многих случаях достаточно считать воздействие на связь статическим и определять статическую, а не динамическую жесткость арочного бандажа.

Арочный бандаж толщиной δ , поперечное сечение которого представляет собой часть дуги окружности радиуса R ($R \gg \delta$), изображен на рис. XVI.5.

Считая арочный бандаж заделанным в месте соединения с лопаткой, нетрудно определить реакцию H_A (рис. XVI.5), действующую на лопатку от бандажа при отклонении лопатки в тангенциальном направлении на величину a .

Обозначим, как и ранее, перемещения по осям y и z соответственно через v и w и используем следующие граничные условия в месте соединения арочного бандажа с лопаткой:

$$w(0) = 0; \quad w'(0) = 0; \quad v(0) = a.$$

¹ В работе [175] указано, что фирма «Парсонс» применяет арочные бандажи для соединения лопаток последних ступеней ЦНД мощных турбин.

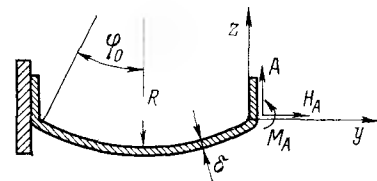


Рис. XVI.5. Арочный бандаж

Если учесть, что обычно выполняется соотношение $\varphi_0 \ll 1$ (рис. XVI.5), то можно использовать приближенные формулы $\sin \varphi \approx \varphi$; $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$ и получить при $R \gg \delta$:

$$v(0) = \frac{2}{45} \frac{H_A R^3 \varphi_0^5}{EJ}; \quad A = 0; \quad M_A = -\frac{1}{3} H_A R \varphi_0^2,$$

откуда следует

$$K = \frac{H_A}{v(0)} = \frac{45}{2} \frac{EJ}{R^3 \varphi_0^5}, \quad (\text{XVI.30})$$

где J — момент инерции поперечного сечения арочного бандажа.

Если бы лопатки соединялись проволочными связями, то для проволоки коэффициент $K_{\text{пр}}$ равнялся бы следующей величине: $K_{\text{пр}} = H_A/v(0) = EJ_{\text{пр}}/t$. Так как $t \sim R\varphi_0$ и $J = Fi^2$, то $K_{\text{пр}}/K \sim R^2/t^2 \gg 1$.

Если учесть, что при соединении арочными бандажами всех лопаток ступени образовавшаяся система обладает циклической симметрией и для нее справедливы все рассмотренные выше особенности колебаний, то легко получить связь между перемещением лопатки в тангенциальном направлении и силой, действующей на нее от арочных бандажей при колебаниях с m узловыми диаметрами:

$$Q_y^c = -4Kv \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} + m_c p^2 v = -90 \frac{EJ}{R^3 \varphi_0^5} \sin^2 \frac{m\pi}{z_1} + m_c p^2 v. \quad (\text{XVI.31})$$

Расчеты, выполненные при использовании граничных условий (XVI.31), а также приведенные в п. XVI.4 результаты испытаний лопаток с арочными бандажами подтверждают, что частоты колебаний с малым числом узловых диаметров из-за относительно небольшой величины K оказываются ниже частот колебаний лопаток, соединенных проволочными связями.

Связи, соединяющие несходственные точки поперечных сечений соседних лопаток. Связи, соединяющие несходственные точки поперечных сечений, могут быть как упругофрикционными (см. рис. XVI.1, ж), так и чисто упругими (см. рис. XVI.1, з).

Общим с рассмотренными выше арочными бандажами является относительно малая жесткость связей на растяжение, т. е. относительно малая величина силы, действующей на лопатку от связей при единичном смещении лопатки в тангенциальном направлении.

Если относительно малая величина K для арочного бандажа объясняется его малой изгибной жесткостью [см. формулу (XVI.30)], то для связей, соединяющих несходственные точки поперечных сечений, малое значение аналогичного коэффициента определяется податливостью собственно лопаток. Действительно, разница в перемещениях центров тяжести поперечных сечений соседних лопаток в тангенциальном направлении

определяется не столько растяжимостью связей, сколько разницей в углах поворота соседних лопаток и «пластиночными» деформациями пера лопатки.

В работе [78] учтена дополнительная податливость, вызванная закручиванием лопаток постоянного сечения, соединенных связями типа показанных на рис. XVI.1, ж. Для лопаток переменного сечения в работе [78] предложено экспериментально определять динамические податливости отдельных лопаток в местах установки связей и полученные данные использовать при расчете совместных изгибно-крутильных колебаний с различными числами узловых диаметров. Частоты совместных колебаний лопаток могут быть изменены (частоты первой группы форм внутрипакетных колебаний — повышены) за счет уменьшения расстояния h между связями вдоль хорды лопаток (см. рис. XVI.1, ж), однако при этом увеличиваются статические напряжения в связях, что затрудняет практическую реализацию подобного способа изменения собственных частот.

В пп. XI.12 и XIII.7 рассматривались особенности колебаний, вызванные различием в парциальных частотах лопаток, составляющих комплект, и было показано, что эффективность соединения лопаток в замкнутый на круг пакет может резко уменьшиться в случае применения «слишком податливых» связей. Именно такими в ряде случаев оказываются как арочные бандажи, так и связи, соединяющие несходственные точки поперечных сечений соседних лопаток. В п. XVI.4 будет показано, что при вынужденных колебаниях лопаток, соединенных подобными связями, относительно большими могут оказаться величины побочных резонансов (см. п. XIII.7), что является существенным недостатком этих конструкций связей.

XVI.4. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТОК, СОЕДИНЕННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ ПО КОНСТРУКЦИИ СВЯЗЯМИ

В настоящем параграфе приведены результаты сопоставления расчетных частот колебаний лопаток, соединенных различными по конструкции замкнутыми на круг связями, с экспериментальными частотами, полученными при испытаниях вращающихся облопаченных дисков. Расчетные частоты в большинстве случаев вычислялись при использовании граничных условий (XVI.16). Методика экспериментальных исследований описана в работах [24, 28] и кратко изложена ниже.

Испытания вращающихся облопаченных дисков проводились в вакуумной камере, в которой с помощью эжекторов поддерживалось давление 3—4 кПа. Приводом служила паровая турбина мощностью 4 МВт, соединенная жесткой муфтой с валом, на который насаживался исследуемый диск. Возбуждение колебаний осуществлялось неподвижной в пространстве силой — струей

пара, подводимой в произвольном по высоте лопатки сечении. Давление пара, подаваемого на возбуждение, могло изменяться в широких пределах и достигать 0,6—0,8 МПа. Динамические частоты и распределение напряжений по высоте вращающихся лопаток и длине пакета регистрировались с помощью тензорезисторов с базой 5—10 мм, наклеенных в различных сечениях по высоте лопаток. Динамические напряжения в зоне концентрации (например, в районе отверстий под демпферные проволоки в лопатках) замерялись с помощью тензорезисторов с базой 0,8—2 мм. Сигналы с тензорезисторов передавались на токосъемное устройство, а затем на усилительную и регистрирующую аппаратуру. Динамические напряжения замерялись при медленном изменении частоты вращения приводной турбины в диапазоне 500—3400 об/мин. Одновременно с покадровой записью на шлейфный осциллограф производилось детектирование сигналов тензорезисторов и запись выпрямленного сигнала (как полного, так и прошедшего через систему фильтров) на другой шлейфный осциллограф — с малой скоростью протяжки ленты, предназначенный для непосредственной непрерывной записи резонансных кривых и определения декремента по ширине резонансного пика. Частоту вращения турбины изменяли настолько медленно, чтобы не исказить формы резонансных кривых и не внести дополнительных погрешностей при определении декремента [49]. В связи с различием в парциальных частотах лопаток, составляющих комплект, при испытаниях регистрировались как основные резонансы, для которых кратность колебаний совпадает с числом узловых диаметров, так и побочные резонансы со значительно меньшим уровнем динамических напряжений (см. п. XIII.7). Особенности колебаний, вызванные разбросом в парциальных частотах лопаток, подробно рассмотрены в п. XVI.6. В настоящем параграфе при сопоставлении экспериментальных и расчетных частот указаны опытные точки, соответствующие только основным резонансам.

Колебания лопаток, соединенных демпферными проволоками. На рис. XVI.6—XVI.10 приведены результаты испытаний лопаток, соединенных замкнутыми на круг демпферными проволоками [24, 32].

На рис. XVI.6, а приведено сравнение экспериментальных и расчетных частот колебаний лопаток с $D_{cp}/l = 2,58$, соединенных двумя демпферными проволоками, а на рис. XVI.6, б — тремя демпферными проволоками. На рис. XVI.6, б нанесены также расчетные результаты, полученные в предположении точечного контакта лопатки и демпферной проволоки, т. е. в предположении отсутствия изгибной жесткости демпферных проволок. Цифры I, II, III на рис. XVI.6 означают номер группы форм внутрипакетных колебаний.

Из сопоставления с рис. XV.5, где приведены расчетные и экспериментальные частоты отдельных вращающихся лопаток

с $D_{cp}/l = 2,58$, видно, что при соединении лопаток замкнутыми на круг демпферными проволоками возбуждаются колебания с различными числами узловых диаметров и не возбуждаются колебания отдельных лопаток или близкие к ним по частоте синфазные колебания замкнутого на круг пакета, для которых при использовавшемся возбуждении пакетный множитель равен нулю (см. п. XIII.6). Как следует из рис. XVI.6, наблюдается достаточно хорошее совпадение экспериментальных и расчетных

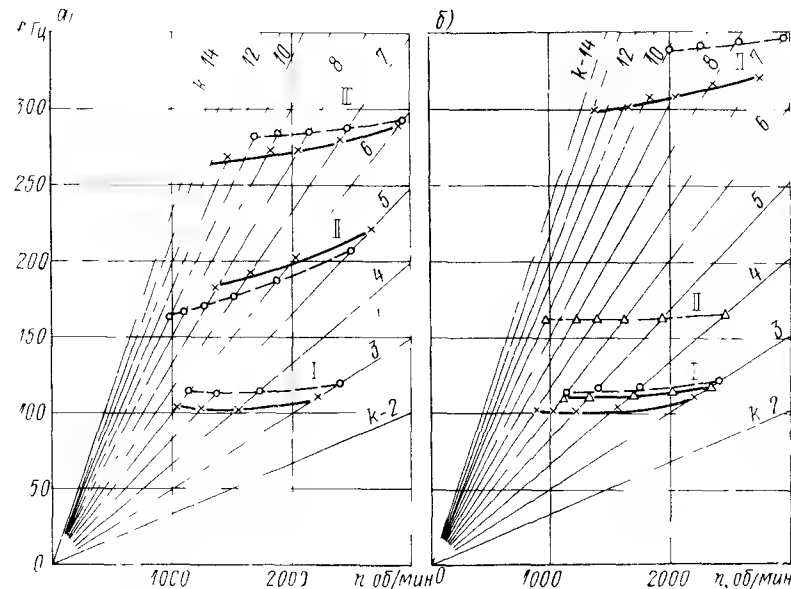


Рис. XVI.6 Сопоставление экспериментальных и расчетных частот лопаток ($D_{cp}/l = 2,58$), соединенных двумя (а) и тремя (б) демпферными проволоками

× — эксперимент ○ — расчет, △ — расчет без учета изгибной жесткости проволок

частот при условии, что учитываются конечные размеры площадки контакта между лопаткой и демпферной проволокой. В то же время учет изгибной жесткости демпферных проволок приводит к расхождению расчетных и экспериментальных частот, особенно значительному для преимущественно крутильных колебаний — II группа форм на рис. XVI.6, б.

На рис. XVI.7 приведено сопоставление расчетного и экспериментального распределения динамических напряжений на входной ($\sigma_{вх}^{отн}$) и выходной ($\sigma_{вых}^{отн}$) кромках при I группе форм внутрипакетных колебаний (колебания с тремя узловыми диаметрами лопаток, соединенных двумя демпферными проволоками). Сравнительные результаты, приведенные на рис. XVI.7, с данными рис. XV.4, где показано расчетное распределение напряжений при первых пяти собственных формах колебаний отдельной

лопатки с $D_{cp}/l = 2,58$, легко заметить, что при соединении лопаток замкнутыми на круг демпферными проволоками возбуждаются именно колебания с различными числами узловых диаметров, а не какие-либо собственные формы отдельных лопаток.

На рис. XVI 8 приведено сравнение показаний тензорезисторов, расположенных на демпферной проволоке, с показаниями тензорезистора, расположенного в корневом сечении лопатки

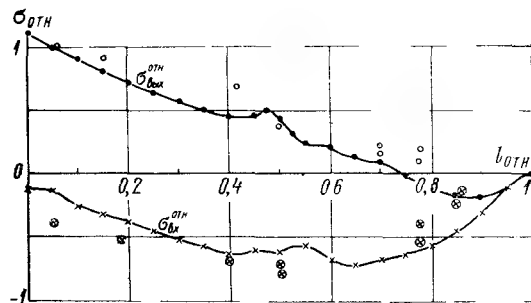


Рис. XVI 7 Сопоставление экспериментального и расчетного распределения напряжений по высоте лопатки при колебаниях с тремя узловыми диаметрами:
○, ○ — эксперимент, ×, ● — расчет

с $D_{cp}/l = 2,77$. Чтобы не исказить характера соединения лопатки с демпферной проволокой при колебаниях, какой-либо припайки проволоки к лопаткам для вывода тензооснастки не производилось. Сама по себе возможность работы тензорезисторов на проволоках свидетельствует об отсутствии проскальзывания по всей площадке контакта при том уровне динамических напряжений, при котором проводились испытания. Как следует из приведенных на рис. XVI.8 фазовых соотношений, при колебаниях с четырьмя узловыми диаметрами на частоте вращения $n \approx 39$ об/с демпферные проволоки в основном испытывают динамические напряжения растяжения—сжатия и в значительно меньшей степени динамические напряжения изгиба, что указывает на сравнительно малое значение коэффициента H_1 в формуле (XVI.26). Из рис. XVI.8 также следует, что сдвиг по фазе между напряжениями растяжения—сжатия в демпферных проволоках и напряжениями изгиба в лопатке, рядом с которой расположен тензорезистор на проволоке, составляет $\pi/2$.

Это подтверждает полученный в п. XI.10 вывод о том, что при внутрипакетных колебаниях лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, максимальные динамические напряжения растяжения—сжатия в связях возникают у лопаток, расположенных вблизи узлов по длине пакета. В п. XIII.6 было показано, что при возбуждении неподвижной в пространстве силой вращающихся лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, возникающие колебания носят характер бегущей волны, т. е. узлы

перемещаются по длине пакета, оставаясь неподвижными в пространстве. При этом сдвиг по фазе между колебаниями лопаток, находящихся в конкретный момент вблизи соседних узлов и пучностей по окружности колеса, составляет $\pi/2$, т. е. именно то значение, которое было экспериментально зарегистрировано между показаниями тензорезисторов на демпферной проволоке и лопатке (естественно, что напряжения изгиба в демпферных про-

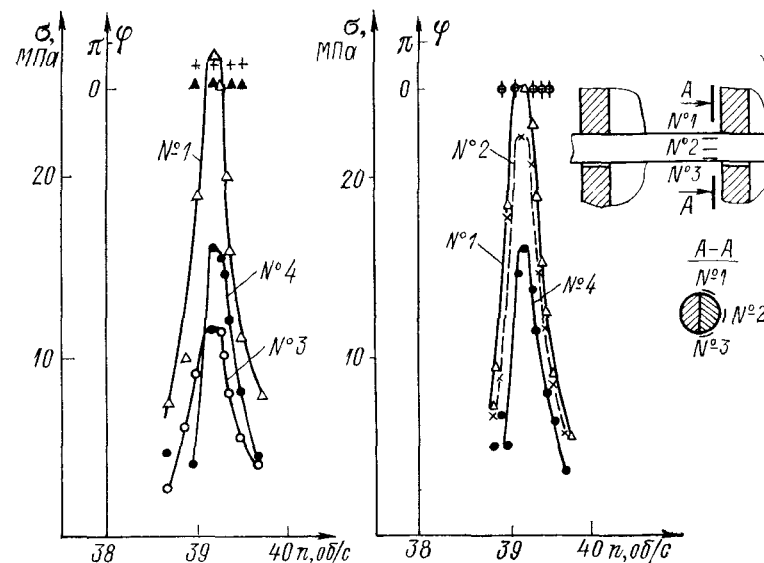


Рис. XVI 8. Динамические напряжения, зарегистрированные тензорезисторами на демпферной проволоке (№ 1—№ 3) и в корневом сечении лопатки (№ 4). а — показания тензорезисторов; б — схема их расположения на проволоке,

○, ▲, + — сдвиг по фазе между показаниями тензорезисторов (○ — № 1 и № 2, ▲ — № 1 и № 3, + — № 1 и № 4)

волоках должны быть в фазе или противофазе с напряжениями изгиба в лопатке, рядом с которой расположена демпферная проволока).

Для уточнения характера соединения лопаток с демпферными проволоками были проведены сравнительные испытания пакета из шести лопаток с $D_{cp}/l = 2,77$, соединенных первоначально расположенной вблизи вершин лопаток демпферной проволокой, состоящей из двух половин (сегменты демпферной проволоки не были сдвинуты друг относительно друга по окружности колеса), а затем круглой паяной проволокой того же диаметра, что и демпферная. Так как место расположения и число проволок сохранялись постоянными и последовательно испытывались одни и те же лопатки, то различие в собственных частотах пакета определялось только уменьшением изгибной жесткости демпферной проволоки по сравнению с паяной.

На рис. XVI.9 приведено сравнение собственных частот колебаний пакета лопаток, соединенных паяной или демпферной проволокой, на рис. XVI.10 — результаты испытаний лопаток той же ступени, соединенных одной или двумя замкнутыми на круг демпферными проволоками. Так как пакетный множитель при синфазных колебаниях с низкими кратностями (k) пакета из шести

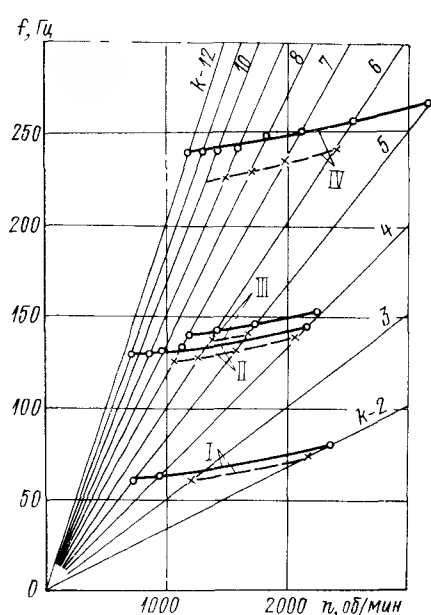


Рис. XVI.9 Сопоставление результатов испытаний пакета лопаток, соединенных одной проволокой:

○ — паяная проволока × — демпферная проволока

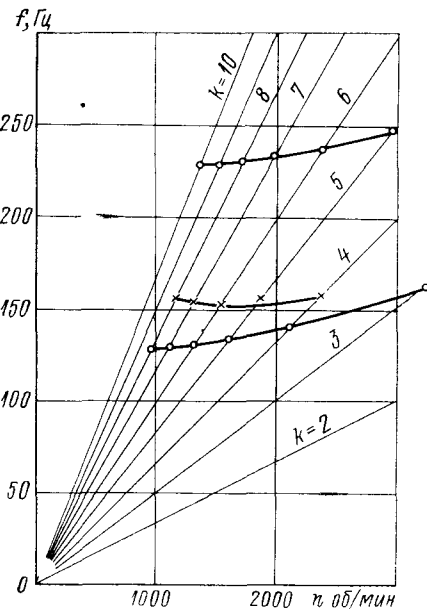


Рис. XVI.10 Результаты испытаний лопаток, соединенных одной (○) или двумя (×) замкнутыми на круг демпферными проволоками

лопаток оказался весьма большим (всего на колесе было установлено 88 лопаток, поэтому при синфазных колебаниях $\mu = 0,967$ при $k = 2$; $\mu = 0,822$ при $k = 5$ и даже при $k = 10$ $\mu = 0,402$), то естественно, что при испытаниях пакетов с наибольшими напряжениями были зарегистрированы колебания типа A_0 (форма I на рис. XVI.9), полностью отсутствовавшие при испытаниях лопаток, соединенных замкнутым на круг связями (рис. XVI.10).

Повышение частот колебаний пакета с паяной проволокой по сравнению с частотами пакета с демпферной проволокой указывает на относительно небольшую величину H_1 в формуле (XVI.26): для испытывавшихся лопаток в соответствии с приближенными формулами (XVI.23) и (XVI.26) расчетное значение H_1 составляло 0,259. С другой стороны, повышение частот аксиально-кру-

тильных колебаний при увеличении числа узлов по длине пакета с демпферной проволокой (II и III формы на рис. XVI.9) указывает на то, что полностью пренебрегать изгибной жесткостью демпферных проволок было бы неправильно. Таким образом, как результаты, приведенные на рис. XVI.6, так и результаты рис. XVI.10 указывают на необходимость учета конечных размеров площадки контакта лопатки и демпферной проволоки.

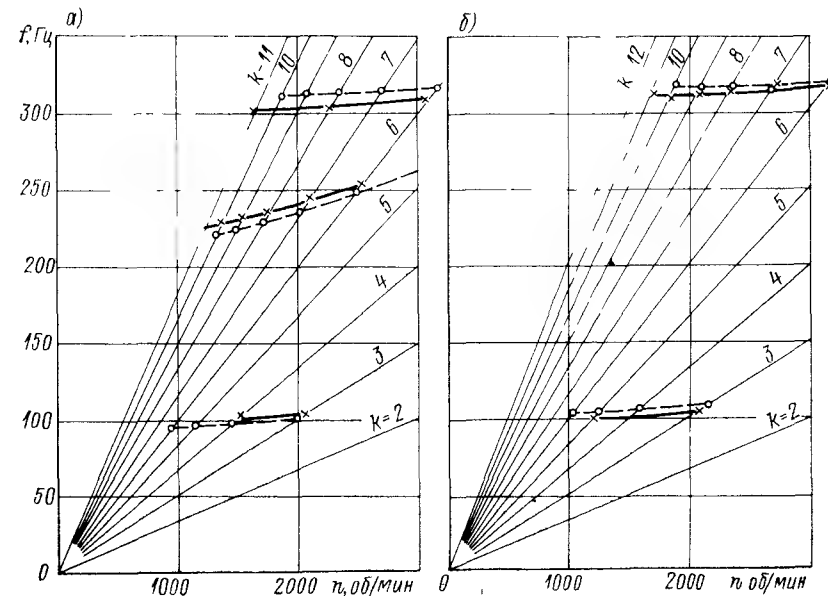


Рис. XVI.11 Сопоставление расчетных и экспериментальных частот бандажированных лопаток ($D_{cp}/l = 2,58$), дополнительно соединенных одной и двумя демпферными проволоками: × — эксперимент; ○ — расчет

Сравнение результатов испытаний, приведенных на рис. XVI.9 и XVI.10, а также на рис. XVI.6 и XV.5, указывает на значительное уменьшение числа собственных форм, возбуждаемых неравномерностью давления по окружности колеса, после соединения лопаток замкнутыми на круг демпферными проволоками.

Колебания лопаток, выполненных заодно с бандажными полками. На рис. XVI.11—XVI.13 приведены результаты вибрационных испытаний бандажированных лопаток [26, 32].

На рис. XVI.11 показано сравнение расчетных и экспериментальных частот колебаний бандажированных лопаток с $D_{cp}/l = 2,58$, дополнительно соединенных демпферной проволокой на расстоянии $0,75l$ от корня лопатки (рис. XVI.11, а) и двумя демпферными проволоками на расстоянии $0,48l$ и $0,75l$ (рис. XVI.11, б). Расчетные частоты для колебаний с малым числом узловых диаметров были получены при использовании упрощенных формул

типа (XVI.16) для граничных условий как в местах установки демпферных проволок, так и бандажных полок. Как видно, наблюдается достаточно хорошее совпадение расчетных и экспериментальных частот, причем, как и в случае соединения демпферными проволоками небандажированных лопаток, возбуждаются только колебания с различными числами узловых диаметров, а не синфазные колебания замкнутого на круг пакета. Использование упрощенных граничных условий (XVI.16) вместо гранич-

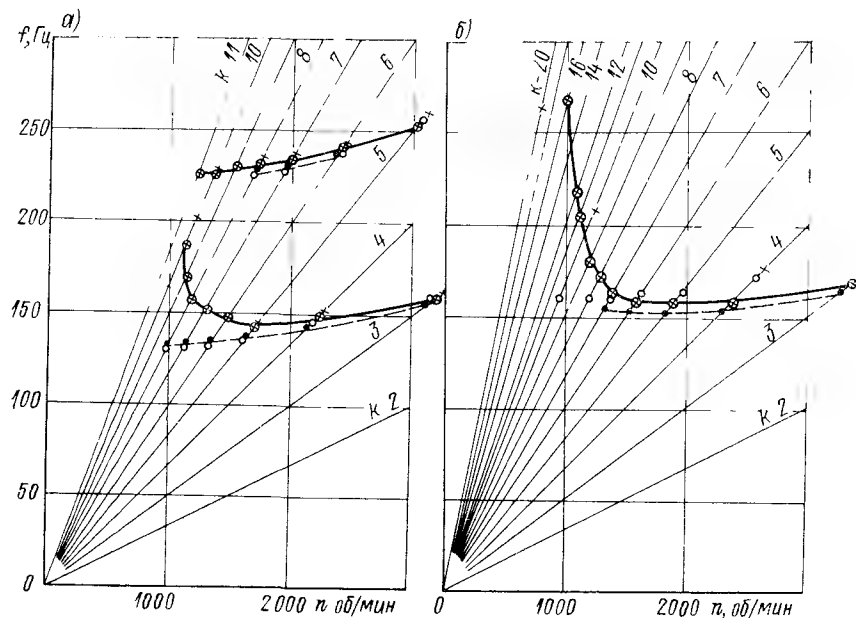


Рис. XVI.12. Сопоставление расчетных и экспериментальных частот бандажированных лопаток с заваренными и незаваренными бандажными полками: $\times$, $\otimes$ — соответственно расчет и эксперимент для заваренных полок, $\bullet$ — соответственно расчет и эксперимент для незаваренных полок

ных условий (XVI.8, а), (XVI.8, б) и (XVI.10), как показано в п. XVI.2, для демпферных проволок оправдывается относительно небольшой изгибной жесткостью проволок при колебаниях с малым числом узловых диаметров. Что касается бандажных полок, то переход от граничных условий (XVI.8, а), (XVI.8, б) и (XVI.10) к граничным условиям (XVI.16), эквивалентный обращению в нуль коэффициентов H_2 , H_3 , H_4 , H_4' оправдывается, как указывалось в п. XVI.3, наличием зазоров по торцам полок и относительно большой податливостью контактного соединения.

На рис. XVI.12 приведены результаты специально проведенного методического эксперимента с бандажированными лопатками с $D_{св}/l = 2,77$, у которых после окончания первого этапа испытаний стыки бандажных полок были заварены на круг и

образовали сплошное кольцо с одним разъемом по окружности [26]. На рис. XVI.12, а приведено сравнение результатов испытаний лопаток с заваренными и незаваренными бандажными полками, на рис. XVI.12, б — результаты испытаний тех же лопаток, дополнительно соединенных демпферными проволоками на расстоянии 0,6l от корня лопаток. На рис. XVI.12 приведены также расчетные результаты, полученные при использовании следующих граничных условий: для незаваренных бандажных полок было принято, что $H_2 = H_4' = H_4'' = 0$, и использованы условия (XVI.16); для заваренных бандажных полок считалось, что $H_2 = H_4' = 1$ [26].

На рис. XVI.13 приведено расчетное и экспериментальное распределение динамических напряжений при I и II группах форм внутрисетчатых колебаний лопаток с заваренными и незаваренными бандажными полками.

Из приведенных на рис. XVI.12 и XVI.13 данных следует, что при колебаниях с малым числом узловых диаметров частоты лопаток с заваренными и незаваренными бандажными полками близки друг к другу, а резкое повышение частот после заварки полок имеет место только для колебаний с относительно большим числом узловых диаметров, где существенное значение приобретает кручение пояса бандажных полок и, главное, изгиб полок в аксиальном направлении.

Наличие относительно больших динамических напряжений непосредственно под бандажной полкой (рис. XVI.13) свидетельствует о необходимости учета сосредоточенного момента, действующего на лопатки от полок при изгибе лопаток в плоскости

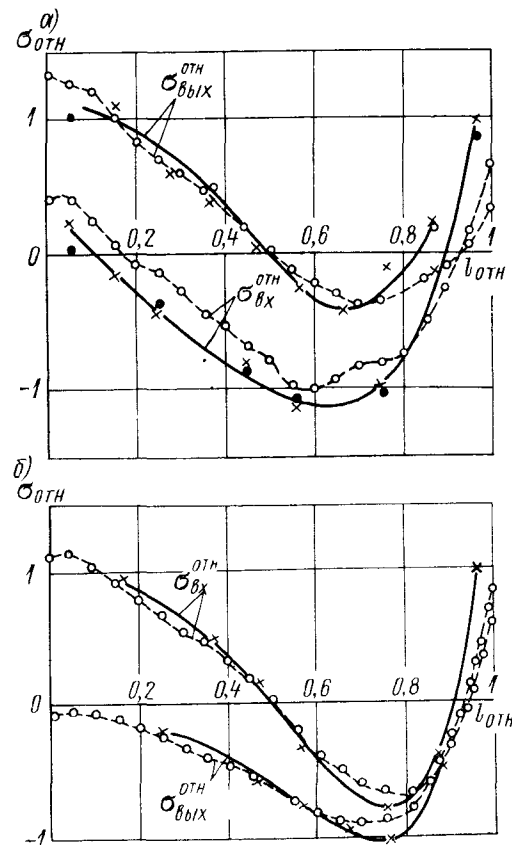


Рис. XVI.13. Сопоставление расчетного и экспериментального распределения напряжений по высоте бандажированных лопаток: а — I группа форм, $k = 4$; б — II группа форм, $k = 6$;

$\circ$ — расчет, $\times$, $\bullet$ — эксперимент соответственно для заваренных и незаваренных полок

диска, причем, как отмечалось в [26], коэффициент H , в системе (XVI.16) может оказаться даже больше единицы из-за значительного увеличения жесткости косоугольной пластинки по сравнению с прямоугольной пластинкой той же длины и ширины (см. п. XVI.3).

Сравнение результатов испытаний бандажированных лопаток с $D_{cp}/l = 2,58$, соединенных двумя демферными проволоками, небандажированных лопаток той же длины, соединенных тремя демферными проволоками на расстоянии $0,48l$, $0,75l$ и $0,96l$ от корня, и отдельных небандажированных лопаток (см. рис. XVI.6, б, XVI.11, б и XV.5) указывает на то, что с точки зрения повышения собственных частот применение бандажных полок оказывается столь же эффективным, как и установка демферных проволок. Так как бандажные полки, кроме того, обеспечивают более высокую экономичность ступени, большее рассеяние энергии при колебаниях (см. п. XVI.5), а в ряде случаев в них можно обеспечить и значительно более низкий уровень статических напряжений, чем в демферных проволоках, то вполне объяснимо широкое распространение, которое получили в последнее время бандажированные лопатки в стационарном турбостроении.

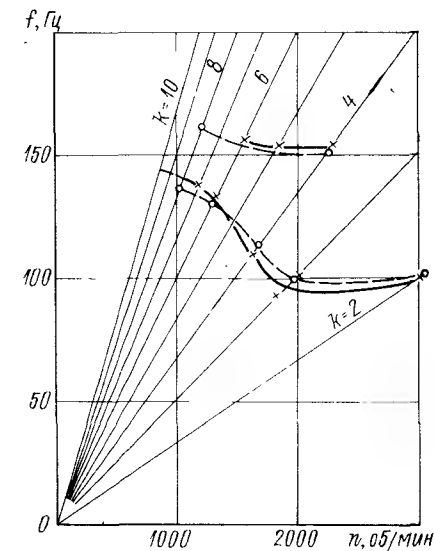


Рис. XVI.14. Сопоставление расчетных и экспериментальных частот внутрипакетных колебаний лопаток, соединенных арочными бандажами:

× — эксперимент; ○ — расчет

Колебания лопаток, соединенных арочными бандажами.

На рис. XVI.14 приведены расчетные и экспериментальные частоты лопаток с $D_{cp}/l = 2,82$ ¹, соединенных замкнутыми на круг арочными бандажами толщиной 2 мм [29].

Жесткость арочных бандажей на растяжение, подсчитанная по формуле (XVI.31), оказалась в 75 раз меньше жесткости демферных проволок диаметром 12 мм, расположенных в этом же сечении и использовавшихся для соединения лопаток в условиях эксплуатации. Как расчетные, так и экспериментальные результаты свидетельствуют о значительном снижении частот собственных колебаний с малыми числами узловых диаметров по сравнению

с колебаниями близких по конструкции лопаток, соединенных демферными проволоками (см. рис. XVI.10). Внутрипакетные колебания с малым числом узловых диаметров ($k = 2$ при I группе форм; $k = 4$ при II группе форм — рис. XVI.14) лишь незначительно отличаются соответственно от I и II собственных частот отдельных лопаток — рис. XVI.15.

Это обстоятельство, а также слабая связанность колебаний, вызванная относительно малой жесткостью арочных бандажей на растяжение (см. п. XI.12), и высокая чувствительность

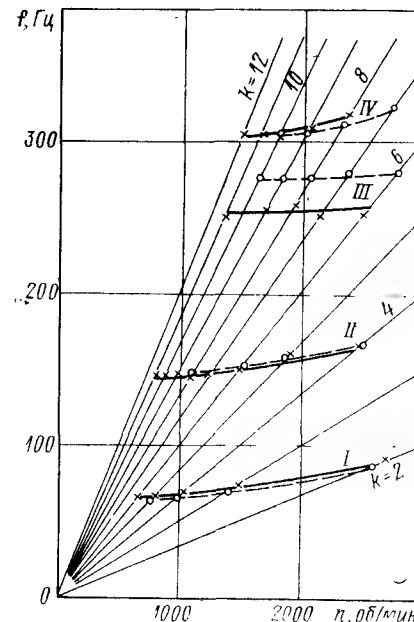


Рис. XVI.15. Сопоставление расчетных и экспериментальных частот колебаний отдельных лопаток ($D_{cp}/l = 2,82$):

× — эксперимент; ○ — расчет

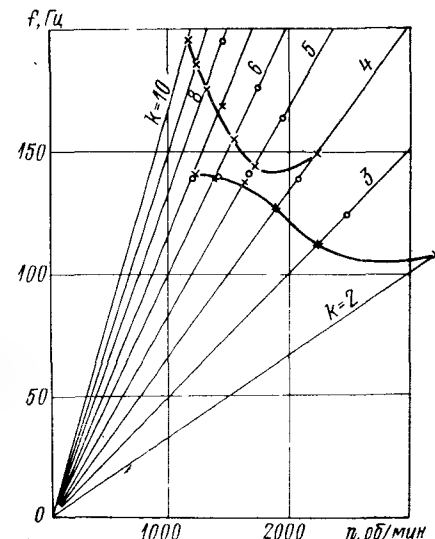


Рис. XVI.16. Результаты испытаний лопаток, соединенных фигурными бандажами:

× — бандажь соединены с лопатками с помощью специальных болтов; ○ — бандажь соединены с лопатками с помощью сварки

арочных бандажей к технологическим отклонениям, имеющим место при изготовлении и сборке лопаток, являются существенными недостатками рассматриваемой конструкции связей, препятствующими ее широкому применению в стационарном турбостроении.

Колебания лопаток со связями, соединяющими несходственные точки поперечных сечений. На рис. XVI.16 приведены результаты испытаний лопаток с $D_{cp}/l = 2,82$, соединенных замкнутыми на круг фигурными бандажами, конструкция которых изображена на рис. XVI.1, з: показаны как результаты испытаний при соединении бандажей с лопатками с помощью специальных болтов, так и результаты методического эксперимента — испытаний после дополнительной приварки фигурных бандажей к лопаткам.

¹ Отличаются от лопаток с $D_{cp}/l = 2,77$ длиной 755 мм подрезкой периферийных сечений всего на 20 мм.

Как видно, собственные частоты внутрипакетных колебаний с различными числами узловых диаметров относительно близки к собственным частотам лопаток с арочными бандажами (см. рис. XVI.14), причем податливость стыка лопаток с фигурными бандажами, устраненная после их приварки, не оказывает существенного влияния на собственные частоты (рис XVI 16) В отличие от результатов испытаний лопаток с арочными бандажами в данном случае снижение собственных частот внутрипакетных колебаний по сравнению с частотами лопаток, соединенных демпферными проволоками, объясняется не малой жесткостью связей

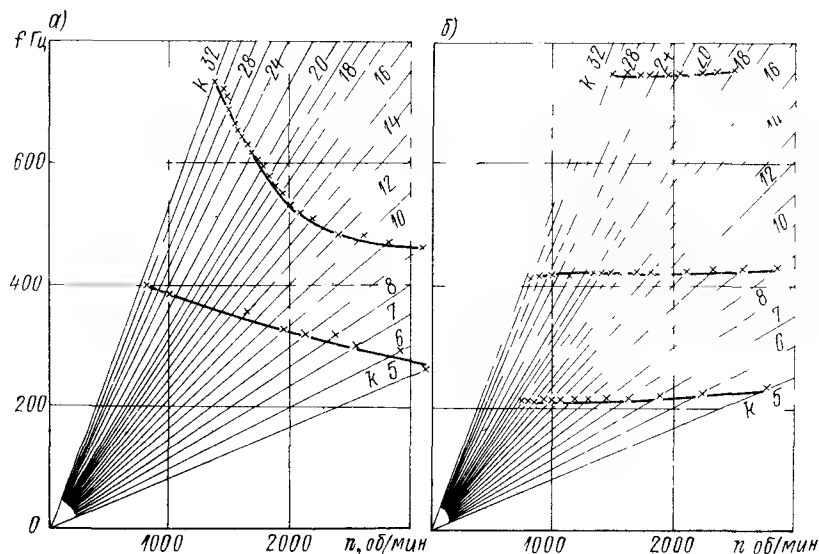


Рис XVI 17 Сравнение результатов испытаний лопаток, соединенных Z-образными связями (а), и отдельных лопаток (б)

на растяжение, а закручиванием лопаток и «пластичными» деформациями их поперечных сечений

На рис XVI 17 сравниваются результаты испытаний отдельных лопаток с $D_c/l = 4,27$ и лопаток, соединенных расположенными вблизи вершин замкнутыми на круг Z-образными связями (испытывался II вариант по рис XVI 1, ж, т е связь не препятствовала упругой раскрутке лопаток в поле центробежных сил) Как видно, и в данном случае частоты внутрипакетных колебаний при уменьшении числа узловых диаметров приближаются к частотам колебаний отдельных лопаток

Результаты расчетов и экспериментов, приведенные в настоящем параграфе, указывают на то, что при соединении лопаток замкнутыми на круг связями и возбуждении неравномерностью давления по окружности колеса наибольшую опасность представ-

ляют внутрипакетные колебания с числом узловых диаметров, совпадающим с кратностью колебаний. Частоты внутрипакетных колебаний существенно зависят от конструкции, числа и места расположения соединяющих лопатки связей.

XVI.5. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК С УПРУГИМИ И УПРУГОФРИКЦИОННЫМИ СВЯЗЯМИ

В п XIII 10 были рассмотрены особенности вынужденных колебаний лопаток, соединенных замкнутыми на круг упруго-фрикционными связями, и было показано, что рассеяние энергии в зоне контакта лопаток и связей при определенных амплитудах колебаний может значительно превосходить рассеяние энергии в материале и хвостовом соединении лопатки В настоящем параграфе приведены экспериментальные и расчетные результаты, подтверждающие эти соображения [26, 28, 29, 31, 32]

Рассеяние энергии при колебаниях вращающихся лопаток, соединенных различными по конструкции связями, определялось по ширине резонансного пика при медленном изменении частоты вращения турбины Испытания проводились в вакуумной камере по методике, описанной в п XVI 4

Декремент δ вычислялся по формуле [28]

$$\delta = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\Delta n}{n} \left(1 - \frac{B}{k^2}\right), \quad (\text{XVI } 32)$$

где n , Δn — соответственно резонансная частота вращения и разность частот вращения, соответствующих половинным амплитудам до и после прохождения резонанса, B — коэффициент, учитывающий повышение собственных частот в поле центробежных сил ($f_{\text{дин}}^2 = f_{\text{ст}}^2 + Bn^2$), k — кратность колебаний

В формуле (XVI 32) $B/k^2 < 1$, при $B/k^2 > 1$ резонанс с k -й кратностью не будет иметь места ни при каких частотах вращения турбины, так как динамическая частота лопатки в поле центробежных сил будет возрастать быстрее, чем частота возмущающей силы с кратностью k

При выводе формулы (XVI 32) предполагается, что декремент не зависит от уровня динамических напряжений, однако в работе [133] показано, что при линейной или квадратичной зависимости декремента от напряжений числовой коэффициент в формуле (XVI 32) следует изменить всего на 8—13%

Для лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, определенную погрешность при вычислении декремента может внести наличие двух близких собственных частот с одинаковыми числами узловых диаметров Одновременное возбуждение двух близких собственных частот может в определенной мере исказить вид резонансных кривых, однако при существенном различии в декрементах для различных конструкций связей влияние подобной погрешности оказывается сравнительно небольшим Кроме того,

Таблица XVI.1

D_{cp}/l	Номер собственной формы	n , об/мин	$f_{дин}$, Гц	k	σ_{max} , МПа	δ
2,58	I	1410	47	2	82	0,0143
		750	37,5	3	55	0,0290
	II	1980	99	3	18	0,0100
		930	77,5	5	29	0,0093
		630	73,5	7	36	0,0148
	III	2500	167	4	48	0,0096
		1920	160	5	32	0,0096
		910	152	10	33	0,0123
		450	150	20	29	0,0217
	IV	1270	170	8	25	0,0172
		990	165	10	32	0,0150
		820	164	12	34	0,0168
4,27	I	2870	384	8	18,5	0,0027
		1660	362	13	17,5	0,0049
		980	343	21	25	0,0036
	II	2760	230	5	44	0,0059
		1900	223	7	41	0,0056
		1450	218	9	25	0,0071
		2900	435	9	15,5	0,0044
		2360	433	11	21	0,0043
		1840	429	14	18,5	0,0042
		1490	422	17	10,5	0,0062
	IV	2330	853	22	27	0,0023
		2050	853	25	23,5	0,0026

ниже (в табл. XVI.1—XVI.3) приведены средние арифметические значения декрементов, полученные на основании испытаний нескольких лопаток, что уменьшает относительную величину возможной погрешности и делает более наглядным проводимое сопоставление.

В табл. XVI.1 и на рис. II.36 и II.37 приведены средние арифметические значения декрементов и их зависимость от частоты вращения для отдельных лопаток с $D_{cp}/l = 2,58$ (лопатка с вильчатым хвостом, материал — нержавеющая сталь) и $D_{cp}/l = 4,27$ (лопатка с елочным хвостом, материал — сплав на никелевой

основе). В таблице указаны также резонансные частоты вращения (приведены средние значения для нескольких обследованных лопаток), динамические частоты, кратности колебаний и максимальные динамические напряжения для каждой из кратностей [28, 32].

Уровень динамических напряжений при испытаниях был относительно невысок, однако следует иметь в виду, что допустимый уровень динамических напряжений в лопатках в условиях эксплуатации с учетом асимметрии цикла, упрочнения входных кромок, наличия концентраторов, эрозии и других факторов может быть в несколько раз ниже предела выносливости стандартных круглых образцов при симметричном цикле. В связи с этим наибольший практический интерес представляет определение декремента именно при сравнительно невысоком уровне динамических напряжений, имевшем место при испытаниях и значительно превосходившем уровень напряжений в лопатках с $D_{cp}/l = 2,58$ под нагрузкой [147].

Как следует из табл. XVI.1 и рис. II.36 и II.37, значения декрементов оказались весьма небольшими, что указывает на малую демпфирующую способность хвостового соединения и относительно малое рассеяние в материале лопатки. Последнее обстоятельство объясняется не только низким уровнем динамических напряжений, но и неравномерностью распределения напряжений по сечению и высоте лопатки, из-за которого зоны с относительно большими напряжениями занимают весьма малую часть объема пера лопатки (см. п. XIII.8). Для лопатки с $D_{cp}/l = 2,58$ определенное увеличение декремента наблюдается только при весьма низкой частоте вращения ($n < 1000$ об/мин, табл. XVI.1).

Для обеих испытывавшихся ступеней наблюдается определенная тенденция к уменьшению декремента по мере усложнения собственной формы колебаний.

В табл. XVI.2 приведены результаты испытаний лопаток с $D_{cp}/l = 2,77$ и $D_{cp}/l = 2,82$, соединенных упругими связями [29]. В таблице указаны средние арифметические значения декрементов для различных групп форм внутрипакетных колебаний. В данном случае необходимо иметь в виду, что кратность колебаний совпадает с числом узловых диаметров соответствующей собственной формы внутрипакетных колебаний.

Сравнивая данные табл. XVI.1 и XVI.2 и учитывая, что среднее арифметическое значение декремента при I собственной частоте отдельных лопаток с $D_{cp}/l = 2,77$ составляет 0,0117 [29], легко найти, что соединение лопаток замкнутыми на круг упругими связями не приводит к существенному увеличению рассеяния энергии при колебаниях. Если для лопаток с арочными и фигурными бандажами, при колебаниях которых возможно проскальзывание на отдельных участках контактной зоны, еще наблюдается определенное возрастание декремента по сравнению с

Таблица XVI.2

Конструкция связи φ	D_{cp}/l	Номер группы форм внутрипла- кетных колебаний	n , об/мин	$f_{днн}$, Гц	k	σ_{max} , МПа	δ
Арочные бан- дажи	2,82	I	3020	101	2	65	0,0250
		II	2240	150	4	41	0,0073
Фигурные бан- дажи		I	2140	107	3	22	0,0281
			1890	126	4	24	0,0303
			1390	139	6	32,5	0,0180
		II	2170	145	4	60	0,0132
		1320	176	8	22	0,0192	
Заваренные на круг бандажные полки	2,77	I	3240	162	3	62	0,0081
			2180	146	4	40	0,0114
			1720	144	5	29	0,0161
			1450	145	6	42	0,0158
		II	2500	250	6	32	0,0079
			2070	242	7	10	0,0066

отдельными лопатками, то для лопаток с заваренными бандажными полками декремент остается практически неизменным.

В табл. XVI.3 приведены значения декрементов, полученные при испытаниях лопаток, соединенных различными по конструкции упругофрикционными связями [29, 31, 32]. Как следует из этой таблицы, декременты изменяются в весьма широких пределах в зависимости от конструкции соединяющих лопатки связей и группы собственных форм внутриса-кетных колебаний. Особенно большого рассеяния энергии можно добиться при дополнительном соединении бандажированных лопаток демпферными проволоками ($D_{cp}/l = 2,58$ и $D_{cp}/l = 2,77$) и при использовании Z-образных связей ($D_{cp}/l = 4,27$). Из сопоставления с данными табл. XVI.1 и XVI.2 следует, что рассеяние в зоне контакта лопаток и упругофрикционных связей является определяющим уже при весьма низком уровне динамических напряжений. Декременты при внутриса-кетных колебаниях лопаток с упругофрикционными связями, как правило, уменьшаются при возрастании частоты вращения и усложнении собственных форм (см. табл. XVI.3 и рис. II.38).

Результаты, приведенные в табл. XVI.3, становятся понятными, если учесть, что в зависимости от конструкции связей и

Таблица XVI.3

Конструкция связи	D_{cp}/l	Номер группы форм внутриса- кетных колебаний	n , об/мин	$f_{днн}$, Гц	k	σ_{max} , МПа	δ
Две демпфер- ные проволоки	2,58	I	2160	108	3	36	0,0115
			1550	103	4	16	0,0420
	2,77	I	2360	157	4	21	0,0158
			1850	154	5	18	0,0244
Бандажные полки	2,58	I	1850	92	3	51	0,0304
			1190	79	4	13,5	0,1270
		III	2690	269	6	10,5	0,0113
			2100	245	7	8,5	0,0212
			1715	229	8	7	0,0327
	2,77	IV	2630	307	7	23	0,0080
			2140	286	8	17	0,0100
		I	2170	144	4	37	0,0256
			1660	138	5	29	0,0372
			1350	135	6	16,5	0,0481
			1150	134	7	9	0,0720
Бандажные полки и две демп- ферные про- волоки	2,58	I	2100	105	3	10,5	0,1030
		II	2760	322	7	8	0,0310
			2320	309	8	4,5	0,0580
Бандажные полки и одна демферная про- волока	2,77	I	2340	156	4	10	0,0950
			1888	156	5	7	0,1180
			1520	152	6	4,5	0,1390
	3,47 *	I	2830	141	3	24	0,0133
			1900	137	4	20	0,0209
			1490	124	5	18,5	0,0334
			1275	127	6	5,5	0,0521

* Вторая демпферная проволока расположена в пределах бандажных полок

Продолжение табл. XVI.3

Конструкция связи ?	$D_{ср}/l$	Номер группы форм внутри-пакетных колебаний	n , об/мин	$f_{дин}$, Гц	k	σ_{max} , МПа	δ
	3,47	I	3320 2230 1750 1430	166 149 146 143	3 4 5 6	12 13 12,5 8,5	0,0251 0,0306 0,0480 0,0745
Две демпферные проволоки и Z-образные связи	2,58	I	2140 1510	107 101	3 4	33,5 11	0,0219 0,0680
Z-образные связи	4,27	I	2920	292	6	5,5	0,0970
			3130 2620 1940	470 481 549	9 11 17	27 16,5 8	0,0107 0,0162 0,0406
		IV	3180 2970 2470	1535 1535 1525	29 31 37	16 18 11,5	0,0064 0,0057 0,0068

номера группы форм внутрипакетных колебаний резко изменяется уровень напряжений в лопатках, соответствующий началу проскальзывания по всей контактной поверхности. При этом, как показано в п. XIII.10, после начала проскальзывания энергия, рассеиваемая в контактной зоне, может резко возрасти при относительно малом изменении уровня динамических напряжений в лопатках.

При расчетном определении уровня динамических напряжений, соответствующего началу проскальзывания по всей зоне контакта, необходимо использовать граничные условия (XVI.1.8, а) (XVI.8, б) и (XVI.10) или упрощенные граничные условия (XVI.16), первоначально считая, что проскальзывание в зоне контакта отсутствует. Из расчета собственных форм могут быть найдены соотношения между динамическими напряжениями в лопатке и реакциями, действующими на лопатку от связей, а также силами и моментами, действующими в поперечном сечении связей. Сравнивая эти величины со статическими усилиями, действующими по контактным поверхностям (например, из-за раскрутки бандажированных лопаток, центробежных сил демпферных проволок и т. п.), можно определить, какая из реакций связей (например, M_x^c , M_z^c , Q_y^c) достигнет предельного значения при наименьших динамических напряжениях в лопатках [26, 31]

Расчеты показывают, что при I группе форм внутрипакетных колебаний бандажированных лопаток или лопаток, соединенных демпферными проволоками, проскальзывание, как правило, определяется величиной Q_y^c ; при преимущественно крутильных колебаниях лопаток с демпферными проволоками — величиной M_z^c и т. д. В связи с этим становится понятным значительное увеличение рассеяния энергии при колебаниях бандажированных лопаток с $D_{ср}/l = 2,58$, дополнительно соединенных демпферными проволоками, по сравнению с лопатками, соединенными только с помощью демпферных проволок. Причина заключается в том, что усилие, возникающее по контактным поверхностям бандажных полок из-за раскрутки лопаток, оказывается в несколько раз меньше центробежной силы шага демпферной проволоки. Поэтому расчетный уровень динамических напряжений при I группе форм внутрипакетных колебаний с тремя узловыми диаметрами, соответствующий проскальзыванию по всей контактной поверхности, для лопаток, соединенных двумя демпферными проволоками, оказался в 6,3 раза выше, чем для бандажированных лопаток с одной демпферной проволокой. Экспериментальные данные, приведенные в табл. XVI.3, подтверждают результаты расчетов: при колебаниях с тремя узловыми диаметрами декремент для лопаток с двумя демпферными проволоками оказался в девять раз меньше, чем для бандажированных лопаток с двумя проволоками, несмотря на то что уровень динамических напряжений в бандажированных лопатках был в 3,5 раза ниже.

Так как при I группе форм внутрипакетных колебаний проскальзывание определяется, как правило, достижением предельного значения реакцией Q_y^c , то все конструктивные мероприятия, способствующие относительно увеличению Q_y^c , будут приводить к возрастанию демпфирования.

Так как максимальное усилие, действующее, например, в поперечном сечении демпферной проволоки, пропорционально центробежной силе сегмента проволоки [31], то уменьшение длины сегмента, центробежной силы шага проволоки или коэффициента трения в зоне контакта могут привести к увеличению рассеяния энергии при одинаковых динамических напряжениях в лопатках. С другой стороны, установка одной жесткой связи вблизи узла, соответствующего собственной форме колебаний отдельной лопатки, может существенно уменьшить относительное значение Q_y^c (см. п. XI.11) и, следовательно, привести к уменьшению конструкционного демпфирования. Этим объясняется, что в табл. XVI.3 декремент при колебаниях с тремя узловыми диаметрами бандажированных лопаток с $D_{ср}/l = 2,58$ уменьшился более чем в три раза по сравнению с декрементом при колебаниях этих же лопаток, дополнительно соединенных двумя демпферными проволоками.

Снижением уровня напряжений в лопатках, соответствующего началу проскальзывания по всей контактной поверхности, объясняется отмеченное в табл. XVI.3 возрастание декремента после удаления демпферных проволок из пределов бандажных полок лопаток с $D_{cp}/l = 3,47$ (одновременно была уменьшена масса бандажных полок). Действительно, при отсутствии проволок в бандажных полках для начала проскальзывания необходимо преодолеть только усилия, вызванные раскруткой лопаток, а при установке проволок — еще и их центробежную силу. Ясно, что сама по себе установка демпферных связей в пределах полок (см. рис. XVI.1, 2) вызвана в данном случае не стремлением к увеличению демпфирования, а желанием обеспечить гарантированный контакт всех лопаток на колесе друг с другом.

Таблица XVI.4

Номер собственной формы	$D_{cp}/l = 2,58$		$D_{cp} l = 4,27$	
	$\sigma_{отн}$	$f_{отн}$	$\sigma_{отн}$	$f_{отн}$
I	1	1	1	1
II	0,44	0,66	0,45	0,53
III	0,58	0,28	0,32	0,31
IV	0,44	0,27	0,53	0,27
V	0,10	0,16	0,16	0,18
VI	0,48	0,125	0,25	0,15

Возможность значительного рассеяния энергии при некоторых формах внутрисапакетных колебаний лопаток с упругофрикционными связями приводит к тому, что при возбуждении возмущающими силами с равными амплитудами уровень напряжений при более сложных собственных формах может оказаться даже выше, чем при низших формах внутрисапакетных колебаний. В п. XIII.8 было показано, что при возбуждении сосредоточенной на вершине силой различных собственных форм консольной лопатки постоянного сечения динамические напряжения изменяются обратно пропорционально частоте колебаний, причем этот вывод был получен при условии, что декремент не зависит от уровня напряжений и собственной формы. Из табл. XVI.1 следует, что для закрученных лопаток переменного сечения эти предположения не вполне справедливы, однако приведенные ниже экспериментальные результаты подтверждают тот факт, что уровень динамических напряжений в отдельных лопатках, как правило, падает с усложнением собственной формы.

В табл. XVI.4 приведены результаты испытаний в вакуумной камере отдельных вращающихся лопаток. Возбуждение колебаний осуществлялось сосредоточенной силой — струей пара, подводимой вблизи вершин лопаток. В таблице указаны относительные динамические напряжения $\sigma_{отн} = \sigma_i/\sigma_1$, где σ_i и σ_1 — максимальные динамические напряжения при i -й и I собственной частоте, и относительные частоты $f_{отн} = f_i/f_1$, где f_1 и f_i — I и i -я собственные частоты, причем используются значения частот при колебаниях с теми кратностями, при которых достигается максимальный уровень для каждой из форм.

Как следует из табл. XVI.4, величины $\sigma_{отн}$ и $f_{отн}$ изменяются более или менее пропорционально, хотя напряжения при высших собственных формах в ряде случаев уменьшаются несколько медленнее, чем их частоты. Это подтверждает приведенные в табл. XVI.1 данные, свидетельствующие о том, что в большинстве случаев декременты при высших собственных формах несколько уменьшаются.

Качественно другая картина может иметь место, если сравнивать уровень напряжений при различных группах форм внутрисапакетных колебаний лопаток с упругофрикционными связями. Особенно большие различия в величинах $\sigma_{отн}$ и $f_{отн}$ могут возникнуть для тех конструкций связей, которые обеспечивают наибольшее демпфирование при I группе форм внутрисапакетных колебаний. Так как декременты при различных группах форм могут отличаться более чем в 10 раз (см. рис. II.38), то в некоторых случаях возможно возрастание уровня динамических напряжений при усложнении собственных форм.

В табл. XVI.5 приведено сравнение величин $\sigma_{отн}$ и $f_{отн}$ для различных групп форм внутрисапакетных колебаний лопаток, соединенных упругофрикционными связями (под $f_{отн}$ в таблице понимается отношение частот с теми числами узловых диаметров, при которых для каждой из групп форм динамические напряжения достигают максимума).

Из табл. XVI.5 следует, что пропорциональное изменение величин $\sigma_{отн}$ и $f_{отн}$ приближенно имеет место только при колебаниях лопаток, соединенных двумя демпферными проволоками (из приведенных в табл. XVI.1 и XVI.3 данных видно, что в этом случае декремент при внутрисапакетных колебаниях с тремя узло-

Таблица XVI.5

Конструкция связи	D_{cp}/l	Номер группы собственных форм							
		I —		II		III		IV	
		$\sigma_{отн}$	$f_{отн}$	$\sigma_{отн}$	$f_{отн}$	$\sigma_{отн}$	$f_{отн}$	$\sigma_{отн}$	$f_{отн}$
Две демпферные проволоки	2,58	1	1	0,43	0,55	0,21	0,40	0,27	0,30
Бандажные полки и две демпферные проволоки	2,58	1	1	0,64	0,33	0,60	0,28	0,40	0,22
Бандажные полки и одна демпферная проволока	2,58	1	1	1,20	0,44	0,63	0,32	0,67	0,23
Z-образные связи	4,27	1	1	5,50	0,63	0,80	0,63	3,20	0,19

выми диаметрами близок к декременту при колебаниях отдельных лопаток). С другой стороны, для бандажированных лопаток с демпферными проволоками и особенно для лопаток с Z-образными связями, у которых декремент при I группе форм внутрипакетных колебаний достигает 0,1, отношение $\sigma_{\text{отн}}/f_{\text{отн}}$ может доходить до 5—10. Это указывает на резкое снижение возбудимости I группы форм внутрипакетных колебаний, вызванное значительным увеличением рассеяния энергии в зоне контакта лопаток и упругофрикционных связей.

В целом результаты, приведенные в настоящем параграфе, указывают на возможность значительного увеличения рассеяния энергии при внутрипакетных колебаниях в случае рационального выбора конструкции соединяющих лопатки упругофрикционных связей.

XVI.6. ОСОБЕННОСТИ ВНУТРИПАКЕТНЫХ КОЛЕБАНИЙ, ВЫЗВАННЫЕ РАЗБРОСОМ В ПАРЦИАЛЬНЫХ ЧАСТОТАХ ЛОПАТОК

В п. XIII.7 были рассмотрены некоторые особенности вынужденных колебаний лопаток с замкнутыми на круг связями при наличии разброса в парциальных частотах лопаток, составляющих комплект. Было показано, что при колебаниях лопаток с одной и той же кратностью возникают один или два основных резонанса, соответствующие формам внутрипакетных колебаний, для которых $k = m$, и несколько побочных резонансов со значительно меньшим уровнем напряжений, причем относительная величина побочных резонансов зависит не только от разброса в парциальных частотах лопаток, но и от конструкции и места расположения соединяющих лопатки связей.

В настоящем параграфе особенности колебаний, вызванные разбросом в парциальных частотах закрученных лопаток переменного сечения, соединенных замкнутыми на круг связями, будут рассмотрены несколько подробнее, так как указанные особенности могут затруднить классификацию и правильное истолкование опытных данных.

Возникновение основных и побочных резонансов при внутрипакетных колебаниях лопаток. На рис. XVI.18 приведены типичные резонансные кривые, полученные при испытаниях лопаток с $D_{\text{ср}}/l = 2,83$, соединенных двумя демпферными проволоками. Все колебания происходят с одной и той же кратностью ($k = 5$) и соответствуют I группе форм внутрипакетных колебаний.

Как видно, неподвижная в пространстве сила возбуждает колебания как с числом узловых диаметров, совпадающим с кратностью колебаний (основной резонанс при $n = 2020$ об/мин), так и с другими числами узловых диаметров (побочные резонансы при $n = 2075$ об/мин; $n = 2110$ об/мин и т. д.). Как отмечалось в п. XVI.4, непосредственная запись резонансных кривых была получена с помощью детектирования сигналов тензорезисторов

и последующей записи выпрямленных сигналов на шлейфный осциллограф с малой скоростью протяжки ленты. На рис. XVI.18 указана также линия изменения частоты вращения 1, ординаты которой пропорциональны частоте вращения исследуемого облопаченного диска, и линия нулевых напряжений 2.

Относительные величины побочных резонансов, как указывалось в п. XIII.7, могут существенно возрасти как при соединении лопаток жесткими связями, расположенными вблизи узла

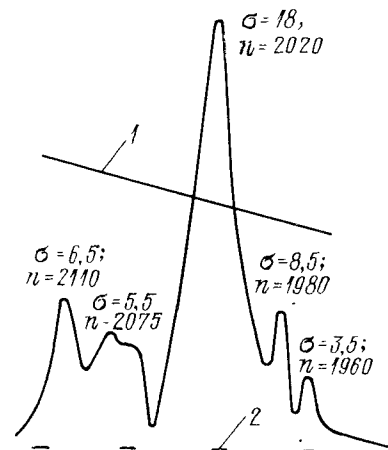


Рис. XVI.18. Резонансные кривые, полученные при испытаниях лопаток ($D_{\text{ср}}/l = 2,83$), соединенных двумя демпферными проволоками (σ — в МПа; n — в об/мин)

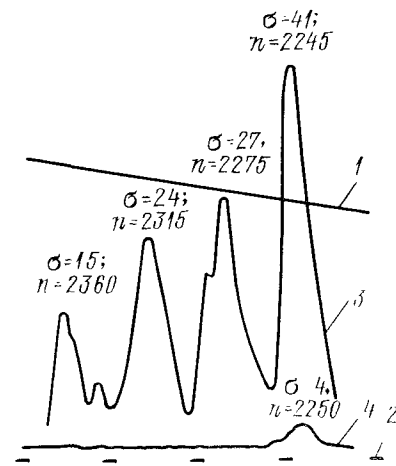


Рис. XVI.19. Результаты испытаний лопаток ($D_{\text{ср}}/l = 2,82$), соединенных арочными бандажными (σ — в МПа; n — в об/мин):

1 — линия изменения частоты вращения; 2 — линия нулевых напряжений; 3, 4 — уровни напряжений соответственно при подаче пара на возбуждение и после прекращения подачи пара

одной из собственных форм отдельных лопаток [24], так и при соединении лопаток слишком податливыми связями. На рис. XVI.19 изображены результаты испытаний лопаток с $D_{\text{ср}}/l = 2,82$, соединенных «податливыми» арочными бандажными. Все колебания происходят с одной и той же кратностью ($k = 4$) и соответствуют II группе форм внутрипакетных колебаний. Как видно, относительная величина побочных резонансов в данном случае оказалась значительно больше, чем на рис. XVI.18.

На рис. XVI.19 указано также изменение уровня динамических напряжений при подаче и после прекращения подачи пара на возбуждение. Из приведенных данных следует, что и основной ($n = 2245$ об/мин), и побочные ($n = 2275$ об/мин, $n = 2315$ об/мин и т. д.) резонансы возбуждаются именно сосредоточенной в пространстве силой, т. е. появление побочных резонансов не связано с какими-либо специфическими особенностями действующих на лопатки возмущающих сил.

Возникновение двух близких собственных частот с одинаковыми числами узловых диаметров. Неодновременность вступления в резонанс лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями.

На рис. XVI.20 приведены результаты испытаний лопаток с $D_{cp}/l = 2,77$, соединенных демпферными проволоками и заваренными на круг бандажными полками. Как видно, форма кривой при основном резонансе свидетельствует о наличии двух близких собственных частот — двух собственных форм с четырьмя узловыми диаметрами (колебания происходят с кратностью $k = 4$ и соответствуют I группе форм внутрипакетных колебаний). Возбуж-

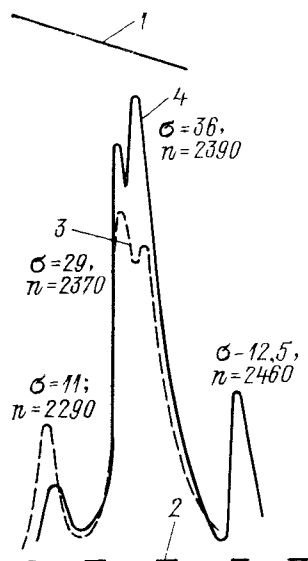


Рис XVI 20 Результаты испытаний лопаток ($D_{cp}/l = 2,77$), соединенных демпферными проволоками и заваренными на круг бандажными полками (σ — в МПа, n — в об/мин)

1 — линия изменения частоты вращения 2 — линия нулевых напряжений 3, 4 — уровни напряжений соответственно в лопатках № 29 и № 59

дение обеих собственных форм объясняется тем, что места расположения лопаток по окружности колеса не совпадают с узловыми диаметрами ни при одной из двух резонирующих собственных форм. В противном случае, а также при меньшей разнице в собственных частотах, соответствующих этим формам, или большем декременте резонансные кривые имели бы один максимум, но частоты вращения, соответствующие максимальным напряжениям, для разных лопаток могли бы немного отличаться.

На рис XVI 21 приведены результаты испытаний лопаток с $D_{cp}/l = 3,36$, соединенных бандажными полками с расположен-

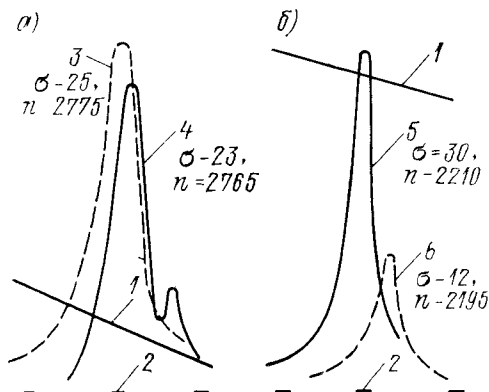


Рис XVI 21. Неодновременность вступления в резонанс лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями (σ — в МПа, n — в об/мин)
а — $D_{cp}/l = 3,36$, б — $D_{cp}/l = 2,58$.

1 — линия изменения частоты вращения, 2 — линия нулевых напряжений 3, 4, 5 — уровни напряжений соответственно в лопатках № 78, № 86 и № 71, 6 — уровень напряжений в нижней демпферной проволоке, расположенной вблизи лопатки № 71

ными в них демпферными проволоками, и лопаток с $D_{cp}/l = 2,58$, соединенных тремя демпферными проволоками. Колебания в обоих случаях происходили с $k = 3$ и соответствовали I группе внутрипакетных колебаний.

Как видно, возможно несколько неодновременное вступление в резонанс различных лопаток и даже лопаток и демпферных проволок, соединенных с данной лопаткой. Экспериментальные результаты, приведенные на рис XVI.21, б, объясняются тем, что при внутрипакетных колебаниях демпферные проволоки испытывают главным образом динамические напряжения растяжения—сжатия, которые, как было показано в п. XI 11, достигают максимума вблизи лопаток, находящихся в узлах. Оказалось, что максимальные динамические напряжения изгиба в лопатке № 71 достигались при той из двух собственных форм с тремя узловыми диаметрами, которая имеет несколько более высокую собственную частоту, а максимальные динамические напряжения растяжения—сжатия в демпферной проволоке — при другой собственной форме с тремя узловыми диаметрами, при которой исследуемая лопатка находилась вблизи узла. Различия в частотах внутрипакетных колебаний, о которых свидетельствуют приведенные на рис. XVI.21 данные, хотя и вызваны разбросом в парциальных частотах отдельных лопаток, но не связаны с ними непосредственно: лопатка, имеющая несколько более высокую частоту внутрипакетных колебаний на одной кратности, может иметь более низкую частоту на другой кратности или более низкую парциальную частоту.

Результаты, приведенные в настоящем параграфе, следует учитывать при анализе экспериментальных данных, поскольку технологические отклонения при изготовлении и сборке лопаток и связей практически всегда имеют место.

XVI.7. ВЛИЯНИЕ КОНСТРУКЦИИ СВЯЗЕЙ НА НАДЕЖНОСТЬ РАБОТЫ ЛОПАТОЧНОГО АППАРАТА

Экспериментальные и расчетные данные настоящей главы позволяют сформулировать некоторые выводы о влиянии конструкции соединяющих лопатки связей на надежность работы лопаточного аппарата стационарных турбин. Основные достоинства и недостатки рассмотрим на примере замкнутых на круг связей, так как они получили наиболее широкое распространение в последних ступенях цилиндров низкого давления мощных отечественных паровых турбин.

Основные преимущества замкнутых на круг связей заключаются в следующем.

1. Легкость осуществления вибрационной настройки. Выше было теоретически и экспериментально показано, что при возбуждении неравномерностью потока по окружности колеса лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, резко умень-

Рис. XVI.22. Результаты испытаний лопаток ($D_{ср}/l = 2,75$), соединенных различным числом демпферных проволок (цифры I—III означают номер группы форм внутрисаплетных колебаний): × — одна верхняя проволока, ○ — две проволоки; △ — три проволоки

Аналогичный вывод следует и из рассмотрения экспериментальных и расчетных результатов, приведенных на рис. XVI.6, XVI.10, XVI.11. Для более коротких и жестких лопаток влияние связей на частоты внутриапакетных («аксиальных») колебаний оказывается значительно менее существенным, однако во многих случаях отстройка может быть все же обеспечена только за счет

Помимо резкого уменьшения числа подлежащих отстройке собственных форм существенно облегчается сам процесс отстройки, поскольку частоты внутрипакетных колебаний значительно сильнее зависят от конструкции, числа и места расположения связей, чем частоты синфазных колебаний.

На рис. XVI.22 приведены результаты испытаний лопаток с $D_{\text{ср}}/l = 2,75$, соединенных различным числом демпферных проволок [24]. Как видно,

Необходимо также учесть, что неизбежный на практике разброс парциальных частот лопаток в большей мере затрудняет отстройку отдельных лопаток без связей, чем лопаток с замкнутыми на круг связями: в последнем случае разброс может привести только к появлению вблизи рабочей частоты вращения побочных резонансов, относительная опасность которых может быть уменьшена за счет рационального выбора конструкции соединяющих лопатки связей (см. п. XVI.6).

2 Возможность снижения с помощью замкнутых на круг связей уровня динамических напряжений в лопатках на рабочей и проходной частотах вращения. Снижение уровня напряжений объясняется уменьшением возбудимости внутрипакетных колебаний по сравнению с колебаниями отдельных лопаток, а в ряде случаев — и существенным увеличением конструкционного демпфирования. В табл. XVI.4 было показано, что при возбуждении различных собственных частот отдельных лопаток сосредоточенной силой, приложенной у вершин лопаток, уровень динамических напряжений изменяется приблизительно обратно пропорционально собственной частоте. Примерно в таком же отношении уменьшается уровень динамических напряжений при внутрипакетных колебаниях лопаток, соединенных упругими или упруго-фрикционными связями в случае отсутствия проскальзывания по всей контактной поверхности. Таким образом, даже в том случае, когда конструкционное демпфирование возрастает незначительно, повышение, например, в два раза частот I группы форм внутрипакетных колебаний по сравнению с I частотой отдельных лопаток приведет примерно к такому же снижению уровня напряжений (фактически снижение будет даже больше из-за значительного разброса в динамических напряжениях в отдельных лопатках). В условиях эксплуатации амплитуды возмущающих сил с частотами kn , как правило, уменьшаются с ростом частоты, в связи с чем уровень напряжений при внутрипакетных колебаниях будет дополнительно снижаться по сравнению с уровнем напряжений при колебаниях отдельных лопаток. Значительное снижение уровня динамических напряжений при внутрипакетных колебаниях может быть достигнуто при использовании упруго-фрикционных связей, обеспечивающих проскальзывание по всей контактной поверхности при относительно невысоком уровне напряжений в лопатках (см. табл. XVI.3). Эту особенность упруго-фрикционных связей целесообразно использовать для уменьшения напряжений в лопатках при пуске, обеспечивая в то же время отстройку опасных собственных форм от рабочей частоты

вращения. В противном случае в условиях эксплуатации может иметь место постепенное истирание контактирующих поверхностей, приводящее в дальнейшем к возможности вибрационного разрушения лопаток.

Установка связей сопряжена и с *определенными трудностями*, заставляющими конструкторов в ряде случаев даже отказываться от их использования. Например, для наиболее длинных лопаток последних ступеней ЦНД установка демпферных проволок в периферийных сечениях может оказаться невозможной как из-за чрезмерного роста статических напряжений в проволоках, так и из-за увеличения статических напряжений и напряжений парового изгиба в лопатках. Меньшие трудности возникают при обеспечении статической прочности бандажированных лопаток, поскольку угол между хордой периферийного сечения лопаток последних ступеней ЦНД и плоскостью вращения сравнительно мал; в связи с этим статические напряжения в бандажных полках оказываются значительно меньшими, чем в демпферных проволоках, что позволяет изготавливать бандажированными даже наиболее длинные из применяемых в настоящее время лопаток.

При окончательном выборе конструкции соединяющих лопатки связей необходимо учитывать максимальные технологические отклонения, которые могут возникнуть при изготовлении и сборке лопаток и связей и помешать их нормальной работе. Естественно, что из двух конструкций связей, обеспечивающих удовлетворительные вибрационные характеристики, предпочтения заслуживает конструкция, менее чувствительная к технологическим отклонениям.

Из всего сказанного следует, что применение рациональной конструкции замкнутых на круг связей обеспечивает, как правило, значительное повышение надежности работы лопаточного аппарата турбин.

Глава XVII

КОЛЕБАНИЯ ДИСКОВ

ХVII.1. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В п. II.11 отмечалось, что наибольшее практическое значение имеют изгибные колебания дисков турбин, изучением особенностей которых и будет ограничено содержание настоящей главы.

Схематически диск изображен на рис. XVII 1, там же указаны используемые системы координат

Будем считать, что толщина диска h мала по сравнению с наружным радиусом r_a . Это предположение дает возможность рассматривать диск как тонкую пластину и использовать теорию,

разработанную для описания колебаний подобных пластин. Будем также считать, что плоскость yOz — срединная плоскость диска — является плоскостью симметрии.

В связи с относительно малой толщиной диска считаем справедливыми гипотезы Кирхгофа, заключающиеся в следующем

1 Нормали, перпендикулярные к срединной плоскости до деформации, остаются нормальными и к деформированной срединной плоскости. Эта гипотеза, аналогичная гипотезе плоских сечений при изучении изгибных колебаний лопаток, позволяет пренебречь влиянием сдвига и инерции вращения и связать перемещение произвольной точки диска с перемещениями точек срединной плоскости.

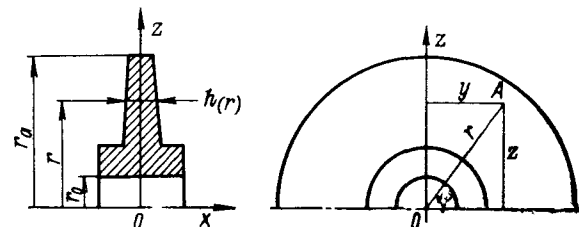


Рис. XVII 1 Схематическое изображение диска и используемые системы координат

2 Нормальные напряжения σ_x , действующие по площадкам, параллельным срединной плоскости, считаются малыми по сравнению с напряжениями σ_r и σ_θ .

Использование гипотез Кирхгофа обеспечивает достаточную точность при условии, что выполняется соотношение $h/r_a < 0,2$. Указанное условие не удовлетворяется для дисков последних ступеней ЦНД мощных паровых турбин, однако в п. II.11 отмечалось, что относительное влияние собственно диска на частоты совместных колебаний дисков и лопаток указанных ступеней весьма мало. Это обстоятельство оправдывает в большинстве случаев применение теории тонких пластин при определении частот колебаний облопаченных дисков. Учет влияния сдвига и инерции вращения на собственные частоты колебаний дисков выполнен, например, в работе [44]

При рассмотрении свободных колебаний дисков будем пренебрегать силами сопротивления. Первоначально не будем также учитывать влияния центробежных сил и усилий, возникающих из-за неравномерного нагрева диска, на его собственные частоты.

Для того чтобы получить дифференциальное уравнение изгибных колебаний диска, предварительно установим связь между нагрузкой, действующей на тонкую пластину перпендикулярно

к ее срединной плоскости, и вызванными этой нагрузкой перемещениями различных точек пластины [9].

С учетом принятых выше предположений точки срединной плоскости получают перемещения $u(y, z)$ в направлении оси x , а элемент, нормальный к срединной плоскости в недеформированном состоянии, составит с осью x углы θ_y и θ_z (соответственно в плоскостях xOy и xOz).

На основании гипотезы Кирхгофа углы поворота нормали равны углам поворота координатных линий $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$ на срединной плоскости:

$$\theta_y = \partial u / \partial y; \quad \theta_z = \partial u / \partial z. \quad (\text{XVII.1})$$

Рассмотрим перемещение точки A , лежащей на расстоянии x от срединной плоскости и переходящей после деформации

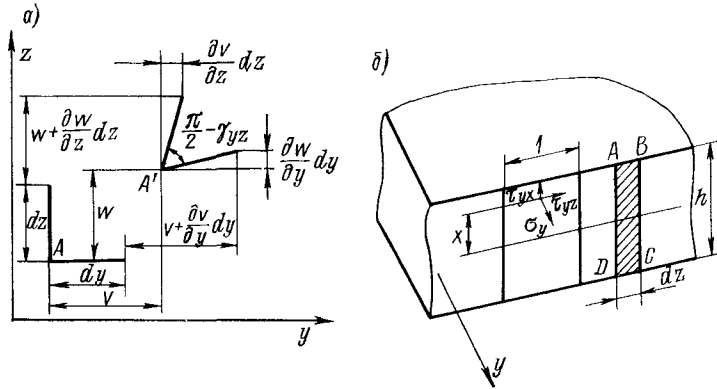


Рис. XVII.2. Деформации и перемещения при изгибе пластины (диска)

в точку A' (рис. XVII.2). Эта точка кроме перемещения $u(y, z)$ получит также перемещения v и w вдоль осей y и z :

$$v = -\theta_y x; \quad w = -\theta_z x. \quad (\text{XVII.2})$$

Используя формулы (XVII.1) и (XVII.2), найдем деформации ϵ_y и ϵ_z и угол сдвига γ_{yz} в точке A (рис. XVII.2, а)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{v + (\partial v / \partial y) dy - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} x; \\ \epsilon_z &= \frac{w + (\partial w / \partial z) dz - w}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} x; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} x. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVII.3})$$

Учитывая, что $\sigma_x \ll \sigma_y, \sigma_z$, найдем напряжения в слое с координатой x :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_z) = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) x; \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_z + \nu \epsilon_y) = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) x; \\ \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} = -\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} x, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVII.4})$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим участок сечения пластины плоскостью $y = \text{const}$ (рис. XVII.2, б). Действующие на участке единичной ширины напряжения эквивалентны изгибающему моменту M_y , крутящему моменту M_{yz} и поперечной силе Q_y :

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y x dx; \quad M_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} x dx; \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dx \quad (\text{XVII.5})$$

Следует иметь в виду, что формулы (XVII.5) определяют интенсивность моментов и сил, т. е. моменты и силы, отнесенные к единичной длине. Аналогично в сечении пластины плоскостью, параллельной оси z , возникнут моменты и сила:

$$M_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z x dx; \quad M_{zy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} x dx; \quad Q_z = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dx. \quad (\text{XVII.6})$$

Подставляя в формулы (XVII.5) и (XVII.6) выражения (XVII.4), получим:

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \quad M_z = -D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ M_{yz} &= M_{zy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVII.7})$$

где $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластины.

Рассмотрим условия равновесия элемента пластины $hdydz$ (рис. XVII.3), где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Q'_y &= Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy; \quad Q'_z = Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} dz; \quad M'_y = M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy; \\ M'_{yz} &= M_{yz} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial y} dy; \quad M'_z = M_z + \frac{\partial M_z}{\partial z} dz; \quad M'_{zy} = M_{zy} + \frac{\partial M_{zy}}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия сил и моментов, действующих на выделенный элемент, примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} + q &= 0; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial z} - Q_y = 0; \\ \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{\partial M_{zy}}{\partial z} - Q_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVII.8})$$

где q — интенсивность поперечной нагрузки на единицу площади выделенного элемента.

Исключая из уравнений (XVII.8) поперечные силы и учитывая, что $M_{yz} = M_{zy}$, получим

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} + q = 0. \quad (\text{XVII.9})$$

Так как M_y , M_{yz} и M_z выражаются через u в соответствии с формулами (XVII.7), то уравнение (XVII.9) представляет собой уравнение в частных производных четвертого порядка относительно функции $u(z, y)$. Наиболее простой вид уравнение (XVII.9)

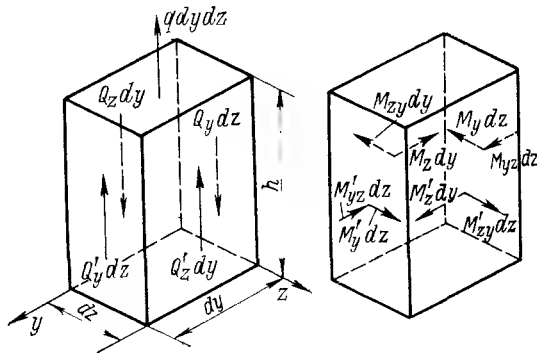


Рис. XVII.3. Условия равновесия элемента пластины (диска) в декартовых координатах

имеет для пластины постоянной толщины. В этом случае из (XVII.7) и (XVII.9) получаем

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = \frac{q}{D}, \quad (\text{XVII.10})$$

или

$$\Delta \Delta u = q/D, \quad (\text{XVII.10a})$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Определенное решение уравнения (XVII.10) можно получить, если использовать граничные условия. При решении краевой задачи, описываемой уравнением (XVII.10), на контуре должны быть заданы два граничных условия.

Если при $y = \text{const}$ край пластины жестко заделан, то граничные условия имеют вид: $u = 0$ и $du/dy = 0$; если край шарнирно оперт, то $u = 0$ и $M_y = 0$.

Более сложными являются граничные условия на свободном краю. Наиболее естественно в этом случае принять $M_y = M_{yz} = Q_y = 0$, однако на свободном краю можно удовлетворить только двум граничным условиям.

Кажущееся противоречие объясняется использованием гипотезы Кирхгофа о сохранении прямых нормалей при деформации пластины [9]. Элемент $ABCD$, изображенный на рис. XVII.2, при деформации пластины поворачивается как жесткий диск на угол du/dz , поэтому приложенный к нему крутящий момент $M_{yz} dz$ может быть заменен парой сил величиной M_{yz} каждая. На соседний элемент действует момент $[M_{yz} + (\partial M_{yz}/\partial z) dz] dz$. Заменяя его также парой сил, найдем, что на границе участков приложена неуравновешенная сила, равная $(\partial M_{yz}/\partial z) dz$. Так как на выделенный элемент действует и поперечная сила $Q_y dz$, то

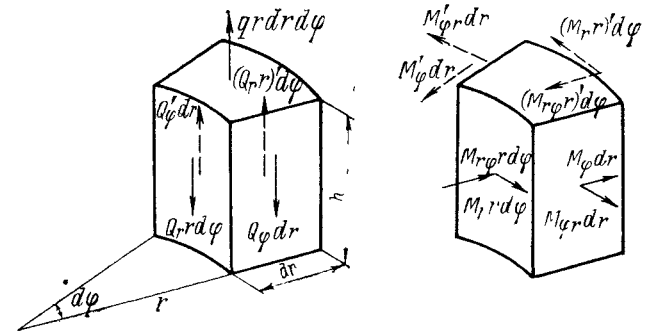


Рис. XVII.4. Условия равновесия элемента диска в полярных координатах

крутящий момент и перерезывающая сила на границе не являются независимыми. Таким образом, на свободном краю должны выполняться следующие два условия:

$$M_y = 0; \quad Q_y + \partial M_{yz}/\partial z = 0.$$

Для диска граничные условия задаются при $r = r_0$ и $r = r_a$ (см. рис. XVII.1), и естественно, что задачу об изгибе и колебаниях диска удобнее рассматривать в полярных координатах. Введя вместо координат y, z координаты r и ϕ (см. рис. XVII.1), рассмотрим уравнения равновесия элемента диска $hrdrd\phi$ в полярных координатах (рис. XVII.4).

На рис. XVII.4 приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (Q_r)' &= Q_r + \frac{\partial (Q_r r)}{\partial r} dr; & Q_\phi' &= Q_\phi + \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} d\phi; \\ (M_r)' &= M_r + \frac{\partial (M_r r)}{\partial r} dr; & M_\phi' &= M_\phi + \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} d\phi; \\ (M_{r\phi})' &= M_{r\phi} + \frac{\partial (M_{r\phi} r)}{\partial r} dr; & M_{\phi r}' &= M_{\phi r} + \frac{\partial M_{\phi r}}{\partial \phi} d\phi. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия сил, действующих на элемент диска, и моментов относительно оси симметрии элемента и нормали

к ней примут следующий вид (при выводе уравнений учтено, что $M_{r\varphi} = M_{\varphi r}$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial (Q_r r)}{\partial r} + \frac{\partial Q_\varphi}{r \partial \varphi} + q &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (M_{r\varphi} r)}{\partial r} + \frac{\partial M_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{1}{r} M_{,\varphi} - Q_\varphi &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (M_r r)}{\partial r} - \frac{1}{r} M_\varphi + \frac{\partial M_{r\varphi}}{r \partial \varphi} - Q_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVII.11})$$

По аналогии с формулой (XVII.7) уравнения, связывающие изгибающие моменты M_r и M_φ и крутящий момент $M_{,\varphi}$ с перемещением $u(r, \varphi)$, можно записать в виде [9]

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]; \\ M_\varphi &= -D \left(\frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right); \\ M_{,\varphi} &= -D(1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{r \partial \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVII.12})$$

Если диск (см. рис. XVII.1) жестко заделан на внутреннем контуре и свободен на наружном, то граничные условия, записанные в полярных координатах, примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= 0; \quad \partial u / \partial r = 0 \quad \text{при } r = r_0; \\ M_r &= 0; \quad Q_r + (1/r) \partial M_{r\varphi} / \partial \varphi = 0 \quad \text{при } r = r_a. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVII.13})$$

Дальнейшие преобразования проведем для диска постоянной толщины h . Подставив в уравнения (XVII.11) формулы (XVII.12), после преобразований получим

$$Q_r = -D \left(\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right), \quad (\text{XVII.14})$$

или

$$Q_r = D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta u), \quad (\text{XVII.14a})$$

где Δu — оператор Лапласа, записанный в полярных координатах:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \varphi^2}. \quad (\text{XVII.15})$$

Для поперечной силы Q_φ выполняется соотношение

$$Q_\varphi = -D \frac{\partial (\Delta u)}{r \partial \varphi}. \quad (\text{XVII.16})$$

Подставив выражения (XVII.14) и (XVII.16) в первое уравнение (XVII.11), найдем

$$-D \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial (\Delta u)}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{r \partial \varphi} \left[\frac{\partial (\Delta u)}{r \partial \varphi} \right] \right\} + q = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 (\Delta u)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\Delta u)}{\partial r} + \frac{\partial^2 (\Delta u)}{r^2 \partial \varphi^2} = \frac{q}{D}, \quad (\text{XVII.17})$$

т. е. получаем уравнение

$$\Delta \Delta u = q/D, \quad (\text{XVII.17a})$$

в точности совпадающее с уравнением (XVII.10a).

Если толщина диска зависит от радиуса, то вместо уравнения (XVII.17a) имеет место следующее уравнение [87]:

$$\Delta (D \Delta u) - (1 - \nu) \left[\frac{1}{r} \frac{dD}{dr} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{d^2 D}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) \right] = q. \quad (\text{XVII.18})$$

Наконец, если требуется учесть влияние центробежных сил и неравномерный нагрев диска, то вместо первого уравнения (XVII.11) будет иметь место равенство [20, 87].

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (Q_r r)}{\partial r} + \frac{\partial Q_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(N_r r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} N_\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + q = 0, \quad (\text{XVII.19})$$

где N_r , N_φ — интенсивность усилий, действующих в срединной плоскости диска, вызванных центробежными силами и неравномерным нагревом диска ($N_r = \sigma_r h$; $N_\varphi = \sigma_\varphi h$).

При рассмотрении колебаний диска поперечная нагрузка q вызвана силами инерции, т. е. $q = -(\gamma/g) h \partial^2 U / \partial t^2$, где $U(r, \varphi, t)$ — прогиб различных точек срединной плоскости, зависящий не только от координат r и φ , но и от времени. Так как при рассмотрении свободных колебаний пренебрегаем силами трения, то выражение для прогиба можно представить в виде

$$U(r, \varphi, t) = u(r, \varphi) \sin(pt + \alpha), \quad (\text{XVII.20})$$

где p — круговая частота колебаний диска; α — начальный фазовый угол.

С учетом выражения (XVII.20) дифференциальное уравнение, описывающее колебания диска постоянной толщины, примет следующий вид

$$\Delta \Delta u = k^4 u, \quad (\text{XVII.21})$$

где

$$k^4 = (\gamma h / g D) p^2, \quad (\text{XVII.22})$$

а дифференциальное уравнение колебаний диска переменной толщины окажется следующим:

$$\begin{aligned} \Delta (D \Delta u) - (1 - \nu) \left[\frac{1}{r} \frac{dD}{dr} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{d^2 D}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) \right] = \\ = \frac{\gamma}{g} h p^2 u. \end{aligned} \quad (\text{XVII.23})$$

XVII.2. КОЛЕБАНИЯ НЕОБЛОПАЧЕННЫХ ДИСКОВ

Рассмотрим первоначально колебания диска постоянной толщины. Легко убедиться, что функции, являющиеся решениями уравнений

$$\Delta u + k^2 u = 0; \quad \Delta u - k^2 u = 0, \quad (\text{XVII } 24)$$

будут одновременно и решениями уравнения (XVII.21)

$$\Delta \Delta u - k^4 u = (\Delta - k^2)(\Delta + k^2)u = 0.$$

Функции, удовлетворяющие уравнениям (XVII.24), будем искать в виде произведения

$$u(r, \varphi) = X(r) \Phi(\varphi), \quad (\text{XVII.25})$$

где $X(r)$ зависит только от r , а $\Phi(\varphi)$ — только от φ .

Подставив выражение (XVII.25) в уравнения (XVII.24), получим

$$\left(\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} \right) \Phi + \frac{1}{r^2} X \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \pm k^2 X \Phi = 0,$$

откуда

$$\frac{\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} \pm k^2 X}{-X/r^2} = \frac{\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}{\Phi} = -m^2. \quad (\text{XVII } 26)$$

Так как первое отношение в (XVII.26) зависит только от r , а второе — только от φ , то равенство (XVII.26) возможно в том случае, если оба отношения порознь равны одному и тому же постоянному числу. Если бы это число было положительным, то увеличению φ соответствовало бы безграничное возрастание $\Phi(\varphi)$, в то время как из физических соображений ясно, что $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi s)$, где s — целое число. Учитывая это, обозначим постоянное отрицательное число через $-m^2$. Таким образом, уравнение (XVII.26) эквивалентно системе двух уравнений:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0; \quad \frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} + \left(\pm k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) X = 0. \quad (\text{XVII.27})$$

Из первого уравнения (XVII.27) найдем

$$\Phi(\varphi) = C \cos(m\varphi + \alpha), \quad (\text{XVII.28})$$

где C — произвольная постоянная; α — начальный фазовый угол, который при рассмотрении свободных колебаний за счет изменения начала отсчета угловой координаты может быть принят равным нулю.

Так как должно соблюдаться равенство $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi s)$, то из формулы (XVII.28) следует, что m — целое число. Таким образом, прогиб по окружности диска при колебаниях изменяется по синусоидальному закону, а узловые линии (т. е. геометрическое место точек, остающихся неподвижными при колебаниях) определяются уравнением $\cos(m\varphi_i + \alpha) = 0$, т. е. имеют вид узловых диаметров. Зависимость (XVII.28) сохраняется спра-

ведливой и при колебаниях дисков, толщина которых изменяется вдоль радиуса.

Второе уравнение (XVII.27) является уравнением Бесселя. Как известно, его общее решение может быть представлено в виде [159]

$$X_m(r) = A_{1m} J(kr) + A_{2m} N_m(kr) + A_{3m} I(kr) + A_{4m} K_m(kr), \quad (\text{XVII } 29)$$

где $A_{1m} - A_{4m}$ — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий; J_m, N_m, I_m, K_m — цилиндрические функции (функции Бесселя и Неймана порядка m , а также модифицированные функции Бесселя и Ганкеля порядка m).

Две произвольные постоянные, входящие в выражение (XVII.29), могут быть определены из граничных условий на внутреннем контуре диска, две другие — из граничных условий на наружном контуре. Так как собственные частоты зависят от отношения наружного r_a и внутреннего r_0 радиусов диска, то для получения некоторых общих закономерностей частотного спектра рассмотрим колебания диска постоянной толщины без центрального отверстия. Поскольку функции N_m и K_m обращаются в бесконечность при $r = 0$, то для диска без центрального отверстия $A_{2m} = A_{4m} = 0$.

Таким образом, форма прогиба диска постоянной толщины без центрального отверстия при колебаниях с m узловых диаметрами может быть представлена в виде

$$u(r, \varphi) = [A J_m(kr) + B I_m(kr)] \cos m\varphi, \quad (\text{XVII.30})$$

где постоянные $A = C A_{1m}$ и $B = C A_{3m}$ определяются из граничных условий на наружном радиусе диска.

Например, если наружный контур свободен, то при $r = r_a$ в соответствии с (XVII.13) имеем:

$$M_r = 0; \quad Q_r + \partial M_{rq} / r \partial \varphi = 0;$$

если контур жестко зажат, то $u = 0$, $\partial u / \partial r = 0$.

Используя выражения (XVII.12), (XVII.14) и (XVII.30), можно получить трансцендентное уравнение относительно kr_a , корни которого, найденные по таблицам цилиндрических функций, определяют собственные частоты колебаний диска постоянной толщины без центрального отверстия.

Действительно, в соответствии с формулой (XVII.22) собственные частоты определяются по формуле $p = k^2 \sqrt{gD/(\gamma h)}$ и могут быть вычислены при известных значениях kr_a .

При использовании граничных условий на наружном контуре диска находится только отношение произвольных постоянных, входящих в формулу (XVII.30), т. е. собственная форма определяется с точностью до произвольной постоянной. Так как каждому значению kr_a , определяющему какую-либо собственную частоту диска, соответствует вполне определенное отношение A/B , то из формулы (XVII.30) следует, что помимо узловых диаметров,

определяемых из условия $\cos(m\varphi_i + \alpha) = 0$, возможно и появление различного числа узловых окружностей при $r = r_i$, положение которых определяется условием $J_m(kr_i) + (B/A) I_m(kr_i) = 0$. Естественно, что в частном случае или узловые диаметры, или узловые окружности могут отсутствовать. Колебания с различным числом узловых окружностей без узловых диаметров называются зонтичными, колебания с различным числом узловых диаметров — веерными. При увеличении числа узловых окружностей и узловых диаметров частоты колеблющихся дисков повышаются аналогично тому, как повышались частоты колебаний лопаток по мере увеличения числа узлов по их длине.

В качестве примера в табл. XVII.1 приведены значения kr_a , соответствующие собственным частотам сплошного диска постоянной толщины с m узловыми диаметрами и n узловыми окружностями при различных граничных условиях на наружном контуре диска.

Таблица XVII.1

Граничные условия		m			
		0	1	2	3
Наружный контур диска зажат	0	3,196	4,611	5,906	7,144
	1	6,306	7,799	9,197	10,54
	2	9,439	10,96	12,40	13,79
	3	12,58	14,11	15,58	17,00
Наружный контур диска свободен	0	0	0	2,292	3,497
	1	3,014	4,630	5,937	7,274
	2	6,209	7,737	9,160	10,55
	3	9,370	10,91	12,41	13,86

Вычисление собственных частот дисков с помощью специальных табулированных функций возможно только в весьма ограниченном числе случаев, при некоторых специальных законах изменения толщины диска по радиусу [87]. В связи с этим широкое распространение получили различные приближенные способы определения собственных частот дисков.

В соответствии с принципом наименьшего действия (см. гл. XIV) вариация функционала—действия по Остроградскому—Гамильтону обращается в нуль, если в выражения для кинетической и потенциальной энергии колеблющегося диска подставить функцию, определяющую собственную форму колебаний. Таким образом, имеет место уравнение [4]:

$$\delta(T_{\max} - \Pi_{\max}) = 0, \quad (\text{XVII.31})$$

где $T_{\max}$ и $\Pi_{\max}$ — максимальные значения кинетической и потенциальной энергии колеблющегося диска.

При нахождении приближенных значений собственных частот, например, с помощью метода Ритца функция, определяющая собственную форму, ищется в виде ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(r, \varphi), \quad (\text{XVII.32})$$

где $u_i(r, \varphi)$ — известные функции, удовлетворяющие, по крайней мере, геометрическим граничным условиям; a_i — параметры, значения которых после подстановки (XVII.32) в (XVII.31) определяются из условия минимума выражения $T_{\max} - \Pi_{\max}$, т. е. из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a_i} (T_{\max} - \Pi_{\max}) = 0, \quad i = 1; 2; \dots; n. \quad (\text{XVII.33})$$

Для практического применения метода Ритца необходимо найти выражения для потенциальной и кинетической энергии колеблющегося диска.

Учитывая, что в соответствии с используемыми гипотезами Кирхгофа напряженное состояние диска является двухосным, имеем

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz}) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2\nu \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{yz}^2 \right), \quad (\text{XVII.34})$$

где W — удельная потенциальная энергия деформации (отношение потенциальной энергии элемента к его объему) [142].

Подставляя в (XVII.34) выражения (XVII.3), получим

$$W = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right)^2 \right] x^2. \quad (\text{XVII.35})$$

Так как $\Pi_{\max} = \int_F \int_{-h/2}^{h/2} W dx dy dz$, где F — площадь срединной плоскости диска, то с учетом формулы (XVII.35) получим

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \iint_F D \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right)^2 \right] dy dz, \quad (\text{XVII.36})$$

или

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \iint_F D \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \right\} dy dz. \quad (\text{XVII.36a})$$

Выражение для кинетической энергии колеблющегося диска имеет вид

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} p^2 \iint_F hu^2 dy dz. \quad (\text{XVII.37})$$

Так как граничные условия для колеблющегося диска заданы при $r = r_0$ и $r = r_a$, то естественно, что выражения для кинетической и потенциальной энергии следует представить в полярных координатах.

Учитывая, что в соответствии с рис. XVII.1

$$dr = \cos \varphi dy + \sin \varphi dz; \quad r d\varphi = -\sin \varphi dy + \cos \varphi dz,$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos^2 \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\cos 2\varphi}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\cos 2\varphi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \\ &\quad - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Подставив найденные значения производных в формулу (XVII.36a), найдем

$$\begin{aligned} P_{\max} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_a} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right]^2 \right\} r d\varphi dr. \end{aligned} \quad (\text{XVII.38})$$

Выражение для кинетической энергии в полярных координатах окажется следующим:

$$T_{\max} = \frac{\gamma}{2g} p^2 \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_a} hu^2 r dr d\varphi = p^2 T'_{\max}. \quad (\text{XVII.39})$$

Таким образом,

$$p^2 = P_{\max} / T'_{\max}. \quad (\text{XVII.40})$$

Используя формулы (XVII.38) и (XVII.39), применим метод Ритца для приближенного определения первой собственной частоты сплошного диска постоянной толщины, жестко зажатого по внешнему контуру.

В рассматриваемом случае потенциальная энергия диска [4]

$$P_{\max} = \frac{1}{2} D \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right)^2 r dr d\varphi,$$

а кинетическая энергия примет значение

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} p^2 h \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} u^2 r dr d\varphi.$$

В качестве приближенного значения собственной формы при колебаниях с m узловыми диаметрами используем выражение

$$u(r, \varphi) = \alpha r^s (r_a^2 - r^2)^2 \cos m\varphi = u_0 \cos m\varphi, \quad (\text{XVII.41})$$

где s — параметр, значение которого выбирается из условия минимума собственной частоты; $u_0 = \alpha r^s (r_a^2 - r^2)^2$.

Подставив выражение (XVII.41) в формулы для потенциальной и кинетической энергии и выполнив интегрирование по φ , получим:

$$P_{\max} = \frac{1}{2} D \pi \int_0^{r_a} \left(\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_0}{dr} - \frac{m^2}{r^2} u_0 \right)^2 r dr;$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\pi \gamma h}{g} p^2 \int_0^{r_a} u_0^2 r dr.$$

Рассмотрим первоначально зонтичные колебания при $m = 0$; $n = 0$. Приравнявая максимальные значения потенциальной и кинетической энергии, найдем квадрат первой собственной частоты зонтичных колебаний, которая является функцией параметра s . Расчеты показывают, что минимального значения собственной частота достигает в том случае, когда $s = 0$. При этом

$$P_{\max} = \frac{16}{3} \pi D \alpha^2 r_a^6; \quad T_{\max} = \frac{\pi \gamma h p^2 \alpha^2 r_a^{10}}{20g}.$$

Таким образом,

$$p_1^2 = \frac{320}{3} \frac{Dg}{r_a^4 h \gamma}; \quad p_1 = \frac{10,33}{r_a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h \gamma}}.$$

Аналогичные расчеты для $m = 1$ и $m = 2$ приводят к следующим результатам:

$$m = 1; \quad s = 1; \quad p_1 = \frac{21,9}{r_a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h \gamma}};$$

$$m = 2; \quad s = 1,7; \quad p_1 = \frac{35,4}{r_a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h \gamma}}.$$

Как следует из табл. XVII.1, точные значения первой собственной частоты сплошного диска постоянной толщины, жестко заделанного по наружному контуру, при $m = 0; 1; 2$; соответственно равны:

$$p_1 = \frac{3,196^2}{r_a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h\gamma}} = \frac{10,21}{r_a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h\gamma}} \quad \text{при } m = 0;$$

$$p_1 = \frac{4,611^2}{r_a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h\gamma}} = \frac{21,3}{r_a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h\gamma}} \quad \text{при } m = 1;$$

$$p_1 = \frac{5,906^2}{r_a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h\gamma}} = \frac{34,9}{r_a^2} \sqrt{\frac{Dg}{h\gamma}} \quad \text{при } m = 2.$$

Таким образом, точность, обеспеченная методом Ритца в рассматриваемом случае, оказалась весьма высокой. Дальнейшее повышение точности расчетов может быть достигнуто за счет увеличения числа варьируемых параметров в выражении (XVII.32).

При приближенном определении собственных частот диска переменной толщины, жестко зажатого при $r = r_0$ и свободного при $r = r_a$, следует вычислить потенциальную и кинетическую энергию по формулам (XVII.38) и (XVII.39), считая, например, что имеет место одна из следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} u(r, \varphi) &= \alpha r^s \cos m\varphi; & u(r, \varphi) &= \alpha (r - r_0)^s \cos m\varphi; \\ u(r, \varphi) &= [a_1 (r - r_0)^2 + a_2 (r - r_0)^3 + \dots] \cos m\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVII.42})$$

где параметры $s, a_1, a_2, \dots$ определяются из условия минимума собственной частоты.

При приближенном определении собственных частот может быть учтено и ужесточающее влияние центробежных сил (а также влияние неравномерного нагрева, если известно распределение термических напряжений в диске).

На рис. XVII.5 изображен элемент диска $ABCD$ и статические напряжения σ_r и σ_φ , действующие на выделенный элемент в поле центробежных сил (пренебрегаем различием в величине статических напряжений σ_r , действующих на радиусах r и $r + dr$).

При колебаниях диска выделенный элемент наклоняется по отношению к плоскости yOz , причем наклон в радиальном направлении составляет величину du/dr , а в окружном направлении — величину $du/r d\varphi$. Вследствие наклона элемента поверхность BC перемещается по радиусу по отношению к поверхности AD на величину $(du/dr)^2 dr/2$, а поверхность DC перемещается по отношению к AB в окружном направлении на величину $(du/r d\varphi)^2 r d\varphi/2$.

Элементарная работа центробежных сил, вызывающих напряжения σ_r и σ_φ ,

$$dA = -\frac{1}{2} \sigma_r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 hr dr d\varphi - \frac{1}{2} \sigma_\varphi \left(\frac{\partial u}{r \partial \varphi} \right)^2 hr dr d\varphi.$$

Проинтегрировав по r и φ , вычислим работу центробежных сил:

$$A = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_a} \left[\sigma_r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \sigma_\varphi \left(\frac{\partial u}{r \partial \varphi} \right)^2 \right] hr dr d\varphi, \quad (\text{XVII.43})$$

где закон изменения статических напряжений σ_r и σ_φ по радиусу определяется из расчета диска в поле центробежных сил, а приближенное значение функции $u(r, \varphi)$ может быть принято в соответствии с одной из формул (XVII.42).

Так как имеет место равенство $A = -P_\omega$, где P_ω — приращение потенциальной энергии диска из-за работы центробежных сил, то собственная частота вращающегося диска $p_{\text{дин}}$ может быть вычислена по формуле

$$p_{\text{дин}}^2 = (P_{\text{max}} + P_\omega) / T'_{\text{max}}. \quad (\text{XVII.44})$$

Если считать, что выражение для собственной формы $u(r, \varphi)$ не изменяется в поле центробежных сил, то $P_\omega = C\omega^2$, где величина C зависит от собственной формы и геометрических характеристик диска, но не зависит от угловой скорости вращения ω . Таким образом, формулу (XVII.44) можно преобразовать к виду:

$$p_{\text{дин}}^2 = p_{\text{ст}}^2 + B\omega^2; \quad f_{\text{дин}}^2 = f_{\text{ст}}^2 + Bn^2, \quad (\text{XVII.44a})$$

где B — коэффициент, постоянный для определенной собственной формы диска; n — частота вращения диска, об.с.

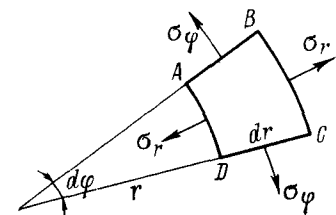
Как видно, зависимость динамических частот диска от частоты вращения имеет такой же вид, как и зависимость динамических частот лопаток, однако фактическое влияние центробежных сил на частоты дисков значительно меньше из-за их относительно более высоких статических собственных частот (см. пп. II.5 и II.11).

Как и при определении собственных частот лопаток, рассмотренные выше приближенные способы частично утратили свое значение в связи с внедрением ЭВМ в практику инженерных расчетов.

Учитывая, что стандартные программы ЭВМ рассчитаны на решение систем дифференциальных уравнений первого порядка, необходимо преобразовать к подобному виду уравнения, описывающие колебания диска.

Так как выше показано, что $U(r, \varphi, t) = CX(r) \cos m\varphi \sin(pt + \alpha)$, то из уравнений (XVII.12) следует, что $M_r, M_\varphi, \partial M_{r\varphi} / \partial \varphi$,

Рис. XVII.5 Статические напряжения, действующие на элемент диска в поле центробежных сил



Q_r также имеют множителем $\cos m\varphi \sin(pt + \alpha)$, т. е. могут быть представлены в виде:

$$M_r = M(r) \cos m\varphi \sin(pt + \alpha); \quad Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} = \\ = P(r) \cos m\varphi \sin(pt + \alpha),$$

где $M(r)$ и $P(r)$ являются функциями только координаты r . Введем новые переменные, зависящие только от радиуса r :

$$y_1 = X(r), \quad y_2 = dX(r)/dr, \quad y_3 = M(r), \quad y_4 = P(r) \quad (\text{XVII.45})$$

Используя выражения (XVII.45), из уравнений (XVII.11) и (XVII.12) можно получить систему четырех линейных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных:

$$y' = Ay, \quad (\text{XVII.46})$$

где y — вектор-столбец; $y^T = (y_1, y_2, y_3, y_4)$; A — квадратная матрица, элементы которой являются функциями r, m и p (а при учете центробежных сил — и ω).

Для получения численных результатов необходимо использовать граничные условия. Например, для диска с жестко зажатым внутренним контуром и свободным наружным выполняются условия:

$$y_1(r_0) = 0; \quad y_2(r_0) = 0; \quad y_3(r_a) = 0; \quad y_4(r_a) = 0. \quad (\text{XVII.47})$$

При численном интегрировании системы уравнений (XVII.45) необходимо преобразовать рассматриваемую краевую задачу в задачу Коши [9]. Из свойств линейных дифференциальных уравнений следует, что общее решение системы (XVII.45) имеет вид [159]

$$y(r) = C_1 y^{(1)}(r) + C_2 y^{(2)}(r) + C_3 y^{(3)}(r) + C_4 y^{(4)}(r), \quad (\text{XVII.48})$$

где C_i — произвольные постоянные; $y^{(i)}$ — линейно-независимые решения системы (XVII.46).

Система уравнений (XVII.48) может быть представлена в матричной форме:

$$y(r) = Y(r)C,$$

где

$$Y(r) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix};$$

$$C^T = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}.$$

Линейная независимость решений $y^{(i)}$ будет обеспечена, если матрица $Y(r_0)$ будет единичной. В этом случае $C_1 = C_2 = 0$, а C_3 и C_4 будут определены из граничных условий при $r = r_a$.

В общем случае система (XVII.48) при $r = r_a$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1(r_a) \\ y_2(r_a) \\ y_3(r_a) \\ y_4(r_a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(r_0) \\ y_2(r_0) \\ y_3(r_0) \\ y_4(r_0) \end{pmatrix}. \quad (\text{XVII.49})$$

Используя граничные условия (XVII.47) при $r = r_a$, получим

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{33} & y_{34} \\ y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3(r_0) \\ y_4(r_0) \end{pmatrix}. \quad (\text{XVII.50})$$

Условие совместности системы (XVII.50) приобретает вид

$$\Delta(p, m, \omega) = \begin{vmatrix} y_{33} & y_{34} \\ y_{43} & y_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{XVII.51})$$

Для заданных величин m и ω корни определителя (XVII.51) соответствуют различным собственным частотам вращающегося диска. После нахождения собственной частоты с точностью до произвольной постоянной может быть определена функция $X(r)$, т. е. вычислена собственная форма с m узловыми диаметрами, соответствующая данной собственной частоте.

Практически процесс вычислений осуществляется таким же образом, как и процесс вычисления собственных частот лопаток (см. п. XV.2).

При использовании ЭВМ собственные частоты диска с высокой точностью могут быть определены и с помощью вариационных методов, поскольку при этом число базисных функций в выражении (XVII.32) может быть выбрано достаточно большим. Методика вычисления собственных частот диска, учитывающая влияние не только центробежных сил и неравномерного нагрева, но также влияние сдвига и инерции вращения, приведена в работе [44].

XVII.3. КОЛЕБАНИЯ ОБЛОПАЧЕННЫХ ДИСКОВ

В настоящем параграфе ограничимся рассмотрением совместных колебаний дисков с отдельными лопатками или лопатками, соединенными замкнутыми на круг связями, когда упругие и инерционные свойства системы повторяются через шаг лопаток.

При совместных колебаниях рабочих лопаток и дисков их относительное влияние на собственные частоты системы может быть различным в зависимости от соотношения геометрических размеров диска и лопаток.

Рассмотрим, например, совместные колебания диска с незакрученными лопатками постоянного сечения, угол установки которых равен нулю. Обозначим прогиб лопатки при ее изгибе в аксиальном направлении u , совместную частоту колебаний

лопаток и диска — p . С учетом результатов п. XI.2 дифференциальное уравнение колебаний лопатки имеет вид

$$u^{IV} = \frac{\gamma F l^4}{g E J_{\max}} p^2 u - \rho^4 u,$$

где $u^{IV} = d^4 u / dz^4$; $\xi = z/l$; $0 \leq z \leq l$.

Форма прогиба определяется уравнением

$$u(\xi) = C_1 \sin \rho \xi + C_2 \cos \rho \xi + C_3 \operatorname{sh} \rho \xi + C_4 \operatorname{ch} \rho \xi,$$

где C_1 — C_4 — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Если бы имели место колебания отдельной жестко заделанной лопатки, то ее первая собственная частота p_1 определялась бы уравнением (см. п. XI.3).

$$p_1^2 = 1,875^4 E J_{\max} (F l^4 \gamma).$$

При условии, что $p/p_1 \ll 1$, величина ρ также оказывается меньше единицы и можно считать справедливыми приближенные равенства:

$$\sin \rho \xi \approx \operatorname{sh} \rho \xi \approx \rho \xi; \quad \cos \rho \xi \approx \operatorname{ch} \rho \xi \approx 1.$$

Таким образом, имеем $u = C \xi$, т. е. прогиб лопатки изменяется по высоте по линейному закону.

Учитывая граничные условия на наружном контуре диска:

$$u_d(r_a) = u(0); \quad du_d(r_a)/dr = du(0)/dz,$$

где величины, относящиеся к диску, имеют индекс «д», представим выражение для амплитуд колебаний различных поперечных сечений лопатки в следующем виде:

$$u(z) = u(0) + \frac{du(0)}{dz} z.$$

Так как амплитуды различных поперечных сечений лопатки изменяются по линейному закону из-за изгиба диска, а упругая деформация лопатки отсутствует, то оказывается равной нулю и потенциальная энергия лопатки.

Таким образом, суммарная потенциальная энергия системы, состоящей из диска и лопаток, оказывается равной потенциальной энергии диска, а суммарная кинетическая энергия системы оказывается равной сумме кинетических энергий диска и лопаток. В результате в соответствии с формулой (XVII.40) собственная частота облопаченного диска будет ниже, чем собственная частота необлопаченного диска. Различие в частотах будет тем меньше, чем меньше отношение l/r_a .

Совершенно другим окажется относительное влияние лопаток при рассмотрении колебаний облопаченных дисков последних ступеней ЦНД мощных турбин. В этом случае низшие собственные частоты отдельных лопаток и частоты внутрипакетных колебаний лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями, оказываются значительно ниже частот необлопаченного диска. В п. II.11 приведены результаты расчетов, показывающие, что при соединении лопаток ЦНД замкнутыми на круг связями влияние собственно диска мало, а частоты совместных колебаний практически совпадают с частотами внутрипакетных колебаний лопаток, вычисленными без учета влияния диска (см. рис. II.66). В ступенях ЦСД влияние лопаток и диска на частоты совместных колебаний может оказаться соизмеримым.

Приближенно частоты совместных колебаний дисков и закрученных лопаток переменного сечения могут быть определены с помощью способа, аналогичного изложенному в п. XVII.2. Например, в работе [109] описан метод вычисления низших собственных частот облопаченного диска, при котором прогиб в аксиальном направлении предварительно закрученной лопатки представляется в виде суммы двух функций, одна из которых является собственной формой колебаний жестко заделанной лопатки, а вторая определяется деформацией диска. Каждая из функций умножается на числовой множитель, значение которого находят из условия минимума собственной частоты облопаченного диска.

При использовании ЭВМ частоты аксиальных колебаний дисков и изгибно-крутильных колебаний закрученных лопаток переменного сечения, соединенных замкнутыми на круг связями, могут быть определены путем совместного решения систем дифференциальных уравнений, описывающих колебания лопаток со связями и диска.

Если число лопаток на диске соизмеримо с числом узловых диаметров, то наличие на наружном контуре диска сосредоточенных моментов и сил, действующих от каждой лопатки, может привести к отклонению формы прогиба диска по окружности от синусоидальной. Практически, однако, наибольший интерес представляют колебания с относительно малым числом узловых диаметров m , когда $m \ll z_1$. В этом случае можно считать, что нагрузка, действующая от лопаток на диск, так же как и форма прогиба облопаченного диска, изменяется по окружности по синусоидальному закону.

В п. XVI.2 было показано, что при соединении лопаток замкнутыми на круг связями составляющие перемещений и усилий, изменяющиеся по окружности по синусоидальному и косинусоидальному законам, оказываются зависящими друг от друга. В связи с этим при определении собственных частот внутрипакетных колебаний приходится решать систему из 20 дифференциальных уравнений первого порядка. При рассмотрении совместных колебаний соединенных замкнутыми на круг связями лопаток и

дисков численное интегрирование указанной системы, как показал А. В. Тржецинский, целесообразно проводить, начиная от периферийных сечений лопатки. При этом 10 произвольных постоянных из 20, появляющихся при интегрировании системы уравнений, определяются из граничных условий на вершинах лопаток [уравнения (XVI.12)], а 10 остальных произвольных постоянных — из условий сопряжения на наружном контуре диска и из граничных условий на его внутреннем контуре.

Если считать, что лопатки жестко соединены с диском, то граничные условия в корневом сечении лопатки (на наружном контуре диска) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} v_1 = \frac{dv_1}{dz} = v_2 = \frac{dv_2}{dz} = 0; \quad u_1 = u_{1д}; \quad u_2 = u_{2д}; \\ \frac{du_1}{dz} = \frac{du_{1д}}{dr}; \quad \frac{du_2}{dz} = \frac{du_{2д}}{dr}; \quad \theta_1 = -\frac{m}{r_a} u_{2д}; \\ \theta_2 = \frac{m}{r_a} u_{1д}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVII.52})$$

где индекс 1 указывает на то, что величины в соответствии с формулами (XVI.7) изменяются по окружности по закону $\sin m\varphi$, а индекс 2 — что величины изменяются по окружности по закону $\cos m\varphi$.

Кроме того, на наружном контуре диска интенсивность обобщенных перерезывающих сил $P_1(r)$ и $P_2(r)$ и изгибающих моментов $M_1(r)$ и $M_2(r)$ (см. п. XVII.2) можно выразить через силы и моменты, действующие в корневых сечениях лопаток.

Если бы лопатки были жестко заделаны в корневом сечении, то для определения 10 оставшихся произвольных постоянных можно было бы использовать 10 граничных условий (XVI.12). Граничных условий (XVII.52) недостаточно для определения всех 10 произвольных постоянных, так как при этом появляются новые неизвестные $u_{1д}(r_a)$, $u_{2д}(r_a)$, $du_{1д}(r_a)/dr$, $du_{2д}(r_a)/dr$. Для определения этих неизвестных следует численно проинтегрировать уравнения колебаний диска (XVII.46) от наружного к внутреннему контуру и использовать граничные условия на внутреннем контуре диска:

$$u_{1д}(r_0) = u_{2д}(r_0) = du_{1д}(r_0)/dr = du_{2д}(r_0)/dr = 0. \quad (\text{XVII.53})$$

Таким образом, задача вычисления собственных частот облопаченного диска может быть решена тем же способом, что и задача вычисления собственных частот замкнутого на круг пакета жестко заделанных лопаток.

Если кроме податливости диска необходимо дополнительно учесть податливость заделки лопаток, то уравнения (XVII.52) следует видоизменить, используя соотношения, полученные в п. XI.5. Например, если учесть только величины коэффициен-

тов c_{11} и c_{22} , определенных в п. XI.5, то граничные условия в корневом сечении лопатки (на наружном контуре диска) окажутся следующими:

$$\left. \begin{aligned} u_1 - u_{1д} &= c'_{11} Q_{x1}; \quad u_2 - u_{2д} = c'_{11} Q_{x2}; \\ \frac{du_1}{dz} - \frac{du_{1д}}{dr} &= c'_{22} M_{y1}; \quad \frac{du_2}{dz} - \frac{du_{2д}}{dr} = c'_{22} M_{y2}; \\ v_1 &= c''_{11} Q_{y1}; \quad v_2 = c''_{11} Q_{y2}; \\ \frac{dv_1}{dz} &= -c''_{22} M_{x1}; \quad \frac{dv_2}{dz} = -c''_{22} M_{x2}; \\ \theta_1 &= -\frac{m}{r_a} u_{2д}; \quad \theta_2 = \frac{m}{r_a} u_{1д}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVII.54})$$

где обозначения и положительные направления действующих в корневом сечении лопатки сил и моментов указаны в гл. XV.

Собственные частоты облопаченных дисков при использовании ЭВМ могут быть с высокой точностью определены и с помощью вариационных методов. В работе [44] изложена методика подобных расчетов, аналогичная методике определения собственных частот отдельных лопаток (см. п. XV.2). Приведенные в работе [44] данные свидетельствуют о достаточно хорошем совпадении расчетных результатов с точными решениями (в тех случаях, когда они существуют) и экспериментальными данными.

Как расчетные, так и экспериментальные исследования показывают, что частотный спектр облопаченных дисков является весьма густым, а отстройка от всех собственных форм (например, для облопаченных дисков последних ступеней ЦНД) практически невозможна. Следует, однако, иметь в виду, что при действии возмущающих сил, вызванных неравномерностью параметров потока по окружности колеса, для значительного большинства собственных форм теоретически оказывается равным нулю пакетный множитель, т. е. оказывается равной нулю работа возмущающих сил за период колебаний. Естественно, что по этой причине опасность подобных колебаний резко уменьшается. В п. XVII.2 было показано, что форма прогиба по окружности диска имеет вид $\Phi(\varphi) = C \cos(m\varphi + \alpha)$, где угол α при рассмотрении свободных колебаний может быть выбран произвольно. Эта особенность вызвана совпадением двух собственных частот, одной из которых соответствует изменение амплитуд колебаний по окружности диска по закону $\cos m\varphi$, а другой — по закону $\sin m\varphi$.

При рассмотрении вынужденных колебаний угол α определяется эпюрой возмущающих сил. Фактически угол α оказывается таким, который обеспечивает максимальную работу возмущающих сил при резонансе. Поэтому при рассмотрении резонансных колебаний уравнение (XVII.28) следует записать в виде

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi,$$

а колебания произвольной точки облопаченного диска будут изменяться по закону

$$U(r, \varphi, t) = U_1(r, \varphi, t) + U_2(r, \varphi, t) = \\ = C_1 X(r) \cos m\varphi \sin(pt + \alpha_1) + C_2 X(r) \sin m\varphi \sin(pt + \alpha_2), \quad (\text{XVII } 55)$$

где величины C_1 и C_2 определяются соотношением амплитуд возмущающих и демпфирующих сил, а углы α_1 и α_2 определяются из условия максимума работы возмущающих сил при резонансе

Рассмотрим резонансные колебания под действием возмущающей силы, вызванной неравномерностью потока и изменяющейся в окружном и радиальном направлениях по закону $\eta(r) \cos k\varphi$. Так как для вращающегося диска угловая координата изменяется по закону $\varphi = \omega t$, то изменение во времени возмущающей силы, действующей на определенную точку диска, окажется следующим

$$\eta(r, t) = \eta(r) \cos k\omega t$$

Поскольку при резонансе частота возмущающей силы совпадает с собственной частотой, то $p = k\omega$, т. е. облопаченный диск колеблется с k -й кратностью (совершает k колебаний за оборот), а возмущающая сила изменяется по закону $\eta(r, t) = \eta(r) \cos pt$.

Рассмотрим случай $m = k$, т. е. случай, когда число узловых диаметров m совпадает с кратностью колебаний k . Ранее отмечалось, что частота вращения n , при которой выполняются условия $f = kn$ и $m = k$, называется критической.

Вычислим элементарную работу dR_{11} возмущающей силы, действующей на участке дуги $\cos m\varphi d\varphi$ единичной высоты, расположенной на радиусе r . Элементарная работа за период колебаний при первой собственной форме, определяемой первым слагаемым формулы (XVII 55), окажется следующей

$$dR_{11} = C_1 \cos m\varphi d\varphi \eta(r) \int_0^{2\pi/p} p \cos(pt + \alpha_1) \cos(m\varphi + pt) dt = \\ = C_1 \cos m\varphi d\varphi \eta(r) \pi \cos(\alpha_1 - m\varphi)$$

Полная работа возмущающей силы по всей окружности единичной высоты за период колебаний составит величину

$$R_{11} = C_1 \eta(r) \pi \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos(\alpha_1 - m\varphi) d\varphi = C_1 \eta(r) \pi^2 \cos \alpha_1$$

Из условия максимума работы возмущающей силы за период получим

$$\cos \alpha_1 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad U_1(r, \varphi, t) = C_1 X(r) \cos m\varphi \sin pt \quad (\text{XVII } 56)$$

Аналогичные расчеты для второй собственной формы приведут к следующим результатам

$$dR_{12} = C_2 \sin m\varphi d\varphi \eta(r) \int_0^{2\pi/p} p \cos(pt + \alpha_2) \cos(m\varphi + pt) dt = \\ = C_2 \sin m\varphi d\varphi \eta(r) \cos(\alpha_2 - m\varphi), \\ R_{12} = C_2 \eta(r) \pi \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cos(\alpha_2 - m\varphi) d\varphi = C_2 \eta(r) \pi^2 \sin \alpha_2$$

Так как по условию максимума работы возмущающей силы за период $\sin \alpha_2 = 1$, $\alpha_2 = \pi/2$, то

$$U(r, \varphi, t) = C_2 X(r) \sin m\varphi \sin(pt + 0,5\pi) = \\ = C_2 X(r) \sin m\varphi \cos pt \quad (\text{XVII } 56a)$$

Поскольку распределение амплитуд колебаний по радиусу для обеих собственных форм с частотой p одинаково, то, как и в п. XIII 6, полагаем, что и декременты колебаний δ для обеих собственных форм также будут равны. Приравнявая значения приведенной и рассеянной за период колебаний энергии для обеих форм, как и при рассмотрении внутрисетевых колебаний жестко заделанных лопаток с замкнутыми на круг связями, получим, что $C_1 = C_2 = C$.

Таким образом, колебания произвольной точки облопаченного диска описываются уравнением

$$U(r, \varphi, t) = CX(r) (\cos m\varphi \sin pt + \sin m\varphi \cos pt) = \\ = CX(r) \sin(m\varphi + pt) \quad (\text{XVII } 57)$$

Так как выполняется равенство $p = m\omega$, то

$$U(r, \varphi, t) = CX(r) \sin m(\varphi + \omega t) \quad (\text{XVII } 57a)$$

Из формулы (XVII 57a) следует, что колебания носят характер волны, бегущей по окружности диска с угловой скоростью $-\omega$. Так как при этом сам диск вращается с угловой скоростью ω , то по отношению к определенной точке статора величина прогиба остается неизменной во времени. Если в определенной точке статора (например, в районе стыка двух половин диафрагмы) действует сосредоточенная сила, то все точки колеблющегося диска будут проходить мимо этой точки статора в одной и той же фазе, в связи с чем работа возмущающей силы за период будет отлична от нуля. Отличной от нуля будет и работа возмущающей силы, изменяющейся по длине окружности по закону $\cos(m\varphi + \alpha)$, как это и следует из приведенных выше соотношений.

Если собственная частота облопаченного диска в целое число раз (например, в k раз) превышает угловую скорость вращения диска, но при этом число узловых диаметров m не совпадает с крат

ностью колебаний k , то суммарная работа возмущающей силы с частотой $p = k\omega$ за период будет равна нулю, так как

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin(k\varphi + \alpha) d\varphi = 0$$

при любом значении α .

На практике при изготовлении и сборке облопаченных дисков неизбежны определенные отклонения от циклической симметрии. Эти отклонения приводят к тем же особенностям колебаний, что и отклонение от циклической симметрии пакета жестко заделанных лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями (см. п. XIII.7). Из-за наличия отклонений от циклической симметрии колебания различных точек облопаченного диска не будут в точности описываться формулой (XVII.57). При возбуждении колебаний из-за неравномерности параметров потока по окружности или наличия сосредоточенной в пространстве силы возможно появление двух близких по частоте основных и нескольких побочных резонансов со значительно меньшим уровнем напряжений, а также могут возникнуть другие особенности, описанные в п. XVI.6.

Следует учитывать, что закон изменения возмущающих сил во времени может быть отличным от рассмотренного выше: например, интенсивность возмущающей нагрузки $\eta(r)$ может изменяться во времени из-за взаимодействия неподвижных направляющих и вращающихся рабочих решеток, имеющих, кроме того, и определенные технологические отклонения. При подобном характере возмущающих сил их работа может быть отлична от нуля и для собственных форм, при которых число узловых диаметров не совпадает с кратностью колебаний [107].

Тем не менее как практика эксплуатации [107], так и экспериментальные результаты, приведенные в гл. XVI, свидетельствуют о том, что наибольшую опасность даже при учете технологических отклонений представляют колебания облопаченных дисков с числом узловых диаметров, совпадающим с кратностью колебаний. При вибрационной отстройке именно для этих колебаний должен быть обеспечен достаточный запас от рабочей частоты вращения, если собственные частоты облопаченных дисков находятся в настраиваемой зоне (см. п. II.12). Следует иметь в виду, что относительные величины побочных резонансов при колебаниях облопаченных дисков могут существенно возрасти при неудачном выборе конструкции и места расположения соединяющих лопатки связей (см. п. XI.12 и XVI.6). Это обстоятельство следует учитывать при вибрационной отстройке облопаченных дисков, выборе конструкции, числа и места расположения соединяющих лопатки связей (см. п. XVI.6) и назначении норм на разбросы в собственных частотах отдельных лопаток.

- 1 Аркадьев Д. А., Карпин Е. Б. Расчет частот аксиальных колебаний пакетов лопаток с узлами по бандажу — Энергомашиностроение, 1978, № 3, с. 6—9.
- 2 Армстронг. Современные методы исследования вибрации лопаток. Энергетические машины и установки. Пер с англ. — Тр. амер. общ-ва инж.-мех., 1967, № 3, с. 151—160. (Серия А).
- 3 Ахметзянов М. Х. Исследование концентрации напряжений в пластической области при помощи фотоупругих покрытий. — Изв. АН СССР, ОИИ. Механика и машиностроение, 1963, № 1, с. 159—162.
- 4 Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: ГИТТЛ, 1958. 628 с.
- 5 Бауер В. О., Шорр Б. Ф. Влияние расстройки частот лопаток на резонансные колебания. — В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение, 1971, вып. 6, с. 75—98.
- 6 Бедчер Ф. С. Исследование вибраций компрессорных лопаток. — В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение, 1966, вып. 4, с. 132—142.
- 7 Беляев Н. М. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 856 с.
- 8 Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М.: Физматгиз, 1962. Т. 2. 639 с.
- 9 Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
- 10 Биргер И. А. Вариационные методы в строительной механике турбомашин. М.: Оборонгиз, 1959. 28 с.
- 11 Биргер И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М.: Оборонгиз, 1956. 152 с.
- 12 Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М.: Оборонгиз, 1961. 368 с.
- 13 Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. Справочник. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1979. 702 с.
- 14 Биргер И. А. Техническая диагностика. М.: Машиностроение, 1978. 239 с.
- 15 Биргер И. А., Демьянушко И. В. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
- 16 Биргер И. А., Кемпнер М. Л. Колебания лопаток турбин и компрессоров. Колебания турбинных и компрессорных дисков. — В кн.: Колебания машин, конструкций и их элементов /Под ред. Ф. М. Диментберга и К. С. Колесникова. М.: Машиностроение, 1980. Т. 3, с. 229—281.
- 17 Бицево К. Б., Граммель Р. Техническая динамика. М.—Л.: ГИТТЛ, 1952. Т. 2. 630 с.
- 18 Блишник Б. С., Ефремова В. Т., Шорр Б. Ф. Расчет собственных частот связанных колебаний лопаток с бандажными подками. — В кн.: Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1975, вып. 16, с. 240—260.
- 19 Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.

20. Богомолов С. И., Журавлева А. М. Взаимосвязанные колебания в турбомашинных и газотурбинных двигателях. Харьков: Вища школа, 1973. 179 с.
21. Богомолов С. М., Журавлева А. М. Колебания сложных механических систем. Харьков: Вища школа, 1978. 136 с.
22. Боришанский К. Н. Некоторые особенности колебаний облопачивания с демпферными связями. — Тр. ЦКТИ, 1967, № 80, с. 92—103.
23. Боришанский К. Н., Макаров В. Н., Симин О. Н. Особенности напряженного состояния рабочих лопаток последних ступеней мощных паровых турбин. — Энергомашиностроение, 1972, № 11, с. 4—7.
24. Боришанский К. Н. Сопоставление результатов теоретического и экспериментального изучения колебаний лопаточных венцов с замкнутыми на круг связями. — Проблемы прочности, 1972, № 8, с. 79—82.
25. Боришанский К. Н. Деформации и напряжения в лопатках последних ступеней паровых турбин, вызванные неравномерным нагревом. — Энергомашиностроение, 1974, № 11, с. 35—38.
26. Боришанский К. Н. Особенности колебаний лопаток с бандажными полками. — Проблемы прочности, 1974, № 9, с. 97—102.
27. Боришанский К. Н. Влияние увеличения мощности турбины на сравнительную возбудимость различных форм колебаний рабочих лопаток. — Теплоэнергетика, 1975, № 6, с. 30—34.
28. Боришанский К. Н. Рассеяние энергии при колебаниях вращающихся лопаток последней ступени мощной паровой турбины. — Проблемы прочности, 1975, № 5, с. 9—13.
29. Боришанский К. Н. Рассеяние энергии при колебаниях лопаток турбин, соединенных различными по конструкции связями. — В кн.: Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. Киев: Наукова думка, 1976, с. 193—201.
30. Боришанский К. Н. Особенности колебаний рабочих лопаток цилиндров высокого и среднего давления мощных турбин. — Теплоэнергетика, 1977, № 7, с. 21—24.
31. Боришанский К. Н. Влияние конструкции связей рабочих лопаток турбин на рассеяние энергии при колебаниях. — В кн.: Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. Киев: Наукова думка, 1978, с. 183—191.
32. Боришанский К. Н. Особенности колебаний лопаток турбин с замкнутыми на круг связями. — Проблемы прочности, 1978, № 6, с. 8—13.
33. Боришанский К. Н. Влияние податливости заделки на собственные частоты рабочих лопаток паровых турбин. — Проблемы прочности, 1980, № 1, с. 98—102.
34. Бугаков И. И. Исследование метода фотоползучести. — Тр. ЛГУ, 1961, № 1. Исследования по упругости и пластичности, с. 107—126.
35. Бушуев М. Н. Технология производства турбин. М.—Л.: Машиностроение, 1966. 420 с.
36. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 487 с.
37. Вероужский Ю. В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. Киев: Вища книга, 1978, 181 с.
38. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.
39. Власов В. З. Избранные труды. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР. Тонкостенные упругие стержни. Принципы построения общей технической теории оболочек. М.: АН СССР, 1963. 507 с.
40. Вольфсон И. М., Елифанов В. К. К вопросу о неоднородности потока за турбинной решеткой. — Теплоэнергетика, 1973, № 10, с. 29—31.
41. Воробьев Ю. С. Уточненные уравнения свободных колебаний вращающихся стержней. — В кн.: Рабочие процессы в турбомашинных и прочность их элементов. Киев: Наукова думка, 1965, с. 11—27.
42. Воробьев Ю. С. К выводу уравнений колебаний вращающегося диска. — В кн.: Динамика и прочность машин. Харьков: Вища школа, 1974, вып. 20, с. 69—76.
43. Воробьев Ю. С., Медведев Н. Г. Исследование колебаний пакетов с конечным числом рабочих лопаток. — Проблемы прочности, 1976, № 3, с. 49—52.
44. Воробьев Ю. С., Шульженко И. Г. Исследование колебаний систем элементов турбоагрегатов. Киев: Наукова думка, 1978. 132 с.
45. Герцберг Е. Я. К расчету цельнокованных турбинных роторов. — Инж. сборник АН СССР, 1953, т. 15, с. 3—14.
46. Герцберг Е. Я., Фейгин В. Л. Метод расчета сварных роторов турбомашин. — Энергомашиностроение, 1972, № 6, с. 1—5.
47. Гликман Л. А., Грибберг М. И. Об изменении декремента затухания турбинных лопаток в процессе эксплуатации. — ЖТФ, 1946, вып. 9, т. 16, с. 985—987.
48. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Успехи матем. наук, 1961, вып. 3 (99), т. 16, с. 171—174.
49. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания механических систем. Киев: Наукова думка, 1968, с. 340.
50. Гонтаровский В. П., Козлов И. А., Гонтаровская Т. Н. Применение МКЭ к расчету напряженного и деформированного состояния неоднородных тел вращения. — Проблемы прочности, 1975, № 8, с. 72—76.
51. Горелкин Н. М. Исследование частот вращающихся лопаток паровых турбин и других машин. — Тр. ЛМЗ, 1960, № 6, с. 232—242.
52. Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1953, с. 371.
53. Гринберг С. М. О частотах собственных изгибных колебаний клиновидных стержней. — В кн.: Колебания в турбомашинных. М.: АН СССР, 1956, с. 97—110.
54. Гринберг С. М. Расчет на изгиб бандажных проволок. — Теплоэнергетика, 1959, № 7, с. 26—31.
55. Гринберг С. М. О роли стесненности кручения при расчете частот колебаний лопаток компрессора. — В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение, 1966, вып. 3, с. 214—237.
56. Гринберг С. М. Применение метода Рунта к расчету изгибных колебаний консольных лопаток осевых турбомашин. — Расчет на прочность, 1962, вып. 8, с. 271—307.
57. Гринберг С. М. К расчету частот колебаний лопаток компрессора методами теории оболочек. — В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение, 1969, вып. 5, с. 242—254.
58. Гринченко И. Г. Упрочнение деталей из жаропрочных и титановых сплавов. М.: Машиностроение, 1971. 120 с.
59. Гриффин Д. С., Келлог Р. Б. Численное решение несимметричных и плоских задач упругости. — В кн.: Механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1968, № 2, с. 108—115.
60. Грубин А. Н. Расчет на прочность елочного замка лопаток турбин. Л.: Машиностроение, 1970, с. 180.
61. Деак, Беард. Методика вычисления частот пакета лопаток последних ступеней паровой турбины. Пер. с англ. — Тр. америк. общ-ва инж.-мех., 1963, № 4, с. 73—80. (Серия А).
62. Джанелидзе Г. Ю. К теории тонких и тонкостенных стержней. — Прикладная математика и механика, 1949, вып. 6, т. 13, с. 597—608.
63. Дондошанский В. К. О возбудимости резонансных колебаний пакетов лопаток турбомашин. — Энергомашиностроение, 1961, № 8, с. 25—28.
64. Дондошанский В. К. Расчет колебаний упругих систем на электронных вычислительных машинах. М.: Машиностроение, 1965. 367 с.
65. Дондошанский В. К. Динамика и прочность судовых газотурбинных двигателей. Л.: Судостроение, 1978, 334 с.
66. Заблочкин И. Е., Коростелов Ю. А., Шипов Р. А. Бесконтактные измерения колебаний лопаток турбомашин. М.: Машиностроение, 1977. 159 с.
67. Зайдельман Р. Л. Надежность лопаточного аппарата паровых турбин. М.: Энергия, 1978. 224 с.
68. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
69. Зильберман А. С., Ривовш У. Е. Об изгибе давлением пара рабочих лопаток паровых турбин. — Вестник котлотурбостроения, 1933, № 3, с. 17—24.

70. Зильберман А. С. О тангенциальной вибрации пакета лопаток под действием импульса от сопел. — Советские котлотурбостроение, 1934, № 3, с. 74—84.
71. Зиннер К. Упругость и неупругость металлов. — В кн.: Упругость и неупругость металлов. М.: Изд-во иностр. лит. 1954, с. 9—168.
72. Иванов В. П., Огородов В. Т. Высоочастотный воздушный вибростенд. — Тр. Куйбышевский авиац. ин-т, 1965, вып. 19, с. 413—425.
73. Иванов В. П. Некоторые вопросы колебаний лопаточных венцов и других упругих тел, обладающих циклической симметрией. — В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение, 1971, вып. 6, с. 113—132.
74. Ильченко Е. Н., Сахаров А. С. О решении больших систем уравнений при расчете пластин и оболочек. — В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будивельник, 1972, вып. 16, с. 25—31.
75. Испытание материалов: Справочник/Под ред. Х. Блюменауэра. Пер. с нем. под ред. М. Л. Бернштейна. М.: Металлургия, 1975. 445 с.
76. Исследование концентрации в плоских моделях ободов турбинных дисков/М. Х. Ахметзянов, Г. Т. Казаков, Е. Д. Консон, Г. Х. Листвинский. — В кн.: Механика деформируемого тела и расчет сооружений. Новосибирск. 1970, вып. 96, с. 257—267.
77. Исследование напряженного состояния и конструктивной прочности элементов роторов турбомашин/В. П. Рабнович, В. Ф. Кожевников, Е. Д. Консон, Ж. В. Башкатова. — Проблемы прочности, 1969, № 1, с. 48—52.
78. Каицпольский А. А., Кемпнер М. Л. Совместные колебания лопаток турбин со свободной кольцевой связью. — В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение, 1971, вып. 6, с. 132—156.
79. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Гос изд-во физ.-мат. лит., 1960. 455 с.
80. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 310 с.
81. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. 2-е изд. М.: Наука, 1969. 420 с.
82. Кемпбелл В. Аксиальная вибрация дисков паровых турбин и меры защиты от нее. М.: Энергоиздат, 1937. 47 с.
83. Кинасцовили Р. С. Расчет на прочность дисков турбомашин. М.: Оборонгиз. 1954. 144 с.
84. Кириллов И. И. Теория турбомашин. 2-е изд. Л.: Машиностроение, 1972. 536 с.
85. Клюев В. В. Приборы и системы для измерения вибрации, шума и удара. Т. 2. М.: Машиностроение, 1978. 439 с.
86. Коваленко А. Д. К расчету вращающихся дисков экспоненциального профиля. — Инж. сборник АН СССР, 1946, вып. 2, т. 2, с. 87—102.
87. Коваленко А. Д. Избранные труды. Киев: Наукова думка, 1976. 762 с.
88. Консон Е. Д. Оценка максимальных напряжений при ползучести в обод турбинного диска. — Энергомашиностроение, 1969, № 8, с. 32—34.
89. Консон Е. Д. Решение упруго-пластической плоской задачи с учетом произвольного температурного поля. — В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будивельник, 1970, вып. 12, с. 120—127.
90. Консон Е. Д., Омельчак А. И. Исследование вариационно-разностным методом напряженного состояния обода турбинного диска Т-образного хвостового соединения. — Проблемы прочности, 1973, № 12, с. 75—80.
91. Консон Е. Д. Концентрация напряжений в обод турбинного диска Т-образного хвостового соединения. — Теплоэнергетика, 1976, № 6, с. 59—63.
92. Котельные и турбинные установки энергетических блоков/Под ред. В. Е. Дорщук. М.: Энергия, 1971. 268 с.
93. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. 398 с.
94. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М.: ОНТИ, 1932. 472 с.
95. Крылов А. Н. Вибрация судов. Т. 10. М.—Л.: АН СССР, 1948. 402 с.
96. Кудевинский Я. В., Глушков Г. А. Современные способы обработки профильных поверхностей лопаток турбин. М.: НИИЭинформэнергомаш, 1977. 34 с.
97. Кузнецов Н. Д., Цейтлин В. И. Эквивалентные испытания газотурбинных двигателей. М.: Машиностроение, 1975. 213 с.
98. Лавренко Т. Н., Крючкова Н. И. Из опыта вибрационной настройки и контроля облопачивания. — Тр. ЛМЗ, 1960, № 6, с. 207—221.
99. Лагун В. П., Симою Л. Л. Газодинамические исследования последней ступени натурального ЦНД турбины ВК-100-5 до и после модернизации. — Теплоэнергетика, 1969, № 12, с. 13—18.
100. Левин А. В., Ривовш У. Е. Вибрация дисков паровых турбин. — Советское котлотурбостроение, 1934, № 4, с. 42—46, 1936, № 3, с. 8—14.
101. Левин А. В. Вибрация дисков. — ЖТФ, 1937, вып. 17, т. 7, с. 1739.
102. Левин А. В. Расчет на статический изгиб и на вибрацию дисков гиперболического профиля. — ЖТФ, 1937, вып. 17, т. 7, с. 1754.
103. Левин А. В., Ривовш У. Е. Расчет на статический изгиб и на вибрацию рабочих лопаток паровых турбин. — Советское котлотурбостроение, 1936, № 10, с. 29—31; 1937, № 3, с. 151—152; № 4, с. 205—210.
104. Левин А. В. К тангенциальной вибрации пакета лопаток. — Советское котлотурбостроение, 1939, № 10—11, с. 360—367.
105. Левин А. В. Расчет на вибрацию облопаченных дисков паровых турбин. — Советское котлотурбостроение, 1945, № 3, с. 2—7.
106. Левин А. В. Расчет на вибрацию вращающихся облопаченных дисков турбин. — Советское котлотурбостроение, 1946, № 2, с. 11—14.
107. Левин А. В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин. Л.—М.: Госэнергоиздат, 1953. 624 с.
108. Левин А. В., Шур С. С. Внутрипакетные крутильные колебания рабочих лопаток паровых турбин. — В кн.: Паротурбостроение, и газотурбостроение. М.—Л.: Машгиз, 1957, № 5, с. 213—230.
109. Левин А. В. Вычисление частот собственных колебаний облопаченных дисков с естественно закрученными лопатками. — Энергомашиностроение, 1960, № 7, с. 1—5.
110. Левин А. В. Вибрация дисков паровых турбин. Автореф. дис. на соиск. учен. степ. д-ра техн. наук. М., МЭИ 1961. 22 с.
111. Легчилин П. Ф. Авария на АЭС «Три Майл Айленд». — Энергохозяйство за рубежом. 1979, № 6, с. 21—24.
112. Лейкин А. С. Напряженность и выносливость деталей сложной конфигурации. М.: Машиностроение, 1969. 370 с.
113. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: ГИТТЛ, 1955. 491 с.
114. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
115. Малинин Н. Н. Прочность турбомашин. М.: Госнаучтехиздат, 1962. 291 с.
116. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
117. Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям. М.: АН СССР, 1955. 503 с.
118. Мартынова О. И. Влияние водно-химических режимов энергоблоков ТЭС и АЭС на надежность работы паровых турбин. — Энергохозяйство за рубежом, 1979, № 1, с. 1—6.
119. Меерович И. И. Распределение напряжений в компрессорных лопатках при колебаниях. М.: Оборонгиз, 1961. 106 с.
120. Меерсон И. Л., Газарян Ю. Х., Городецкий М. Е. Применение переменного шага в спрямляющих аппаратах компрессора для снижения вибраций рабочих лопаток. — В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение, 1969, № 5, с. 102—112.
121. Метод расчета конструкций на сопротивление хрупкому разрушению/Ю. Н. Работнов, Г. С. Васильченко, П. Ф. Кошелев и др. — Машиностроение, 1976, № 1, с. 62—68.

122. Михли С. Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. М.: Наука, 1970. 512 с.
123. Мэйсон С. Температурные напряжения и малоцикловая усталость. Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1974. 344 с.
124. Нейбер Г. Теория концентрации напряжений в призматических стержнях, работающих в условиях сдвига для любого нелинейного закона, связывающего напряжения и деформации. — В кн.: Механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961, вып. 4, с. 117—130.
125. Нейбер Г., Хан Г. Проблема концентрации напряжений в научных исследованиях и технике. — В кн.: Механика. М.: Мир., 1967, 3-103, с. 109—131.
126. О причинах эрозионного износа лопаток первой ступени ЦВД и ЦСД турбин К-200-130 (ЛМЗ) и К-160-130 (ХТГЗ)/В. П. Маркин, Г. Т. Школьник, М. И. Лузиков, М. В. Грубер. — Теплоэнергетика, 1969, № 1, с. 35—38.
127. Островский Ю. И. Голография и ее применения. Л.: Наука, 1973. 179 с.
128. Панов Д. Ю. Расчеты воздушного винта на прочность. — Тр. ЦАГИ, 1937, вып. 288, с. 184.
129. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. М. Машгиз, 1957. 336 с.
130. Паюков А. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1969. 193 с.
131. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 301 с.
132. Пиготт, Эйбель. Колебания и устойчивость турбинных лопаток в условиях срыва потока. Пер. с англ. — В кн.: Энергетические машины и установки. 1974, № 3, с. 44—52.
133. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Киев: Наукова думка, 1971. 375 с.
134. Прокофьев К. А., Самсонов Ю. А., Чернов С. К. — Вибрация деталей судовых турбоагрегатов. Л.: Судпромгиз, 1961. Т. 1. 551 с.; Т. 2. 292 с.
135. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник/Под ред. И. А. Бриггера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 3. 567 с.
136. Прочность паровых турбин/Под ред. Л. А. Шубенко-Шубина. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1973. 456 с.
137. Рабинович В. П. Прочность турбинных дисков. М.: Машиностроение, 1966. 150 с.
138. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. М.: ГИФМЛ, 1962. 455 с.
139. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 700 с.
140. Радциг А. А. О расчете вращающихся дисков экспоненциального профиля. — Тр. ЛИИ/Ленингр. индустр. ин-т, 1936, № 12, с. 31—36.
141. Радциг А. А. Исследование дисков криволинейного профиля. — Тр. ЛИИ/Ленингр. индустр. ин-т, 1939, № 2, с. 24—30.
142. Расчеты на прочность в машиностроении/Под ред. С. Д. Пономарева. М.: Машгиз, 1956. Т. 1. 884, с.; 1958; Т. 2. 974, с.; 1959. Т. 3. 1118 с.
143. Реализация метода конечного элемента для неполигич оболочек сложной формы/И. Е. Гончаренко, В. Н. Кислюцкий, А. Д. Легостаев и др. — В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев. Будивельник, 1974, вып. 24, с. 16—25.
144. Ривош У. Е. Вычисление частот аксиальных колебаний дисков. — Советское котлотурбостроение, 1939, № 9, с. 339—342.
145. Ривош У. Е. Расчет динамических напряжений в лопатках с парциальным подводом пара. — Советское котлотурбостроение, 1946, № 5, с. 18—19.
146. Розин Л. А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. М.: Стройиздат, 1977. 129 с.
147. Рыжкова Л. С., Кондаков А. Ю. Вибропрочностные испытания лопаток последней ступени мощной паровой турбины на натурном стенде. — Энергомашиностроение, 1978, № 6, с. 29—31.

148. Рыжкова Л. С., Кондаков А. Ю. Вибропрочностные испытания лопаток последней ступени мощной паровой турбины в эксплуатационных условиях. — Энергомашиностроение, 1978, № 8, с. 37—38.
149. Рябчиков А. В., Муравкин О. Н. Фреттинг-коррозия и защита металлов. М.: ЦБТИ, 1957, 81—4, 55 с.
150. Савельев Л. И. Характеристика предельных циклов в истинных напряжениях. — Вестник машиностроения, 1955, № 2, с. 15—19.
151. Самойлович Г. С., Коваленко В. И., Рубен Ф. Экспериментальное исследование динамических напряжений в лопатках ступени турбины с парциальным подводом пара. — Изв. вузов. Энергетика, 1967, № 4, с. 57—63.
152. Самойлович Г. С. Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин. М.: Наука, 1969. 444 с.
153. Самойлович Г. С. Возбуждение колебаний лопаток турбомашин. М.: Машиностроение, 1975. 288 с.
154. Сахаров А. С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений. — В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев, Будивельник, 1974, вып. 24, с. 196.
155. Свойства сталей и сплавов, применяемых в котлотурбостроении. Справочник в 3-х частях. Л.: Машиностроение, 1966—1967. Ч. 1. 1966. 219 с.; Ч. 2. 1966. 244 с.; Ч. 3. 1967. 180 с.
156. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 248 с.
157. Серенсен С. В. Сопротивление материалов усталостному и хрупкому разрушению. М.: Атомиздат, 1975. 190 с.
158. Система математического обеспечения прочностных расчетов пространственных конструкций/Г. В. Исаханов, В. Н. Кислюцкий, А. С. Сахаров, А. Л. Спиряевский. — Проблемы прочности, 1978, № 11, с. 59—61; № 12, с. 25—28.
159. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1965. 479 с.; Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1956. 628 с.; Т. 3. Ч. 1. М.: ГИТТЛ, 1957. 1328 с.; Т. 3. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1958. 672 с.; Т. 4. М.: Физматгиз, 1958. 812 с.
160. Соболев Ю. В. Пути совершенствования металлургической технологии производства крупных заготовок для энергомашин. — Энергомашиностроение, 1977, № 9, с. 22—24.
161. Совершенствование материалов для ответственных деталей турбин/А. И. Чижик, В. М. Анфимов, Е. Г. Малышевская и др. — В кн.: 50 лет турбостроения на ЛМЗ. 1924—1974. Л.: Машиностроение, 1976. с. 90—103.
162. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
163. Степанов Г. Ю. Нестационарные течения в турбомашинных. — В кн.: Новое в зарубежной науке. М.: Мир, 1979, вып. 10, 317 с. (Сер. Механика).
164. Стретт Дж. В (лорд Рэлей). Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 499 с.
165. Супонийский Н. З. Определение прогиба зуба хвостового соединения елочного типа в упруго-пластической области. — Энергомашиностроение, 1963, № 3, с. 16—20.
166. Супонийский Н. З. К выбору допусков в хвостовом соединении елочного типа лопатки газовой турбины. — Энергомашиностроение, 1969, № 12, с. 29—31.
167. Теверовский И. Г. Исследование напряжений во вращающихся дисках со многими отверстиями. — Советское котлотурбостроение, 1940, № 11, с. 402—411.
168. Тепловое состояние роторов и цилиндров паровых и газовых турбин/Под ред. К. П. Селезнева. М.—Л.: Машиностроение, 1964. 284 с.
169. Термопрочность деталей машин/Под общ. ред. И. А. Бриггера и Б. Ф. Шорра. М.: Машиностроение, 1975. 455 с.
170. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1965. Т. 1. 363 с.; Т. 2. 480 с.

171. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
172. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
173. Траунель В. Тепловые турбомашин. Пер. с нем. Т. 2. М.: Госэнергоиздат, 1963. 360 с.
174. Третьяков П. Г., Краковский Д. Е., Коваленко А. Н. Расчет температурных полей и напряжений роторов паровых турбин на ЭВМ. — Теплоэнергетика, 1978, № 5, с. 20—24.
175. Трояновский Б. М. Турбины для атомных электростанций. 2-е изд. М.: Энергия, 1978. 232 с.
176. Тумаркин С. А. Равновесие и колебания закрученных стержней. — Тр. ЦАГИ, 1937, вып. 341, с. 42.
177. Тюленев В. Н. Определенное рассеяние энергии в материалах при установившихся резонансных колебаниях. — В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение, 1969, вып. 4, с. 169—193.
178. Угорский А. Э. Оценка максимальных напряжений на контуре выкружке Т-образных хвостов лопаток турбин. — Энергомашиностроение, 1967, № 4, с. 13—15.
179. Угорский А. Э. Проектирование на заданный срок службы Т-образных хвостов лопаток турбин. — Энергомашиностроение, 1968, № 3, с. 18—20.
180. Угорский А. Э. Оценка концентрации напряжений в дисках с эксцентричными отверстиями. — Энергомашиностроение, 1970, № 1, с. 40—42.
181. Угорский А. Э. Сопоставление экспериментальных и расчетных данных по длительной прочности Т-образных хвостов лопаток турбин. — Энергомашиностроение, 1970, № 7, с. 12—15.
182. Угорский А. Э. Концентрация напряжений в условиях ползучести при растяжении с изгибом плоских деталей. — Энергомашиностроение, 1974, № 5, с. 4—7.
183. Угорский А. Э. Длительная прочность при растяжении с изгибом плоских деталей турбин. — Энергомашиностроение, 1975, № 4, с. 8—11.
184. Уринцев Я. С., Гордина Ф. Я. Применение эндоскопов для обследования ТЭС и АЭС. — Энергохозяйство за рубежом, 1979, № 3, с. 25—28.
185. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. П. Вычислительные методы линейной алгебры. М.—Л.: ГИФМЛ, 1963. 734 с.
186. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
187. Филиппов А. П., Кохманюк С. С., Воробьев Ю. С. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. Киев: Наукова думка, 1974. 176 с.
188. Формирование проточной части стационарных паровых турбин большой мощности/В. К. Рыжков, И. М. Вольфсон, Е. Д. Консон и др. — В кн.: 50 лет турбостроения на ЛМЗ. 1924—1974. Л.: Машиностроение, 1976, с. 43—49.
189. Форрест П. Усталость металлов. Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1968. 352 с.
190. Фридман В. М., Будникова Т. В., Загородная Г. А. Крутильные колебания вала при внезапном коротком замыкании. — Вестник электропромышленности. 1961, № 2, с. 14—17.
191. Фын Я. Ц. Введение в теорию аэроупругости. М.: Физматгиз, 1969. 523 с.
192. Хейман Ф. Дж. Вибрации турбинных лопаток, возникающие под влиянием закруточных следов соплового аппарата. Пер. с англ. — Энергетические машины и установки, 1969, № 4, с. 1—20.
193. Хильчевский В. В., Василевич Д. И. Влияние статической продольной нагрузки на рассеяние энергии при поперечных колебаниях стержней. — Проблемы прочности, 1979, № 7, с. 94—96.
194. Хорлок Дж. Нестационарная подъемная сила аэродинамического профиля при наличии пульсаций скорости потока в поперечном и продольном направлениях. Пер. с англ. — Теор. основы инж. расчетов, 1968, № 4, с. 64—72.
195. Хронин Д. В. Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1970. 412 с.
196. Численные методы в прикладной теории упругости/А. П. Филиппов, В. Н. Булгаков, Ю. С. Воробьев и др. Киев: Наукова думка, 1968. 252 с.
197. Чижик А. А. О критериях оценки склонности к хладноломкости материала лопаток. — Проблемы прочности, 1979, № 8, с. 13—20.
198. Чижик А. И., Чижик А. А. Материалы для основных деталей паровых турбин. — Энергомашиностроение, 1975, № 12, с. 6—10.
199. Шапошников Н. А. Механические испытания металлов. М.—Л.: Машгиз, 1954. 133 с.
200. Шемтов А. З. Приближенное определение частот собственных тангенциальных колебаний коротких лопаток паровых турбин. — Котлотурбостроение, 1947, № 1, с. 29—31.
201. Шемтов А. З. Измерение динамических напряжений в рабочих лопатках и других деталях турбины в эксплуатационных условиях. — Тр. ЛМЗ, 1960, № 6, с. 169—192.
202. Шемтов А. З. Учет жесткости, создаваемой скрепляющими проволоками, при расчете изгиба и обобщающей тангенциальной вибрации облопачивания. — Тр. ЛМЗ, 1960, № 6, с. 222—231.
203. Шемтов А. З., Боришанский К. Н. Особенности колебаний рабочих лопаток турбомашин, связанные с применением диафрагмы переменного шага. — Проблемы прочности, 1973, № 10, с. 43—50.
204. Шнейдман А. Е. Определение частот собственных колебаний лопаток турбин при вращении методом раздельного учета упругих и центробежных сил. — В кн.: Колебания в турбомашинах. М.: АН СССР, 1956, с. 77—95.
205. Шнейдерович Р. М. Прочность при статическом и повторностатическом нагружении. М.: Машиностроение, 1968. 343 с.
206. Шорр Б. Ф. К теории закрученных тонкостенных стержней. — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1960, № 5, с. 27—33.
207. Шорр Б. Ф. Колебания закрученных стержней. — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1961, № 3, с. 35—39.
208. Шорр Б. Ф. Основы теории закрученных лопаток с непрямой осью. — В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение, 1966, вып. 3, с. 188—123.
209. Шорр Б. Ф., Бауер В. О., Кузнецов Е. А. Продольно-крутильные колебания роторов. — Проблемы прочности, 1973, № 7, с. 32—38.
210. Шорр Б. Ф., Блиник Б. С., Ефремова В. Т. Определение спектра частот собственных колебаний лопаток, объединенных полочным бандажом. — Тр. ЦИАМа, 1975, № 680, с. 16.
211. Шубенко-Шубин Л. А., Островский С. И. Паровая турбина ХТГЗ типа СКР-100 с охлаждением для сверхкритических параметров пара. — Энергомашиностроение, 1962, № 6, с. 4—10.
212. Щегляев А. В. Паровые турбины. 5-е изд. М.: Энергия, 1976. 358 с.
213. Эванс Ю. Р. Коррозия и окисление металлов. М.: Машгиз, 1962. 850 с.
214. Ямпольская Р. Г., Аркадьев Д. А. Определение вибрационных характеристик облопачивания с демпферными связями. — Энергомашиностроение, 1965, № 11, с. 5—7.
215. Яновский М. И. Конструирование и расчет на прочность деталей паровых турбин. М.: АН СССР, 1947. 646 с.
216. Bardwick H. A., Baily F. G., Fenton R. E. Operating and Maintaining Steam Turbine/Generators. Operating at off-normal conditions. — Power, 1976, August, v. 120, N 8, p. 61—65.
217. Bisshop K. E. Stress Coefficients for Rotating Disks of Conical Profile. — Journal of Applied Mechanics, 1944, March, v. 11, N 1, p. 1—9.
218. Carnegie W. The Vibration of Twisted Cantilever Beams. — Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1959, v. 173, N 12.
219. Development of 3600 rpm 28 inch High Loading Last Stage Blade/Atsuo Okubo, Masari Kishimoto, Hideyuki Karato a. o. — Mitsubishi Heavy Industries, Technical Review, 1978, v. 15, N 2, p. 112—119.

220. **Goodier J. N.** Elastic Torsion in the Presence of Initial Axial Stress. — *Journal of Applied Mechanics*, 1950, v. 17, N 4, p. 383—387.
221. **Engel H. L., Goodier J. N.** Measurements of Torsional Stiffness Changes and Instability due to Tension, Compression and Bending. — *Journal of Applied Mechanics*, 1953, v. 20, N 4, p. 553—560.
222. **Ewins D. I.** Study Resonance Coincidence in Bladed Disks. — *Journal Mechanical Engineering Science*, 1970, v. 12, N 5, p. 305—362.
223. **Kazimierski Z.** Plaski przepływ przez osiowy maszyny stopień przepływowowy o dowolnych parametrach geometrycznych. — *Archiwum budowy maszyn*, 1966, v. 13, N 2, p. 213—232.
224. **Kemp N. H., Sears W. R.** Aerodynamic Interference Between Moving Blade Rows. — *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1953, v. 20, N 9, p. 585—598.
225. **Kemp N. H., Sears W. R.** The Unsteady Forces due to the Viscous Wake in Turbomachines. — *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1955, N 7, p. 478—483.
226. **Leopold I.** Laufschauflerschäden an axialen Dampfturbinen. — *Der Maschinen Schaden*, 1971, Bd. 44, N 3, S. 81—89.
227. **Mayer R. X.** The Effect of Wake on the Transient Pressure and Velocity Distributions in Turbomachinery. — *Trans. of the ASME*, 1958, N 7, p. 67—89.
228. **O'Donnel W. J.** The Additional Deflection of a Cantilever due to the Elasticity of the Support. — *Trans. of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 1960, v. 27, p. 461—464.
229. **Quick S. Z., Tseng W. J.** Computer Analyses Turbine-Blade Failure. — *Westinghouse Electric Corp. Electrical World*, 1976, v. 185, N 9, p. 26—29.
230. Recent Technology in Large Steam Turbines/Yoshio Hirota, Akio Hizume, Yasuo Nakagami, Yoshiki Kogoya. — *Mitsubishi Heavy Industries, Technical Review*, 1978, v. 15, N 3, p. 173—188.
231. **Roeder A.** Die Endschaufler der Grössten Volltourigen Norm-Nieder-Drückturbinen. — *Brown Boveri Mitt.*, 1976, N 2, S. 115—122.
232. **Rosard D. D.** Natural Frequencies of Twisted Cantilever Beams. — *Journal of Applied Mechanics*, 1953, v. 20, N 2, p. 241—244.
233. **Schwerin E.** Über die Verteilung der Dampfdruck-Biegungsbeanspruchungen in den Schaufelgruppen der Dampfturbinen. *Zeitschrift für Technische Physik*, 1928, N 2, s. 92—96.
234. **Vuksta Thomas Jr.** Steam Turbine Covering Stage Impulse Blade Vibration Investigation. — *Paper Amer. Soc. Mech. Engrs.*, 1961, NWA-122, p. 15.
235. **Weaver F. Z., Prohl M. A.** High-Frequency Vibration of Steam Turbine Buckets. — *Trans. of the ASME*, 1958, v. 80, N 1, p. 181—189.
236. **Whitehead D. S.** Force and Moment Coefficients for Vibration Aerofoils in Cascade. — *Aeronautical Council Reports and Memoranda*, 1962, N 3254, p. 37.
237. **Whitehead D. S.** Effect of Mictuning on the Vibration of Turbomachine Blades Induced by Wakes. — *Journal Mechanical Engineering Science*, 1966, v. 8, N 1, p. 15—21.

Предисловие	3
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ	
УСЛОВИЯ РАБОТЫ ЛОПАТОК И ДИСКОВ	5
Глава I. Особенности конструкции, применяемые материалы и действующие нагрузки	—
I.1. Конструкции рабочих лопаток и связей	—
I.2. Конструкции турбинных роторов и дисков	21
I.3. Характеристики свойств применяемых материалов	28
I.4. Силы, действующие на рабочие лопатки и диски в условиях эксплуатации	48
I.5. Условия прочности рабочих лопаток, дисков и роторов	64
Глава II. Колебания рабочих лопаток и дисков	77
II.1. Колебания отдельных лопаток	—
II.2. Колебания пакетов лопаток	82
II.3. Колебания лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями	97
II.4. Влияние сдвига, инерции вращения и податливости заделки на собственные частоты лопаток	102
II.5. Влияние центробежных сил и температуры на собственные частоты лопаток	111
II.6. Силы, демпфирующие колебания лопаток	116
II.7. Сравнительная возбудимость различных собственных форм колебаний	133
II.8. Пакетный множитель	140
II.9. Колебания лопаток при частичном подводе пара	153
II.10. Конструктивная усталостная прочность лопаток	168
II.11. Колебания дисков	175
II.12. Мероприятия по обеспечению вибрационной надежности лопаток и облопаченных дисков	185
II.13. Причины повреждений и опыт эксплуатации лопаточного аппарата паровых турбин	198

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

РАСЧЕТ РАБОЧИХ ЛОПАТОК И ДИСКОВ НА ПРОЧНОСТЬ	208
Глава III. Расчет на прочность жестких лопаток	209
III.1. Расчет на растяжение рабочей части лопатки	—
III.2. Расчет лопатки на изгиб и кручение от действия центробежных сил	213
III.3. Расчет лопатки на изгиб от парового усилия	219
III.4. Понятие о выборе установки рабочей лопатки	223

Глава IV. Расчет пакетов лопаток	225
IV.1. Условия сопряжения лопаток со связями	—
IV.2. Пакет лопаток, связанных бандажом	229
IV.3. Напряжения в пакете лопаток от действия центробежных сил и температурного поля	236
Глава V. Расчет на прочность гибких закрученных лопаток	247
V.1. Расчетная схема и принятые допущения	—
V.2. Перемещения, деформации и напряжения	248
V.3. Уравнения равновесия	253
V.4. Решение системы интегро-дифференциальных уравнений	259
V.5. Анализ напряженно-деформированного состояния гибких закрученных лопаток	263
Глава VI. Расчет на прочность проволочных связей и бандажей	267
VI.1. Расчет проволочных связей	—
VI.2. Расчет сегмента бандажа и бандажной полки	272
VI.3. Расчет бандажей, замкнутых на круг	279
Глава VII. Расчет хвостовых соединений	282
VII.1. Т-образное хвостовое соединение	283
VII.2. Вильчатое хвостовое соединение	298
VII.3. Елочное хвостовое соединение	309
Глава VIII. Расчет дисков на прочность	323
VIII.1. Основные дифференциальные уравнения для тонких дисков	—
VIII.2. Граничные условия	326
VIII.3. Исследование решений дифференциальных уравнений	328
VIII.4. Граничное условие при посадке диска на вал с натягом	332
VIII.5. Условия сопряжения	335
VIII.6. Диск постоянной толщины	337
VIII.7. Диск конического профиля	345
VIII.8. Экспоненциальные профили и диск равного сопротивления	348
Глава IX. Приближенные методы и практические приемы расчета дисков и роторов	351
IX.1. Метод двух расчетов	352
IX.2. Метод последовательных приближений	358
IX.3. Объемное напряженное состояние в дисках	364
IX.4. Расчет цельнокованых роторов	369
IX.5. К расчету сварных роторов	376
Глава X. Расчеты на прочность за пределами упругости	380
X.1. Некоторые соотношения теории упругости	381
X.2. Основные уравнения деформационной теории пластичности	383
X.3. Основные уравнения теории ползучести	387
X.4. Расчет дисков и роторов с учетом пластичности и ползучести. Метод переменных параметров упругости	393
X.5. Концентрации напряжений в условиях пластических деформаций и ползучести. Метод Нейбера	398
X.6. Некоторые частные задачи	402

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ВИБРАЦИЯ ЛОПАТОК И ДИСКОВ	411
Глава XI. Изгибные колебания лопаток постоянного сечения	—
XI. 1. Вывод дифференциального уравнения колебаний лопатки	—
XI. 2. Уравнение свободных колебаний лопатки	414
XI. 3. Решение дифференциального уравнения свободных колебаний при различных граничных условиях	417
XI. 4. Влияние сдвига и инерции вращения на собственные частоты колебаний лопаток	426
XI. 5. Влияние податливости заделки на собственные частоты колебаний лопаток	432
XI. 6. Особенности колебаний бандажированных лопаток	445
XI. 7. Синфазные колебания пакета лопаток	448
XI. 8. Синфазные колебания пакета лопаток с различными по конструкции связями	452
XI. 9. Внутрипакетные колебания лопаток	456
XI.10. Колебания лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями	465
XI.11. Влияние места расположения и жесткости связей на собственные частоты внутрипакетных колебаний	474
XI.12. Особенности колебаний, вызванные различием в парциальных частотах лопаток в пакете	475
Глава XII. Крутильные и изгибно-крутильные колебания лопаток постоянного сечения	479
XII.1. Дифференциальные уравнения крутильных колебаний. Частоты отдельных лопаток без связей	—
XII.2. Внутрипакетные крутильные колебания лопаток	485
XII.3. Изгибно-крутильные колебания лопаток	491
Глава XIII. Вынужденные колебания лопаток	495
XIII. 1. Вынужденные колебания лопаток под действием гармонической силы	—
XIII. 2. Вынужденные колебания лопаток под действием нагрузки, периодической во времени	503
XIII. 3. Вынужденные колебания при парциальном подводе пара	508
XIII. 4. Вынужденные колебания пакета лопаток. Пакетный множитель	523
XIII. 5. Пакетный множитель при внутрипакетных колебаниях лопаток	526
XIII. 6. Пакетный множитель при колебаниях лопаток, соединенных замкнутыми на круг связями	530
XIII. 7. Вынужденные колебания при наличии разброса в парциальных частотах лопаток	535
XIII. 8. Сравнительная возбудимость различных собственных форм изгибных и крутильных колебаний	538
XIII. 9. Вынужденные колебания в случае применения диафрагмы переменного шага или нерадиальной установки направляющих лопаток	550
XIII.10. Вынужденные колебания лопаток, соединенных упруго-фрикционными связями	558
Глава XIV. Изгибные и крутильные колебания лопаток переменного сечения	565
XIV.1. Изгибные колебания незакрученных лопаток переменного поперечного сечения	—
XIV.2. Приближенные методы определения собственных частот	—

лопаток переменного поперечного сечения	572
XIV.3. Метод последовательных приближений	585
XIV.4. Колебания закрученных лопаток	589
XIV.5. Влияние податливости заделки и центробежных сил на собственные частоты лопаток переменного сечения. . .	595
Глава XV. Изгибно-крутильные колебания отдельной естественно- закрученной лопатки	601
XV.1. Вывод системы дифференциальных уравнений колебаний отдельной лопатки	—
XV.2. Решение системы дифференциальных уравнений. Сопостав- ление экспериментальных и расчетных результатов. . .	616
Глава XVI. Изгибно-крутильные колебания естественно-закручен- ных лопаток, соединенных различными по конструкции связями	625
XVI.1. Конструктивное выполнение связей. Граничные условия в месте соединения лопаток связями	—
XVI.2. Система дифференциальных уравнений для определения собственных частот соединенных связями лопаток. . .	630
XVI.3. Уточнение граничных условий для некоторых конструк- ций связей	636
XVI.4. Результаты теоретического и экспериментального изуче- ния колебаний лопаток, соединенных различными по конструкции связями	645
XVI.5. Вынужденные колебания лопаток с упругими и упруго- фрикционными связями	657
XVI.6. Особенности внутрипакетных колебаний, вызванные раз- бросом в парциальных частотах лопаток	666
XVI.7. Влияние конструкции связей на надежность работы ло- паточного аппарата	669
Глава XVII. Колебания дисков.	672
XVII.1. Вывод дифференциального уравнения колебаний. Гра- ничные условия.	—
XVII.2. Колебания необлопаченных дисков.	680
XVII.3. Колебания облопаченных дисков.	689
Список литературы	697

ИБ № 775

Арон Вульфович ЛЕВИН,

**Константин Николаевич БОРИШАНСКИЙ,
Ефим Давыдович КОНСОН**

ПРОЧНОСТЬ И ВИБРАЦИЯ ЛОПАТОК И ДИСКОВ ПАРОВЫХ ТУРБИН

Редакторы Р. Н. Михеева и В. М. Рошаль
Художественный редактор С. С. Венедиктов
Технические редакторы: Т. П. Малашкина, И. В. Буздаева
Корректоры И. Г. Жукова и А. И. Лавриненко
Переплет художника С. И. Зиначева

Сдано в набор 14.04.81. Подписано в печать 07.09.81. М-29006.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2.
Гарнитура литературная. Печать высокая.
Усл. печ. л. 44,5. Уч.-изд. л. 44,6. Тираж 1960 экз.
Заказ 538. Цена 2 р. 50 к.

Ленинградское отделение издательства «МАШИНОСТРОЕНИЕ»
191065, Ленинград, Д 65, ул. Дзержинского, 10

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
193144, Ленинград, ул. Монсеенко, 10.

В 1982 г.

**Ленинградское отделение издательства
„Машиностроение“**

**Выпускает в свет следующие книги
по энергетическому машиностроению:**

- ◆ Аппаратура впрыска легкого топлива автомобильных двигателей/ Ю. И. Будыко, Ю. В. Духнин, В. Э. Коганер и др. — 2-е изд., перераб. и доп.
- ◆ Гецов Л. Б. Детали газовых турбин: Материалы и прочность. — 2-е изд., перераб. и доп.
- ◆ Иванов В. А. Регулирование энергоблоков
- ◆ Селезнев А. П., Галеркин Ю. Б. Центробежные компрессоры.
- ◆ Шабров Н. Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей.

